De la difficulté d'interpréter les Mélanges de cultures

André CAUTY
Université BORDEAUX 1
CELIA (CNRS, Paris)

Rendez à César,
ce qui est à César...

Impressions

Au séminaire *Arts et Sciences*[1] de l'Université Bordeaux 1, Jeanne Peiffer vient d'exposer la vie et l'œuvre de Dürer (1471-1528), - Albertus Dürer Noricus, Dürer Alemanus -, dans leurs contextes culturel et historique, ceux de la Renaissance de l'Europe, vue depuis une Nuremberg regardant, par-delà les frontières, ses modèles italiens.

Encore sous le charme des gravures de Dürer, l'idée qu'il aurait pu être géomètre, ou du moins l'auteur d'un manuel de géométrie, et qu'il conviendrait de le considérer comme un précurseur de la géométrie descriptive de Gaspard Monge (1746-1818, organisateur des poudreries et fonderies de canons), vient heurter la représentation, certes floue du non-spécialiste, que je me faisais de cet homme bien informé des nouveautés de l'époque. Un graveur d'exception, un professionnel des techniques graphiques et typographiques (vers 1440, Johannes Gensfleisch dit Gutenberg avait découvert et mis au point dans le plus grand secret le procédé d'imprimerie en caractères mobiles), un humaniste à l'esprit tolérant et ouvert, curieux de tout, et qui maniait avec aisance les proportions et le raisonnement "A est à B comme C est à D", "x est entre A et B comme y est entre C et D".

Ce raisonnement, un des plus fameux de l'histoire humaine, notamment de l'histoire des mathématiques, ne commencera à perdre sa place centrale en mathématiques qu'en 1647, très exactement avec la publication de l'*Opus geometricum quadraturae circuli et sectionem coni* du jésuite Grégoire de Saint Vincent ; et il perdra, plus tard encore, au grand regret de

[1] Pour la commodité, les références citées ne renvoient pas à l'exposé du 19 novembre 1997, mais à l'article "La géométrie de Dürer, un exercice pour la main et un entraînement pour l'œil", *Alliage*, n° 23, 1995.

Napoléon, sa place centrale dans les calculs de la vie quotidienne, lorsque le système décimal des poids et mesures (invention imposée par la volonté des Révolutionnaires de 1789) aura achevé sa diffusion "universelle" dans les populations. Une forme de raisonnement que les adultes scolarisés des pays comme la France d'aujourd'hui ne savent plus mettre en œuvre quand il s'agit de calculer mentalement rendements, proportions, changement d'unités ou de devises...

Un raisonnement toujours vivant et largement utilisé par des exclus de l'école et du développement, comme par exemple les paysans analphabètes du Chili confrontés à toute sorte de problèmes de "règle de trois", comme celui du calcul des rendements ou des prix de vente ; mais pas du tout confrontés au problème de la construction du corps des nombres réels.

Confronté quotidiennement par son métier au choix des proportions d'un caractère, au choix des proportions entre lignes et blancs d'une page imprimée, au choix des proportions entre texte et illustrations, et surtout au choix des proportions d'une figure, par exemple celle du corps humain ou des bâtiments, Dürer ne pouvait pas ignorer ce raisonnement dont toute la puissance éclate lorsque l'on maîtrise les nombres et les mesures. Dans le cas du dessin, la maîtrise des mesures ne demande qu'une règle graduée, ou un compas utilisé itérativement pour reporter des unités constantes.

Dürer a représenté, dans la gravure de la Mélancolie, un carré magique d'ordre quatre qu'il est impossible de comprendre, et donc d'apprécier, sans effectuer de calculs arithmétiques. A fortiori, l'invention de ce carré magique (dont rien ne prouve qu'elle revienne à Dürer) suppose la maîtrise d'une numération performante (les nombres de ce carré magique sont écrits en numération décimale de position), et celle du calcul arithmétique. On peut en conclure que Dürer était vraisemblablement un bon calculateur, notamment mental. Mais cela ne prouve pas qu'il a utilisé sa connaissance des proportions pour s'attaquer aux problèmes de la construction des corps de nombres, rationnels ou réels, ou au problème de la discrétisation du continu.

L'outil des proportions s'applique évidemment aussi aux mesures des distances des points d'une figure géométrique du plan ou de l'espace. Pourtant ce n'est pas, à strictement parler, un outil géométrique, mais un outil logique *transdisciplinaire*, utilisé par exemple dans l'argumentation et même en poésie, et que toutes les arithmétiques, notamment celles de l'Antiquité, ont rapidement annexé à leurs pratiques.

Comme le suggèrent les nombreuses planches qu'il a gravées, et qui nous apparaissent aujourd'hui comme des épures "à l'échelle" et dûment "cotées", Dürer a du être un maître dans l'usage mental des proportions en nombres entiers naturels. A l'image d'un Dürer géomètre, s'oppose ainsi celle d'un Dürer arithméticien, en tout cas celle d'un Dürer utilisateur de l'arithmétique, faisant usage fonctionnel de ses connaissances sur les proportions dans son travail de dessinateur, de peintre, de graveur et de typographe.

L'exposé de Jeanne Peiffer conduit à renverser cette image en suggérant de voir en Dürer un géomètre, et par là un mathématicien "complet", puisqu'il aurait disposé de pratiquement toute la science mathématique de son temps (arithmétique et géométrie), notamment celle des Italiens qui allaient, au XVII^e^ siècle, faire naître la géométrie des indivisibles, la mécanique, et enfin l'analyse. Et l'on peut rêver dans ce contexte, à ce que seraient devenues dans les mains de Dürer les illustrations des codex aztèques, dont les cartes de géographie (que l'on commence à déchiffrer) présentent des vues éclatées d'un lieu considéré (faut-il dire projeté) selon les trois dimensions de l'espace.

Jusqu'où peut-on suivre l'intuition d'un Dürer mathématicien, et tout spécialement géomètre, sans trop tomber dans les rétroprojections qui sont à l'Histoire ce que fut l'européocentrisme à la grammaire, une grammaire plus normative que scientifique à l'époque où l'Europe découvrait ses langues nationales et où elle allait subir le choc de la découverte de centaines de langues amérindiennes initialement mesurées à l'aune des grammaires grecques et latines ?

Par prudence, nous écarterons a priori le raisonnement "si *X* se trouve à tel ou tel carrefour de l'Histoire, alors *X* avait telle ou telle qualité". L'époque, pour l'Europe du Dürer qui s'intéressait aux fortifications et à la standardisation des armements, ainsi qu'à l'usage des proportions (sont-elles encore "esthétiques" dans ce contexte) -, était grosse des conquêtes du continent américain et des guerres de religion encore à venir. La présence de Dürer à ce carrefour sanglant de l'Histoire est incontestable.

Il serait pourtant fort injuste d'en déduire que Dürer était un précurseur des *Conquistadores*, de Vauban, ou de la "rationalisation" des industries de l'armement.

Vous avez dit *Mathématique* ?

Le caractère mathématique d'un texte, d'une argumentation, d'une représentation graphique, etc. n'est pas toujours facile à établir ; tout comme il n'est pas simple de montrer que quelqu'un met en œuvre des "théorèmes en acte", lorsqu'il se livre à telle ou telle activité, tel ou tel art, telle ou telle technique. La mathématicité est une notion fuyante, un continu qui s'étend entre des pôles plus facilement saisissables, et entre lesquels il faut bien trancher si l'on veut s'entendre et savoir précisément de quoi l'on parle.

Prenons le fait de pouvoir se repérer, se déplacer, se représenter ses déplacements, pouvoir en parler avec d'autres et dans les termes de son propre système de représentation, etc., tout ceci dans le cadre familier de l'espace que l'on habite. Ce fait est-il un fait mathématique, un fait révélateur de compétences en mathématiques, ou, au contraire, un fait naturel, révélateur de compétences propres à telle ou telle espèce animale ? Faut-il dire par exemple de l'abeille, - à coup sûr capable de communiquer par sa danse dans quelle direction et à quelle distance se trouve une source nutritive -, qu'elle est géomètre ? Et si oui, faut-il assortir cette assertion d'un qualificatif (lequel permet d'éliminer tout anthropocentrisme sous-jacent, mais au prix d'une réduction importante du contenu de la thèse), en disant par exemple que l'abeille dispose d'une géométrie "animale", "pratique", "en acte" ?

Tout mathématicien utilise un langage (un jargon de spécialiste) dont la composition comporte une part irréductible de langue naturelle. Euclide écrivait en grec, Bourbaki écrit en français, et les auteurs du codex de Dresde écrivaient en une langue maya, probablement le chol et le yucatèque.

On ne peut déduire de ce fait ni que le français (le grec, le maya) est une langue mathématique, ni qu'un texte écrit en français traite de mathématiques, pas même lorsque ce texte utilise des notions ou renvoie à des questions dont les mathématiciens font leur quotidien. Dans ce dernier cas, il est habituel de dire que ces notions et ces questions sont **pré-** ou **proto-mathématiques**, et de les considérer comme des "pierres d'attente" de la pensée mathématique qui voudra bien s'en saisir, les soumettre aux traitements mathématiques et, par là, les transformer en notions et questions que l'on dira, sans abus de langage, mathématiques.

Le nombre grammatical et la pluralisation, par exemple, touchent incontestablement à la question du nombre des mathématiciens, mais sans parvenir à entrer dans la discipline, dans ses fondements ou dans ses développements ; et ceci, même en concédant que la réflexion sur l'usage du nombre dans les langues a pu, ici ou là, être à l'origine d'une question ou d'une recherche qui aboutira, entre les mains d'un mathématicien, à tel ou tel résultat mathématique. La réflexion sur le nombre grammatical et sur l'opération de pluralisation peut servir de propédeutique à l'étude des nombres du mathématicien, mais "mettre au pluriel un énoncé" n'est pas une activité mathématique.

L'Algèbre de Boole est une invention du mathématicien anglais du même nom, produite pour une part (qu'il resterait à déterminer avec précision) par un travail de réflexion de type logico-mathématique sur la langue, en l'occurrence la langue anglaise. Cette langue se trouve donc bien présente, en tant que fait historique, à l'origine de l'Algèbre de Boole. De là à en déduire que tout anglophone connaît l'Algèbre de Boole, "en acte" ou sous une forme "pratique"... L'argument laisserait rêveur. En tout cas, le sceptique demanderait un complément d'informations et, pour trancher ce cas, l'expérimentateur construirait un rasoir d'Occam.

Utilisée quotidiennement par les mathématiciens francophones, la numération parlée du français n'est sûrement pas une numération mathématique. Ses propriétés interdisent même d'envisager sérieusement de la faire entrer dans cette discipline, voire de la recommander comme propédeutique à l'étude des mathématiques.

Comment expliquer, par exemple, en classe de mathématiques, que la commutation/commutativité (aux sens linguistique et mathématique) des termes d'un composé conduit, pour le mathématicien, à des composés égaux et bien formés (10 + 7 = 7 + 10 ; 4 x 20 = 20 x 4), tandis qu'elle conduit, pour le locuteur, le plus souvent à des expressions mal formées (**dix-sept** donne ***sept-dix**) et parfois à la nécessité de substituer une opération à une autre (**vingt-quatre**, additif, donne par commutation **quatre-vingts**, multiplicatif) ?

Et que faire, en mathématiques, des règles grammaticales qui permettent de produire et de reconnaître les six expressions **quatre-vingts mille**, **quatre mille vingt**, **vingt-quatre mille**, **vingt mille quatre**, **mille quatre-vingts**, **mille vingt-quatre**, toutes aussi correctes et non ambiguës en français, qu'incommodes en mathématiques où elles introduiraient des conventions parfois ambiguës ((20 + 4) x 1000), (1000 + (4 x 20)), et parfois conformes à l'usage des parenthèses et de l'ordre de priorité des opérations : (1000 + 20 + 4), (4 x 20 x 1000), ((4 x 1000) + 20), ((20 x 1000) + 4) ?

Les exemples précédents montrent que le même référent (le nombre à exprimer) est traité très différemment par le locuteur, le linguiste et le mathématicien, même quand ils sont tous francophones. Mais la référence ne suffit pas à faire le sens ou la signification d'une notion, et elle n'engage ni les connotations ni les modes de conceptualisation. La numération parlée française appartient à une langue et à une culture que l'on peut dire étrangères à la langue et à la culture mathématiques, même françaises.

Dans ce dernier cas, celui où la langue des locuteurs a longuement cohabité avec la langue des mathématiciens, d'inévitables métissages se sont produits. Au point que les francophones, mathématiciens ou non, sont très probablement de véritables bilingues en ce qui concerne la numération des nombres entiers naturels : ils passent par exemple, - subitement, et sans avoir à réfléchir à la différence des processus qui conduisent par des voies différentes au même nombre -, de l'expression parlée **vingt-quatre mille** à l'écriture décimale **24000**, voire à l'écriture à peine plus technique $\mathbf{2^6 .3.5^3}$.

Cette familiarité fait perdre jusqu'à la conscience que le système de la numération décimale de position n'est même pas homomorphe au système de la numération parlée, et qu'en conséquence les expressions produites par l'un et l'autre systèmes sont à proprement parler "intraduisibles" ; le fait qu'elles renvoient au même référent ne peut rien y changer : les conceptualisations en langue et en mathématiques restent différentes, déclenchent des opérations différentes, utilisent des connaissances et des matériaux différents, servent à des fins différentes.

On retrouve ici une discussion qui oppose souvent anthropologues (ou autre spécialiste des terrains) et mathématiciens (ou autre spécialiste des théories) à propos de la nature, scientifique ou non, mathématique ou non, des connaissances et des savoirs que l'on observe dans les pratiques quotidiennes, celles de l'homme de la rue (ou des forêts), celles de l'artisan, celles du non-scolarisé. Une discussion sur la place de la diversité des faits et des comportements qui s'oppose à l'universalité des fondements et des principes, comme celle qui opère un clivage chez les linguistes à propos de la question du langage que manifeste la diversité des langues du monde : pour *homo linguisticus linguisticus*, la diversité des langues est une question fondamentale dont l'enjeu théorique et pratique est capital même si l'on ne sait pas si son étude conduit à un ou à des langages ; pour *homo linguisticus logicus*, une seule langue peut tenir lieu de représentant du langage et conduire à des modèles dont on postule qu'ils valent universellement.

Une pierre d'achoppement de ces discussions est sans doute la manière d'entendre la généralité et l'universalité. Mathématiciens et logiciens la définissent en termes de théorie pouvant s'appliquer à un large éventail de situations simplement concevables, de préférence détachées des contingences de ce monde et des lois de la psychologie. Ils se défient des cas particuliers, et s'empressent en s'emparant d'un problème, de le "déchromatiser", d'en extraire la "substantifique moelle", préférant rejeter un cas particulier que de modifier les axiomes ou les termes primitifs qui fondent la théorie lorsque ce cas particulier ne se laisse pas déduire.

De leur côté, les linguistes et anthropologues de terrain s'intéressent d'abord aux situations concrètes, aux usages attestés, bref à des cas où intervient nécessairement telle ou telle institution (notamment celle de la langue et celle de la culture) ; et c'est seulement dans un second mouvement qu'ils prennent en compte la généralité, se défiant des généralisations rapides, et cherchant systématiquement le cas particulier qui aiguillonne la recherche.

Il y a donc, sur le chantier de la science, deux manières de travailler, deux styles de chercheurs, l'un toujours à la recherche du contre-exemple qui ruine les imposantes constructions théoriques de l'autre ; le second toujours en quête de l'universel qu'il ne cesse de protéger en montrant que le divers, convenablement réduit, peut toujours s'en déduire. Bien plus, ces deux styles cohabitent en tout chercheur, et la science a besoin de l'un et de l'autre ; mais ce n'est pas une raison pour les croire confondus, et peut-être vaut-il mieux chercher à les distinguer en raison.

Dans ces conditions, il ne sera pas facile, dans le cadre de l'hypothèse d'un Dürer géomètre, de décider de son style de géométrie.

Dürer, homme de carrefour

Jeanne Peiffer nous a fait entendre que Dürer était un homme de carrefour, entre le Moyen-Age et la Renaissance, entre l'Allemagne et l'Italie, entre la géométrie déductive des Grecs, les savoir-faire du tailleur de pierre ou de l'architecte, et les connaissances, - naturelles et savantes, comme anciennes et à venir -, que désignent l'expression "géométrie projective".

Un homme qui se trouve à ces carrefours de l'histoire, peut-être par accident, peut-être comme acteur agissant ; mais qui est, existentiellement cette fois, un peintre et un graveur de génie, soucieux d'œuvrer à la pérennité de ces arts en réfléchissant sur leurs fondements et sur les conditions de leur enseignement.

Avec beaucoup de précautions et de nuances, Jeanne Peiffer propose la thèse que Dürer était géomètre, que sa géométrie n'était pas démonstrative mais constructive, et que Gaspard Monge codifiera ses méthodes de construction.

Jeanne Peiffer nous a convaincu que Dürer admirait la géométrie, et qu'il estimait qu'il fallait l'enseigner, notamment aux peintres, au point d'être fâché du fait que les érudits ont tenu les mathématiques cachées aux ouvriers :

> Comme ce savoir est très utile aux ouvriers, et comme par ailleurs il a été tenu caché et au grand secret par les érudits, je me propose de le mettre au grand jour et de l'enseigner (66).

Malgré cette disposition de père de famille ou de maître en gravure, Dürer ne sera jamais professeur de mathématiques (d'ailleurs ce métier n'existait pas à l'époque), et il ne formera que des peintres et des graveurs.

Pour établir la thèse d'un Dürer géomètre, Jeanne Peiffer montre, avec tout le soin nécessaire aux études historiques, que Dürer utilise des outils mathématiques (tant matériels, comme la règle et le compas, que mentaux, comme les algorithmes de tracé des courbes) pour construire ses figures. Jusqu'ici, l'argument est faible : pas plus que Dürer n'est concepteur ou fabriquant de crayon parce qu'il utilise cet instrument d'écriture, le fait qu'il utilise tel ou tel algorithme ne prouve ni n'infirme qu'il était géomètre.

Un autre argument faible est utilisé, à savoir que Dürer a eu accès aux meilleures bibliothèques de l'époque, et notamment aux ouvrages mathématiques tant des Anciens grecs, que des contemporains italiens :

> Il semble avoir eu accès à leurs bibliothèques, celle notamment de Regiomontanus, enrichie par l'astronome Bernhard Walther et dont il a même pu acquérir, en 1510, quelques exemplaires utiles aux peintres (62).

Mais il ne suffit pas de tenir un livre de mathématiques pour être mathématicien, et on peut se demander ce que Dürer a compris, et surtout ce qu'il a effectivement retiré de ses lectures, faites sous la contrainte, explicitement exprimée, de sélectionner les passages et les ouvrages "utiles au métier de peintre".

Jeanne Peiffer n'ignore ni la question ni un autre argument plus sérieux, celui de la connaissance des langues dans lesquelles étaient écrits les ouvrages mathématiques. Elle relève le fait que Dürer ne connaissait ni le grec ni le latin, langues de tous les ouvrages érudits. On commence à se demander sérieusement comment Dürer a bien pu profiter de ses lectures en géométrie. Jeanne Peiffer répond à cette interrogation :

> Pour remédier à son ignorance des langues latine et grecque, il avait recours au travail collectif en se faisant traduire en allemand certains passages d'Euclide et de Vitruve [à nouveau le problème du choix des passages retenus sous le critère de l'utilité au métier de peintre], et en consultant ses amis astronomes, architechtes et géomètres (Johanes Werner, Tschertte, Nikolaus Kratzer, etc.) (62).

Il y a, dans ce paragraphe, une accumulation de conditions nécessaires à la compréhension par un germanophone des ouvrages mathématiques écrits en grec et en latin. Aucune, cependant, ne peut être considérée, sans autres informations, comme une condition suffisante : un francophone d'aujourd'hui peut disposer d'une bonne traduction des *Eléments* d'Euclide, assortie ou non des commentaires d'un mathématicien, sans pour autant être sûr de se transformer en géomètre ; à preuve, les générations d'élèves des classes de mathématiques élémentaires des lycées français qui recevaient, dans les années cinquante, à raison de plusieurs heures hebdomadaires, et après six ans d'études secondaires, une bonne initiation à la pensée d'Euclide, sans parvenir, pour la majorité d'entre eux, à en comprendre la profonde originalité.

Si l'argument est fragile sans autres informations, quelle portée peut-on accorder à la conclusion que Jeanne Peiffer en tire :

> Et si Dürer était incapable de comprendre les textes classiques à la lettre, il a su s'en approprier le substrat mathématique...

tout en étant obligée de placer un quadruple bémol :

> ... il a su s'en approprier le substrat mathématique - à sa manière, en le modifiant, en le concrétisant et en le matérialisant. (62).

De fait, Dürer a réalisé un instrument de dessin de sa conception, le *vergleicher* "compasseur", lequel se présente comme un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit est divisé en trois parties égales. Mais, comme le dit Jeanne Peiffer, cet instrument reposait sur des principes faux.

D'autres exemples conduisent à penser que la démarche de Dürer consistait à repérer une figure géométrique, - l'image d'une spirale d'Archimède, par exemple -, à la scruter comme les peintres et les graveurs savent le faire, puis à l'analyser et à la (re-)conceptualiser, comme le ferait par exemple un professeur de dessin soucieux de fournir, à ses élèves les moins avancés, une technique permettant de reproduire cette forme à l'identique, et à ses élèves les plus avancés, une technique pour la déformer de manière à compenser les effets visuels qui font que l'on perçoit les choses de plus en plus petites à mesure que l'œil s'en éloigne.

Les vues du haut et de profil de la spirale enroulée sur un cylindre et sur un cône constituent, me semble-t-il, un exemple particulièrement révélateur : il prouve, en tout cas, le génie du peintre, tout autant que celui du professeur de peinture, et il atteste de l'étendue des connaissances de Dürer dans le domaine de la physiologie de la vision. Mais on ne voit pas en quoi ces représentations de la spirale confirmeraient (ou infirmeraient) la thèse d'un Dürer géomètre. On ne voit pas davantage comment un élève-dessinateur apprendrait la géométrie simplement en dessinant des spirales.

Que ces vues se fassent à la règle et au compas, ne prouve ni qu'elles mettent en œuvre la géométrie d'Euclide, ni que Dürer était géomètre, ni que ses élèves apprenaient la géométrie. Et de même du fait que Dürer croyait que la géométrie peut être utile au peintre, à l'artisan, à l'ouvrier, à l'architecte...

Jeanne Peiffer ne se contente pas de quelques exemples comme celui des vues de la spirale. Elle montre que Dürer avait vraiment projeté d'écrire des traités pour l'enseignement des apprentis peintres et graveurs. La thèse d'un Dürer géomètre est donc ici clairement à entendre comme celle d'un enseignant ou d'un utilisateur des mathématiques, et non pas comme celle d'un géomètre qui travaille, sur ce qu'on appelle le front de la recherche, à faire progresser les connaissances géométriques. Quoi qu'il en soit, Dürer avait projeté de rédiger une "Nourriture des jeunes peintres" :

> une vaste encyclopédie en trois parties : une première sur le choix d'un apprenti et de ses dispositions, une autre sur l'exercice de la peinture (théorie des proportions, mesure de l'homme, du cheval et du bâtiment, la perspective, le tracé des ombres, la théorie des couleurs) et une dernière, plus pratique, sur le métier de peintre (64).

Comme le dit Jeanne Peiffer, il est incontestable que Dürer a vraiment souffert de la perte des ouvrages écrits par les Grecs (comme nous souffrons de la perte des codex qu'un Diego de Landa a pu se vanter d'avoir fait brûler au nom de la lutte contre Satan), et qu'il a senti le besoin d'écrire une géométrie. Pourtant, cela ne prouve pas qu'il en a eu effectivement les moyens, et si c'était le cas, on devrait encore se demander jusqu'où il a bien pu entrer dans la culture des géomètres.

Nous devons par conséquent en venir aux œuvres mêmes de Dürer, celles que l'histoire a conservées, et nous demander en quoi elles manifestent les compétences géométriques de Dürer.

Une géométrie ? Et si oui, de quelle variété ?

Après avoir noté que le projet d'écriture de Dürer était trop encyclopédique pour pouvoir aboutir, Jeanne Peiffer dit, au détour d'une phrase, que Dürer a rédigé, entre autres, un manuel de géométrie, sorte de "couronnement" de son travail théorique :

> Ce projet, trop vaste pour aboutir, a débouché, entre 1525 et 1528, sur la publication de trois ouvrages, rédigés en allemand, <u>dont un manuel de géométrie</u>, intitulé *Instructions pour la mesure à la règle et au compas* (1525), un traité sur les fortifications (1527) et le fameux *Quatre livres sur les proportions du corps humain* (1528), qui devaient être le couronnement de son œuvre théorique [c'est moi, AC, qui souligne] (64).

L'affirmation, il est vrai, est tempérée par le titre de la section suivante qui précise qu'il s'agit d'une géométrie *pratique*. Ce qualificatif place d'emblée l'ouvrage de Dürer hors du champ de la géométrie d'Euclide ou de ses continuateurs, les géomètres de la Renaissance italienne. La géométrie de Dürer pourrait être pratique en plusieurs sens, soit parce qu'elle serait, vis à vis de celle des géomètres, dans un rapport d'une science à ses applications, comme lorsque nous parlons de mathématiques appliquées en référence à l'opposition mathématiques pures /vs/ mathématiques appliquées, soit à l'inverse, parce qu'elle serait dans le rapport d'une pratique pré-scientifique à la science que cette pratique appelle et suscite à naître.

Le qualificatif n'est utilisé dans aucun de ces deux sens, mais dans un troisième que révèle le glissement, chez Jeanne Peiffer, de *constructif* à *pratique* :

> Sa géométrie n'est pas démonstrative [en d'autres termes, ce n'est pas de la géométrie de géomètres] mais constructive. Le but de Dürer est de construire des formes [au sens de gabarits, en papier fort ou en bois, utilisés par de nombreux corps de métier, à la manière des patrons des couturières] utiles aux artisans, par des procédés faciles à exécuter à l'aide des instruments couramment utilisés, la règle et le compas notamment [allusion à une contrainte artificielle qui a longtemps pesé sur le développement de la géométrie déductive], et aisément répétables [allusion qui ne renvoie pas à une théorie de la récursivité, mais au fait que les courbes peuvent être dessinées point par point, en répétant un unique algorithme]. Il n'y a aucun calcul d'aire ou de volume, si caractéristique des géométries pratiques de l'époque [allusion aux livres d'arpentage et de mesure des champs, rédigés en langues vernaculaires, mais pas aux traités d'Euclide ou d'Archimède, lesquels ne manquent pas de calcul de quadrature et autre cubature]. (64).

C'est d'ailleurs en ce sens, faut-il dire utilitaire, que Dürer lui-même aurait sans doute revendiqué le qualificatif pratique :

> Dürer insiste de manière répétitive et redondante sur l'utilité de ses constructions. Presque tous les paragraphes se terminent, comme une chanson par un refrain, par l'accent mis sur l'aspect pratique. Ainsi, diverses constructions de spirales sont enseignées, puisqu'elles peuvent servir à dessiner des crosses d'évêques, des chapiteaux de colonnes ioniques ou des feuillages dans l'architecture gothique. Ou encore, Dürer indique la construction originale d'une courbe, inconnue par ailleurs, dite utile aux architectes et qui lui sert, d'après des dessins conservés à Dresde, à obtenir le galbe des tours Renaissance. (66).

Admettons que l'ouvrage rédigé par Dürer soit une géométrie, en précisant qu'il s'agit d'une géométrie pratique, dans le sens que vient de rappeler Jeanne Peiffer : permettre de dessiner des crosses d'évêque qui ressemblent à des crosses d'évêque. Observons les productions de cette pensée géométrique :

> Dürer obtient ses résultats les plus originaux lorsqu'il applique des procédures d'atelier à des objets mathématiques abstraits. Ainsi, en appliquant la méthode de la double projection, familière aux maçons, tailleurs de pierre et architectes, aux sections coniques, il en obtient une construction très originale, dont Gaspard Monge codifiera la méthode, à la fin du XVIII^{e} siècle, dans sa géométrie descriptive. (64-65).

Deux glissements sémantiques semblent bien s'être introduits dans l'argumentation. Le premier concerne les entités dont il est question, et le second les procédures dont il est dit que Dürer faisait usage. Une certaine entité est, dans un premier sens, l'objet mathématique abstrait qui tombe sous la définition "section conique", et dans un second sens, des formes visuelles bien concrètes, comme celle qui est communément appelée "ellipse", "courbe en œuf", ou toute autre expression. Un certain processus d'abord nommé "procédures d'atelier", est ici appelé "méthode de la double projection".

S'il n'est pas douteux qu'une règle trace des droites, et qu'un compas dessine des circonférences, on peut mettre en doute l'opinion que ces instruments produisent des objets mathématiques abstraits ; et si l'on peut dire que le compas est un instrument mathématique, il est prudent de se rappeler que ce qualificatif ne s'applique que par métaphore à l'instrument, à la main qui le tient, et au cerveau qui en dirige le mouvement. Dessiner une circonférence n'est pas une activité mathématique, et cela n'implique pas de disposer d'une conception mathématique de cet objet. Même entre les mains d'un mathématicien professionnel d'aujourd'hui, le compas n'est qu'un instrument de dessin.

Il en va autrement des outils (cette fois, c'est le mot outil qui est pris par métaphore) de prédication et de communication, la langue maternelle, par exemple. Celle-ci, en effet, prend nécessairement dans la bouche du mathématicien un accent particulier : la langue naturelle se "jargonise", se transforme, s'adapte à cet usage, bref elle se mathématise, tout comme s'anglicise le français des informaticiens.

Les techniques de dessin des courbes et des volumes sont des méthodes, plus ou moins techniques, de représentation graphique. Le mathématicien peut s'en servir à son propre bénéfice, tout comme il utilise une langue naturelle ou un système typographique ; mais ce n'est pas parce que le mathématicien utilise le code orthographique que ce dernier devient un objet mathématique, ou un instrument pour représenter les objets de cette discipline. Inversement, quiconque peut utiliser l'écriture mathématique, et apprendre, par exemple, que le nombre "un" peut s'écrire $\mathbf{-e^{ip}}$, ou encore $\mathbf{\cos^2 x + \sin^2 x}$, sans avoir rien appris en trigonométrie ou sur les nombres transcendants, et sans être entré de quelque façon que ce soit dans la culture mathématique.

Le fait que Monge développera une géométrie déductive et démonstrative, sa Géométrie descriptive, deux siècles plus tard, confirme un autre fait, à savoir qu'à l'époque de Dürer les projections n'étaient encore que des techniques pour représenter sur un support plan les vues d'un objet tridimensionnel, mais certainement pas des techniques de démonstration et de résolution de problèmes mathématiques.

Que ces techniques soient complexes et sophistiquées, cela ne fait aucun doute. Qu'elles donnent matière à penser aux mathématiciens, cela non plus n'est pas douteux : la compréhension des phénomènes naturels, des arts (notamment, musique et poésie), des techniques, des jeux... ont toujours été une source de questions, de problèmes, et d'inspiration pour tous les mathématiciens, ceux d'hier comme ceux d'aujourd'hui. Mais si les mathématiciens puisent à cette source, cela ne prouve pas que cette eau était mathématique, tant que l'action du mathématicien ne l'a pas, en quelque sorte, mathématisée.

Dans un autre domaine, la vision de l'arc-en-ciel provoque en tout homme des questions et des réponses, et déclenche des comportements fort divers. Le peintre peut chercher à reproduire la palette de ses couleurs, le chaman peut l'intégrer à la cosmologie de son peuple, le poète peut le célébrer, le physicien tenter de l'analyser et de reproduire expérimentalement la chaîne des événements qui provoquent, non pas son image ou son simulacre, mais le phénomène arc-en-ciel lui-même. Le chaman qui explique que l'arc-en-ciel est une manifestation d'Amanatachi, dont une autre figure est le boa constricteur et une autre encore le serpent coral, ne fait pas œuvre de biologiste. Le physicien qui explique le phénomène dans les termes de l'optique géométrique ne fait œuvre ni de géométrie ni de météorologie.

Pourquoi faudrait-il accepter qu'en expliquant comment tracer point par point une spirale, utile pour dessiner des crosses d'évêque, Dürer faisait œuvre de géomètre ? Que penser des résultats obtenus par Dürer ?

"Modernité" de Dürer

Que peut-on déduire de l'observation des résultats obtenus par Dürer ? C'est d'abord aux historiens qu'il appartient de nous l'enseigner, mais il revient à chacun d'interpréter ces résultats, à la seule lumière possible, celle de ses propres expérience et culture. La conférence de Jeanne Peiffer ne me permet de poser que des interrogations d'épistémologue, et de donner mon opinion, une opinion parmi d'autres.

L'épistémologue reconnaîtra volontiers que Dürer était un incomparable graveur, un homme ouvert aux nouveautés de son temps : l'imprimerie, la reconnaissance des langues nationales, la Renaissance des sciences, la découverte de la géométrie démonstrative que les géomètres n'hésitaient plus à critiquer, s'efforçant même de la dépasser. Dürer ne comprenait probablement pas plus ces innovations géométriques, que je ne comprends moi-même les techniques biologiques qui permirent le clonage de la brebis Doly.

Mais point n'est besoin d'être géomètre pour comprendre les enjeux du développement et de la diffusion sociale de cette discipline, et encore moins pour s'engager résolument pour participer au contrôle social desdits enjeux. L'exposé de Jeanne Peiffer démontre que Dürer avait compris ces enjeux, et qu'il s'est engagé résolument pour le développement de la géométrie. Sur les fronts les plus sensibles et les plus modernes, celui de la formation des jeunes, et celui de la diffusion à tous les membres de la cité, - ouvriers, artisans, artistes, architectes -, du "trésor" de la science. Homme de la Renaissance, il avait compris plusieurs idées que les didacticiens (re-)découvrent, notamment le fait que les connaissances ne prennent naissances que si elles sont dites, non pas dans le grec et le latin des érudits, mais dans la langue des élèves, que si elles tombent sur le terreau des représentations familières de l'apprenant, et qu'elles ne peuvent être durablement acquises que si elles s'articulent à des pratiques utiles. Cette modernité de Dürer suffit bien à compléter son immense stature en tant que peintre et graveur. Et il semble vain de vouloir le grandir artificiellement en lui attribuant une qualité qu'il ne possédait probablement pas, la qualité de géomètre.

Jeanne Peiffer ne semble pas partager cette opinion, bien qu'elle ait eu l'idée que certains pourraient être en désaccord avec elle. Elle devait prévenir l'objection. Comment argumente-t-elle ?

Après avoir concédé que la géométrie de Dürer n'est pas démonstrative, et qu'elle ne contient aucun calcul d'aire ou de volume, ni au sens des manuels pratiques, ni à celui des ouvrages savants, Jeanne Peiffer rapporte les résultats de Dürer relatifs à un problème mathématique classique, celui de la duplication du cube. Mais même dans ce cadre, où Dürer s'attaque à une vraie question de mathématique, Jeanne Peiffer prend des précautions rhétoriques qui réduisent considérablement la contribution de Dürer à la science des géomètres :

> L'apport propre de Dürer [...] consiste dans les applications qu'il propose (et encore, ne fait-il qu'exploiter une remarque d'Eratosthène rapportée par Eutocius). (66)

> ... cet exemple illustre l'aisance avec laquelle Dürer sait plier un problème classique comme la duplication du cube aux besoins de l'armurerie et de la production en série d'un armement standardisé. (68).

Soit, mais qu'a produit effectivement Dürer en cette affaire de duplication du cube ?

a) Il a répété un récit :

> Dürer est conscient de l'ancienneté du problème qui plonge ses racines dans la légende puisque c'est à la demande d'Apollon et pour sauver la cité de la peste que les Athéniens sont dits avoir voulu doubler l'autel cubique. Il répète ce récit, en rendant hommage à Platon pour avoir su indiquer la bonne solution... (66).

b) Dürer a publié les solutions anciennes :

> Il donne trois solutions du problème, celles connues dans la littérature classique sous les noms de Sporus, Platon et Héron... (66).

c) Dürer a publié une démonstration connue :

> ... et pour cette dernière il indique même une démonstration. C'est la seule que l'on trouve dans les *Instructions pour la mesure à la règle et au compas*. (66).

d) Il a affirmé que dupliquer le cube est une connaissance utile, et donné quelques exemples de cette utilité :

> On pourra faire fondre des bombardes et des cloches, les faire doubler de volume et les agrandir comme on veut, tout en conservant les justes proportions et leurs poids. (66).

Gaspard Monge, comte de Péluse

Monge (1746-1818) est le fils d'un marchand forain, il étudie chez les oratoriens, puis entre à 22 ans à l'Ecole du génie militaire de Mézières où ses talents se révèlent. Quatre ans plus tard, il obtient la chaire de mathématiques, puis, en 1771, celle de physique. En 1780, il enseigne l'hydrodynamique à Paris (Louvre), et entre à l'Académie des sciences ; en 1783, il succède à Bézout en tant qu'examinateur de la Marine. Partisan de la Révolution, il sera Ministre de la Marine en 1793. Il prend une part importante dans la création de l'Ecole Normale où il enseigne la géométrie descriptive, et fonde peu après l'Ecole Polytechnique où il enseigne la théorie des surfaces.

Chargé de mission en Italie, il se lie avec Bonaparte et participe au recrutement des savants de l'Expédition d'Egypte de 1798. Il explore et fouille notamment les ruines de Péluse, et sera nommé président de l'Institut d'Egypte. De retour en France, il reprendra ses cours à l'Ecole Polytechnique.

L'œuvre mathématique de Monge est considérable. Son influence est plus liée à son enseignement oral qu'à ses ouvrages écrits, et il n'est pas exagéré de dire que tous les mathématiciens du XIX^{e} siècle ont été ses élèves. Il créa la géométrie descriptive dont il eut l'idée (dès 1768) en résolvant des problèmes de constructions par une application scientifique des principes du dessin d'architecture. Il expliquera, dans son traité de 1800, que cette nouvelle science est une source de méthodes pour la géométrie pure, et que ces méthodes restent valides même dans le cas où certains éléments géométriques deviennent imaginaires, et bien sûr aussi qu'elles ont de nombreuses applications à l'art de l'ingénieur ou de l'architecte. Sur ce point, Monge parlait en connaissance de cause, puisqu'il avait occupé la chaire de physique, et surtout organisé les poudreries et les fonderies de canons. On lui doit aussi d'importants apports en géométrie analytique en dimension trois.

Une idée force de Monge revient à affirmer qu'il y a une correspondance étroite entre les opérations de l'analyse et celles de la géométrie (au sens mathématique) : les mouvements dans l'espace doivent se traduire en équation, et toute opération analytique doit se représenter par un déplacement géométrique ; de même, une propriété algébrique définit une famille de surfaces, et des surfaces ayant une propriété commune doivent satisfaire à une équation aux dérivées partielles. Monge montrera, par exemple, que des équations aux différentielles totales ne satisfaisant pas à la condition d'intégralité ne sont pas dénuées de sens, comme on le croyait alors, mais qu'elles ont une signification géométrique qu'il précise.

Le lecteur aura compris que Dürer peut difficilement être considéré comme un précurseur de Monge. Les procédés de construction des courbes, des surfaces et des volumes sont pour le premier des méthodes permettant à la main de représenter ce que l'œil voit. Pour le second, en revanche, il s'agit de faire progresser la géométrie pure, de lui apporter de nouvelles méthodes, notamment lorsqu'elle considère les entités imaginaires qui ont commencé à envahir le paysage mathématique avec les travaux italiens de Bombelli sur la résolution des équations du troisième degré.

Il me semble en tout cas exagéré de dire que Monge aurait codifié la méthode de la double projection que Dürer avait emprunté aux maçons, tailleurs de pierre et architectes, en particulier parce qu'il est beaucoup plus raisonnable d'admettre que si Monge s'est inspiré de ces méthodes, il les a puisé, bien plus probablement, chez les architectes et les ingénieurs de son temps, les hommes qui publieront la *Description de l'Egypte*, dont les planches montrent la maturité et la richesse des techniques de représentation graphique plus de trois siècles après Dürer.

Géomètre ou artiste ?

S'il y a une part mathématique dans les écrits de Dürer, ce n'est pas de la géométrie démonstrative, et cela ne retire rien au génie du graveur, d'autant que maintenir la figure d'un Dürer géomètre conduit à des conclusions pour le moins paradoxales, tandis que le maintien de la figure incontestée de l'artiste graveur conduit à une vérité plus profonde. C'est en tout cas une opinion que l'on peut retirer de l'exposé de Jeanne Peiffer :

> Paradoxalement, alors [...] qu'il se propose [...] d'appliquer les lois mathématiques à la peinture, il ne saisit pas toujours lui-même l'occasion de le faire.
>
> Mais au lieu de recourir [...] à la construction euclidienne [...] il prône l'usage d'un instrument de sa confection [...] qui repose sur des principes faux et ne peut donner de résultats corrects. (68).
>
> Dürer admet que pour une sécante fh quelconque fg : gi = gi : ih. Or, dans une projection, le birrapport se conserve [...] on a donc gf : gi = 1/3 (hf : ih). (note 8, p. 70).

Mais abandonner l'idée de la nécessité d'être géomètre fait s'évanouir le paradoxe précédent, et conduit à une vérité plus profonde. La vérité d'un Dürer artiste de génie dont la main finalement est dispensée de toujours devoir tout mesurer ; l'usage de la géométrie n'est, au mieux, qu'une propédeutique pour le jeune apprenti, celui qui ne sait pas encore reproduire les proportions esthétiques :

> Cette attitude, pour troublante qu'elle puisse paraître, est en fin de compte conforme à sa conception de la géométrie, telle qu'elle s'exprime dans [...] l'«Excursus esthétique» du livre 3 [...] et dans a mystérieuse gravure Melancolia I. [...] L'art de la mesure est une espèce de propédeutique pour le peintre. Il dote l'œil d'un juste sens des proportions et exerce la main, dispensant l'artiste de toujours tout mesurer. (70).

Les justes proportions, porteuses de beauté esthétique, finalement, le peintre les recrée intuitivement, sans même chercher à appliquer les strictes règles de la mesure. Bref, sans avoir à en passer nécessairement par les rigueurs mathématiques ; et la géométrie n'est pas plus une propédeutique aux métiers de l'art, que l'art n'est une propédeutique aux métiers de la géométrie.

L'arithmétique et la géométrie fournissent au mieux des techniques utiles pour certains apprentis peintres et graveurs, et encore sous la condition qu'ils apprennent à s'en défaire. Ainsi, quand ils seront devenus maîtres, c'est à main levée, intuitivement, qu'ils créeront les proportions et les formes de la nature ou du corps humain.

En guise de conclusion

L'étude d'un objet éloigné (dans l'espace géographique, historique, ou cognitif) pose toujours un difficile problème de frontière à construire entre le proche et le lointain, le familier et l'étrange.

L'historien (mais aussi l'anthropologue ou l'ethnolinguiste) se propose de reconstruire pas à pas les catégories, taxinomies et autres classifications d'un âge disparu (ou d'une autre forme de culture) et dont il n'a pas l'intime connaissance. On peut craindre que l'analyse soit restreinte aux seules catégories clairement exprimées par tel ou tel document, mais qu'elle laisse échapper tout le non-dit d'une époque, les prémisses tacites, les catégories cachées... Et à supposer qu'il y parvienne, encore faut-il qu'il transmette ses résultats à ceux qui n'ont pas participé à la recherche ; il est ainsi conduit à tenir compte des conditions de la communication, c'est-à-dire présenter les résultats dans le cadre des catégories de ses lecteurs d'aujourd'hui.

Le théoricien commencera au contraire son enquête en cherchant à remplir des catégories supposées universelles, en tout cas données a priori et non questionnées, c'est-à-dire celles qui lui sont le plus familières, et par conséquent celles qui sont peut-être les plus étrangères à sont objet d'étude.

Dans les deux cas, la recherche proprement dite revient à démonter et remonter les deux types de catégories, celles de l'objet étrange et celle de la vision familière, tenter d'en inventer de nouvelles, en espérant qu'elles puissent englober localement les deux types, et recommencer l'expérience jusqu'à la découverte d'un optimum où faire passer la frontière. A ceci près que le jeu se joue à plusieurs, et que chacun découvre un optimum différent.

Il s'agit ainsi d'une activité de recherche de signification, un peu comme la recherche du sens d'un texte qu'il s'agit de traduire d'une langue dans une autre, et de la recherche des moyens de faire, parler pour d'autres locuteurs, la traduction produite. C'est donc aussi une activité de réflexion, de prise de distance par variation des points de vue, de construction métasituationnelle. Une activité sociale toujours à recommencer.

C'est pourquoi, cette réaction à l'exposé de Jeanne Peiffer n'a jusqu'ici guère de sens, et qu'elle ne peut en prendre qu'à trouver d'autres frontières.