XXIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística

Sede:

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

MEMORIAS

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
Educadora de educadores

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Inocencio Bahamón
Rector

María Elvira Rodríguez
Vicerrectora Académica

Luz Marlén Durán
Decana Facultad de Ciencias y Educación

Pedro Javier Rojas G.
Coordinador
Especialización en Educación Matemática

Primera Edición
Bogotá, Colombia. Año 2011

ISBN: **978-958-57050-0-5**

Pedro Javier Rojas G.
Compilador y Director de la publicación

Edición electrónica
Grupo Editorial Gaia
gaiaeditorial@gmail.com
Tel. 217 03 52
Bogotá, Colombia

Pedro Enrique Espitia
Diseñador

AUTORES

CONFERENCIAS
Arnold Oostra
Bruno D'Amore
Carlos Antonio Julio-Arrieta
David Blázquez Sanz
Ferley Ortiz Morales
Joaquín Luna Torres
Jorge Alejandro Ruiz Vega
José Fernando Isaza
José Luis Ramírez Ramírez
Luis Alejandro Másmela Caita
Luis Carlos Arboleda
Lyda Constanza Mora Mendieta
María Falk de Losada
Petr Zhevandrov
Rafael Felipe Chaves Escobar
Samuel Barreto Melo
Vicente Erdulfo Ortega Patiño
Yeny Magaly Borda Pinzón

CURSOS
Carlos Julio Luque Arias
Carlos Orlando Ochoa C.
Clara Helena Sánchez Botero
Eliécer Aldana Bermúdez
Juan Carlos Ávila Mahecha
Leonor Camargo
Carmen Samper
Lucía Zapata
Patricia Perry
Óscar Molina

MESAS DE TRABAJO
Edgar Alberto Guacaneme S.
Eliécer Aldana Bermúdez
Gloria Inés Neira Sanabria
Jorge Orlando Lurduy Ortegón
Olga Lucía León

COMUNICACIONES BREVES
Alberto Forero
Andrés Fernando Jaramillo Mejía
Angela Patricia Franco
Angela Patricia Valencia
Aseneth Gutiérrez Rodríguez
Boris Mauricio Pulido Piraquive
Camilo Arévalo
Cristian Camilo Espitia Morillo
Cristian Camilo Fuentes Leal
Daniel Cifuentes
Daniel Mauricio Cifuentes León
Danny Jovel Escobar
Deicy Villalba R.
Derwis Rivas
Diana Carolina Sierra Caro
Diego Orlando López Ruiz
Dolly Carolina Mora
Duberney Urquina Arce
Eddy Johanna Fajardo
Eduardo Martínez
Edwin Javier Castillo
Erika Ariza
Erika Katherine Ariza Suarez
Euclides Díaz Arcos
Fabián Rojas
Fredy Ávila Sánchez
Gabriel Córdoba Suárez
Giampaolo Orlandoni
Harold Vacca
Héctor Mauricio Becerra G.
Hellen Carolina Carranza
Hernán Díaz Rojas
Jaime Alfredo Burgos Díaz
Javier Sebastián Cortes
Jeisson Freddy Márquez Garzón
Jhon Bello
Jhon Freddy Moreno Trujillo
Jorge Andrés Coy Chacón
José Manuel Higuera
Juan Pablo Mojica Macias
Leidy Natalia León Carvajal
Leonardo Pantano Mogollón
Lindesney Vargas Figueroa
Liseth Arévalo
Liz Pieranllely Acero
Luisa Fernanda Moreno
Luz Divia Rico Suarez
María Sildana Castillo
Michael Jamid Aldana Boada
Milton Rodríguez Santos
Mónica Andrea Díaz
Nohora del Carmen Bastidas
Ortiz Rojas Leidy Ximena
Oscar González
Paola Fresneda Patiño
Pedro Fernando Fernández
Rodolfo Vergel Causado
Rossmajer Guataquira López
Wilmar Diaz
Yeimy Rodríguez García
Yenny Carolina Novoa Parra
Yenny Gaviria
Yenny Marcela Bejarano Prieto
Yuri Pachón

XXIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística

Sede:

Universidad Distrital
Francisco José de Caldas

Presentación

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
Educadora de educadores

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Presentación

La idea de realizar un evento académico que posibilitara el diálogo entre diferentes grupos de la comunidad matemática de la ciudad de Bogotá, de los diferentes niveles de educación, fue propuesta hace veintisiete años por el profesor *Jesús Hernando Pérez Alcázar* al Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia. El profesor Jesús Hernando, conjuntamente con las profesoras Myriam Campos y María Victoria Gutiérrez, coordinaron la organización del primer *Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística*, realizado en el año 1984 en la Universidad Nacional de Colombia, con la colaboración de profesores de los Departamentos de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional y de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Como objetivo fundamental de este Coloquio se propuso crear y mantener un espacio de encuentro e interacción entre profesores de matemáticas, matemáticos, formadores de matemáticos e investigadores en torno a temáticas de actualidad e interés para la comunidad académica, además de ofrecer un espacio para la formación continuada, en las áreas de Matemáticas, Estadística y Educación Matemática, para estudiantes universitarios y docentes en ejercicio de los diferentes niveles de educación –Básica, Media y Superior.

Este espacio se ha mantenido desde hace 27 años, gracias al trabajo conjunto que realizan profesores de las Universidades Nacional de Colombia, Pedagógica Nacional y Distrital Francisco José de Caldas, quienes año tras año se comprometen con la organización y el desarrollo de este importante evento académico. En este proceso, el Coloquio se ha configurado en una propuesta académica que integra la reflexión disciplinar, didáctica e investigativa y convoca la discusión de resultados de investigaciones y de experiencias en las áreas de Matemáticas, Estadística y Educación Matemática. Como espacio de debate académico, las actividades del Coloquio impactan tanto la formación de estudiantes de pregrado y posgrado como la actualización de docentes en ejercicio. En la actualidad, este Coloquio congrega a estudiantes de matemáticas, matemáticos, estadísticos, estudiantes para profesor y docentes de matemáticas de educación básica, media y superior no sólo del Distrito Capital sino también de diversas regiones de nuestro país.

En tal sentido, la idea del profesor *Jesús Hernando Pérez Alcázar*, profesor emérito de la Universidad Nacional de Colombia y reconocido maestro de muchas generaciones de licenciados en matemáticas y matemáticos del país durante más de 45 años, de crear y mantener el Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística como un espacio de interacción de la comunidad académica, propiciando un encuentro de saberes, se ha materializado durante más de un cuarto de siglo.

Este año, en su versión XXIV, la sede del *Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística* correspondió a la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, de manera específica a la Facultad de Ciencias y Educación y a los proyectos curriculares: Matemáticas, Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas, Especialización en Educación Matemática y Doctorado Interinstitucional en Educación –énfasis en Educación Matemática, adscritos a ella, que conjuntamente con el equipo de la Vicerrectoría Académica y el equipo de la Oficina de Bienestar Institucional, realizaron el apoyo logístico requerido para el éxito de este evento.

El Coloquio se realizó entre el 8 y 10 de Septiembre de 2011, en la Ciudad de Bogotá, y tuvo como tema central: *Retos en la Formación Matemática y Estadística.* En el marco de este evento se desarrollaron las siguientes actividades académicas: Conferencias plenarias, Cursos cortos, Mesas de Trabajo, Conferencias simultáneas y Comunicaciones Breves.

La conferencia inaugural *"Retos Matemáticos: Una agenda para investigación y acción",* estuvo a cargo de la doctora *María Falk de Losada*, investigadora de la Universidad Antonio Nariño. Como conferencistas invitados participaron los doctores *Bruno D´Amore*, profesor del Doctorado en Educación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas; *José Fernando Isaza*, Rector de la Universidad Jorge Tadeo Lozano; *Arnold Oostra*, Profesor de la Universidad del Tolima y *Luis Carlos Arboleda,* Profesor de la Universidad del Valle.

Se desarrollaron tres Mesas de Trabajo: una Mesa Redonda y dos Mesas Temáticas. La Mesa Redonda *"Desafíos en la Formación Matemática"* estuvo integrada por los profesores *Olga Lucía León Corredor*, de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Coordinadora de la Mesa; *Carlos Montenegro*, Presidente de la Sociedad Colombiana de Matemáticas, SCM; *Gloria García*, Presidenta de la Asociación Colombiana de Matemática Educativa, ASOCOLME; y *Clara Helena Sánchez*, profesora de la Universidad Nacional de Colombia. Las Mesas Temáticas estuvieron coordinadas por los profesores *Gloria Neira*, de la Universidad Distrital, *Eliécer Aldana* de la Universidad del Quindío, *Edgar Guacaneme* de la Universidad Pedagógica y *Orlando Lurduy* de la Universidad Distrital. Los cursos cortos estuvieron a cargo de los profesores *Lucía Zapata* de la Universidad de Antioquia; *Eliécer Aldana*, de la Universidad del Quindío; *Carlos Luque* y *Leonor Camargo*, de la Universidad Pedagógica Nacional; *Clara Helena Sánchez*, de la Universidad Nacional de Colombia, y *Carlos Ochoa* de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

En estas memorias se encuentran los resúmenes de las actividades académicas desarrolladas durante este Coloquio, las cuales constituyen una evidencia de la participación plural de profesores e investigadores de diferentes instituciones educativas, nacionales y extranjeras, y diversas áreas de conocimiento: cuatro conferencias plenarias, seis cursos, tres mesas de trabajo –una mesa redonda y dos mesas temáticas, catorce conferencias no plenarias y treinta y tres Comunicaciones Breves.

En nombre de todos los participantes, agradezco a los miembros del Comité Organizador, profesores *Mauricio Bautista* y *Alberto Donado,* de la Universidad Pedagógica Nacional, *Carlos Ochoa, Diana Gil, Jorge Rodríguez, Jhon Bello* y *Julio Romero* de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, *Clara Helena Sánchez* y *Luis Fernando Grajales* de la Universidad Nacional de Colombia, al equipo de evaluadores de las tres universidades públicas de Bogotá, así como a todos los profesores y estudiantes ponentes en este Coloquio, que con su trabajo y dedicación hicieron posible el éxito del Coloquio. Un agradecimiento especial al Sr. Rector, Dr. *Inocencio Bahamón*, a la Vicerrectora Académica, Dra. *María Elvira Rodríguez*, y al Director de Bienestar Institucional, Dr. *Jorge Federico Ramírez*, quienes como directivos de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas contribuyeron a que este evento se hiciera realidad. Pero sobre todo, un agradeciendo al profesor *Jesús Hernando Pérez Alcázar*, de todos los que durante más de un cuarto de siglo hemos podido participar en este encuentro de saberes, gracias por ofrecernos este espacio de encuentro, gracias *¡maestro de maestros!*

Pedro Javier Rojas Garzón
Presidente Comité Organizador
XXIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

Retos en la formación Matemática y Estadística

XXIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística

Menú

Ir al inicio

XXIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística

Sede:
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Conferencias

Índice de Conferencias

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
Educadora de educadores

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Menú inicio

Índice de Conferencias

Menú inicio

Retos matemáticos: una agenda para investigación y acción

María Falk de Losada
Universidad Antonio Nariño, mariadelosada@gmail.com

Resumen. Se retoma la temática del Coloquio "desafíos en la formación matemática" para plantear la necesidad de diseñar y desarrollar un currículo de matemáticas mucho más retador para todos los estudiantes con base en cuatro razones que lo fundamentan. Se plantean temas y áreas de investigación y desarrollo para contribuir a la propuesta, se soporta con experiencia y estudio, y se ilustra con ejemplos.

Palabras clave: Agenda, matemáticas retadoras, currículo, pensamiento matemático, solución de problemas,

1. Introducción

La temática de este Coloquio Distrital de Matemáticas gira en torno a "*desafíos en la formación matemática*". Esta expresión es genial por las múltiples interpretaciones que se le puede atribuir. En esta charla inaugural, vamos a dirigirnos hacia una posible significación de mucha actualidad, urgencia y profundidad.

Proponemos diseñar y desarrollar un currículo matemático mucho más retador para todos los estudiantes, lo cual nos lleva a analizar nuestra ciencia y nuestra práctica de manera profunda, dejando en lo posible nuestros prejuicios atrás o al lado. Éste es el ejercicio que cada uno debe procurar hacer en el transcurso del Coloquio.

Queremos hablar, entonces, de una línea prioritaria de investigación y desarrollo que proponemos para enmarcar nuestras acciones futuras, ésta es, el diseño, planeación, organización y realización de investigación relacionada con los diferentes aspectos que se buscan promover con una experiencia más retadora en la matemática escolar. Uno de ellos es la naturaleza del pensamiento matemático y la identificación de cómo se puede hacer que la experiencia de la clase de matemáticas se dedique más al desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes de modo que para el estudiante sea tanto personalmente apropiado como divertido, y que permita a los estudiantes dejar todas las opciones abiertas cuando toman decisiones en la vida, desde la profesión a seguir, hasta las finanzas personales, hasta el ejercicio de los derechos del ciudadano.

Con respecto a esta línea que involucra el desarrollo en todos los estudiantes de la capacidad de pensar matemáticamente. Cuando estuvo debatiendo temas para nuevos estudios hace algunos años, ICMI – que puede pensarse como el organismo que lidera las temáticas de la disciplina de educación matemática en el mundo - no adoptó una propuesta de enfocar el tema del pensamiento matemático considerándo que el concepto de pensamiento matemático era demasiado vago y la investigación en el área poco desarrollada, seleccionando en su lugar el tópico del demostrar y la demostración. De este modo enfatizamos que contamos con un área de investigación – la caracterización y el desarrollo del pensamiento matemático – lista para nuestra intervención como educadores matemáticos. Ahora, frente a ella, nuestro trabajo nos ha llevado a la conclusión de que la solución de problemas, la generación de algoritmos, y la demostración matemática formal tienen todas sus raíces en la misma estrategia del pensamiento, la de encontrar una forma – por ingeniosa que sea – de basar cada nuevo paso o resultado en uno previamente resuelto o demostrado. Invitamos a los aquí presentes trabajando en investigación básica a considerar la posibilidad de dedicar su investigación a esclarecer la naturaleza del pensamiento matemático con el ánimo de contribuir también a generar estrategias de formación del pensamiento matemático de nuestros estudiantes por medio de un currículo enriquecido y mucho más retador.

Esta línea de desarrollo tejerá nexos de innegable importancia con otras áreas de investigación en educación matemática, e involucrará el examen de la manera en que se forma el profesor y maestro en matemáticas, y por sobre todo un examen del currículo.

2. Antecedentes

Devolviéndonos a nuestro tema principal, la idea de que todo estudiante pueda disfrutar y aprovechar experiencias retadoras y enriquecedoras en matemáticas no es nueva.

Cuando comenzaba a preparar esta charla, me acordé del diálogo platónico *El Menón* en el cual Platón quiere ganar adherentes a su explicación personal de cómo es posible el aprendizaje y en el cual las acciones de Sócrates se han tomado notoriamente como ilustración de lo que llamamos el método Socrático. Sin embargo, yo quisiera mirarlas como ejemplo de la enseñanza y aprendizaje matemáticos que involucran retos.

En el *Menón*, la condición del alumno como esclavo tiene por propósito asegurarnos que no tiene conocimiento matemático previo, y que para él todo lo que acontece es nuevo. El problema propuesto por Sócrates es el de construir un cuadrado cuya área sea el doble del área de un cuadrado dado.

El esclavo comienza sugiriendo que se doble la longitud del lado del cuadrado y Sócrates, dibujando en la arena, demuestra que la figura que resulta tienen cuatro veces el área de la figura original.

(Aquí reproducimos algunas páginas de una copia de los Collected Dialogues and Letters de Platón, las únicas ilustraciones en más de 1700 páginas de texto.)

what I can since you ask me. I see you have a large number of retainers b
here. Call one of them, anyone you like, and I will use him to demonstrate it to you.

MENO: Certainly. [*To a slave boy.*] Come here.

SOCRATES: He is a Greek and speaks our language?

MENO: Indeed yes—born and bred in the house.

SOCRATES: Listen carefully then, and see whether it seems to you that he is learning from me or simply being reminded.

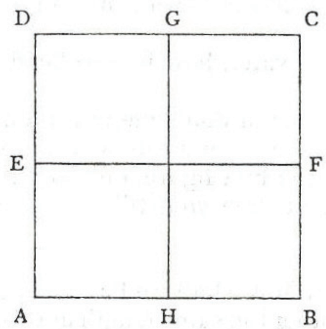
MENO: I will.

SOCRATES: Now boy, you know that a square is a figure like this?

(*Socrates begins to draw figures in the sand at his feet. He points to the square* ABCD.)

BOY: Yes.

SOCRATES: It has all these four sides equal? c



BOY: Yes.

SOCRATES: And these lines which go through the middle of it are also equal? [EF, GH.]

BOY: Yes.

SOCRATES: Such a figure could be either larger or smaller, could it not?

BOY: Yes.

SOCRATES: Now if this side is two feet long, and this side the same, how many feet will the whole be? Put it this way. If it were two feet in this direction and only one in that, must not the area be two feet taken once?

BOY: Yes.

SOCRATES: But since it is two feet this way also, does it not be- d
come twice two feet?

BOY: Yes.

SOCRATES: And how many feet is twice two? Work it out and tell me.

BOY: Four.

La segunda sugerencia del esclavo es de prolongar los lados a una distancia de un medio del lado dado.

SOCRATES: Now could one draw another figure double the size of this, but similar, that is, with all its sides equal like this one?

BOY: Yes.

SOCRATES: How many feet will its area be?

BOY: Eight.

SOCRATES: Now then, try to tell me how long each of its sides will be. The present figure has a side of two feet. What will be the side of the double-sized one?

BOY: It will be double, Socrates, obviously.

SOCRATES: You see, Meno, that I am not teaching him anything, only asking. Now he thinks he knows the length of the side of the eight-foot square.

MENO: Yes.

SOCRATES: But does he?

MENO: Certainly not.

SOCRATES: He thinks it is twice the length of the other.

MENO: Yes.

SOCRATES: Now watch how he recollects things in order—the proper way to recollect.

You say that the side of double length produces the double-sized figure? Like this I mean, not long this way and short that. It must be equal on all sides like the first figure, only twice its size, that is, eight feet. Think a moment whether you still expect to get it from doubling the side.

BOY: Yes, I do.

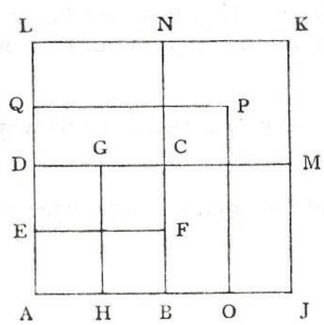
SOCRATES: Well now, shall we have a line double the length of this [AB] if we add another the same length at this end [BJ]?

BOY: Yes.

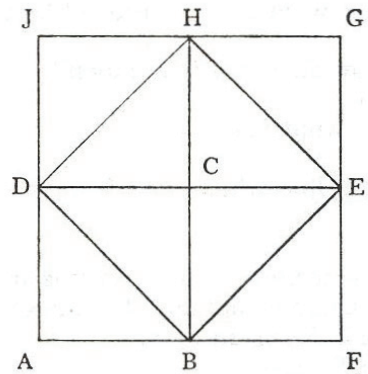
SOCRATES: It is on this line then, according to you, that we shall make the eight-foot square, by taking four of the same length?

BOY: Yes.

SOCRATES: Let us draw in four equal lines [*i.e., counting* AJ *and adding* JK, KL, *and* LA *made complete by drawing in its second half* LD], using the first as a base. Does this not give us what you call the eight-foot figure?



En cada instancia, Sócrates muestra que la conjetura es incorrecta usando diagramas o demostraciones sin palabras, y finalmente traza la diagonal del cuadrado dado y lleva al esclavo a observar (nuevamente demostración sin palabras) que el cuadrado así construido tiene el doble del área del cuadrado original, llenando lo requerido en el problema propuesto.



BOY: Yes.

SOCRATES: Now we can add another equal to it like this? [BCEF.]

BOY: Yes.

SOCRATES: And a third here, equal to each of the others? [CEGH.]

BOY: Yes.

SOCRATES: And then we can fill in this one in the corner? [DCHJ.]

BOY: Yes.

SOCRATES: Then here we have four equal squares?

BOY: Yes. e

SOCRATES: And how many times the size of the first square is the whole?

BOY: Four times.

SOCRATES: And we want one double the size. You remember?

BOY: Yes.

SOCRATES: Now does this line going from corner to corner cut each of these squares in half? 85

BOY: Yes.

SOCRATES: And these are four equal lines enclosing this area?

El problema en el contexto socrático es fresco, requiere pensar, los intentos del esclavo de resolverlo se respetan, pero con firmeza se demuestra que son erróneos, la solución a la que se llega por intermedio de preguntas es diagramática, concluyente y elegante.

No estamos tratando de promover el método socrático, sino más bien mostrar cómo, hace 2400 años, se pensaba que cualquier persona – aun un esclavo sin conocimiento previo – puede resolver problemas interesantes y retadores en matemáticas si y cuando se le da a esa persona la oportunidad.

¿Qué es lo que tenemos aquí? Un problema excelente, un maestro super estrella, una forma superlativa de exhibir la solución que convence instantáneamente al que está aprendiendo de que es correcta.

Todo niño, niña y joven muestra su originalidad y creatividad por fuera del aula de matemáticas; ¿cómo debemos establecer nuestras metas y construir la posibilidad de su realización en nuestras escuelas de modo que se le dé a cada niño la oportunidad de mostrar su creatividad también dentro de los confines del salón de clase de matemáticas? Nuestra respuesta es darle la oportunidad de desarrollar su pensamiento a través de un currículo más retador, darle los elementos para pensar problemas que no son copias en carbón de lo ya practicado, abrir las puertas para que él genere sus propias ideas siempre con criterio de autocrítica, respetar sus iniciativas e idear formas productivas de orientar o enderezar su línea de pensamiento cuando sea necesario.

3. RAZONES QUE SUSTENTAN LA PROPUESTA

Al hablar de dar a cada niño, niña y joven la oportunidad de encontrar matemática más retadora como un componente esencial de la matemática escolar, estamos en efecto proponiendo tres cosas: exponer al niño/estudiante a un problema o situación matemática que está más allá de lo que él o ella haya enfrentado y practicado de antemano, proporcionar las herramientas para comprender el problema y pensar en el, acompañar al niño a hallar formas de expresar sus pensamientos, progreso y soluciones.

Citamos cuatro razones fundamentales e interrelacionadas por establecer un papel para que todos los que estamos trabajando en educación matemática -en el distrito y el país- demos un impulso renovado a la evolución de la matemática tal y como se presenta en la escuela, el colegio y en la universidad, bajo la premisa que las competiciones matemáticas y la matemática de competiciones han mostrado cómo la planeación cuidadosa, el análisis, el proponer problemas originales, y el uso de representaciones no estándar pueden contrarrestar la separación que algunos sectores han intentado alimentar entre la matemática elemental y la matemática escolar, entre la matemática y la educación matemática.

Estas cuatro razones conciernen los derechos del estudiante, la naturaleza de la matemática misma, la forma en que la tecnología está cambiando la manera en que se hace matemáticas –y de hecho la forma en que pensamos-, y las necesidades de una sociedad de conocimiento. Las trataremos en orden inversa.

3.1 Las necesidades de una sociedad de conocimiento

Desde hace ya quizás 15 años estamos en medio de una transformación social reconocida por todos, la transición hacia sociedades de conocimiento (knowledge societies). Ello ha dado lugar a dos grandes reuniones internacionales impulsadas por la ONU, en el 2003 y el 2006, que han producido una toma de posición.

"El logro de nuestros propósitos compartidos, en particular para los países en desarrollo y para países cuyas economías estén en transición, para incorporarse plenamente en la Sociedad de la Informacion, y su integración positive en la economía del conocimiento, depende en gran medida en la construcción de una capacidad creciente en las areas de educación, del saber hacer tecnológico y en el acceso a la información, que son los principales factores que determinan el desarrollo y la competitividad."

Queremos situarnos claramente frente a estas tendencias, dando eco a la siguiente toma de posición.

"*Estamos identificados con un proyecto de sociedad donde la información es un bien público, no un artículo comercial; la comunicación, un proceso participativo e interactivo; el conocimiento, una* *construcción social compartido, no propiedad privada; y las tecnologías, un soporte para todo ello, sin volverse un fin en sí mismo.”*[1]

Un ejemplo de un intento por construir el soporte educativo para una sociedad de conocimiento es el caso de Singapur. ***Allí el Ministerio de Educación ha pedido a los maestros que enseñen menos para que los estudiantes puedan aprender más.***

Es claro que esta política desarrollada a nivel presidencial en Singapur toma en cuenta apartes y resultados tanto de las teorías de aprendizaje como un entendimiento de la naturaleza de la matemática y del pensamiento matemático. Reconoce que el énfasis mayor en la escuela es la enseñanza cuando debe ser el aprendizaje y que el aprendizaje ha de ser activo, constructivo. El estudiante debe tener la oportunidad de desarrollar su pensamiento matemático, de modelar las situaciones matemáticas en términos que tienen sentido para él o ella, de resolver problemas que no sean repetitivos y rutinarios sino que le exijan análisis, pensamiento y creatividad.

Las estrategias empleadas incluyen el dominio de ***cuatro grandes ideas matemáticas***: sentido numérico, visualización, identificación de patrones y modelamiento. El énfasis es claramente en el pensamiento matemático en contraste con el procedimiento en matemáticas.

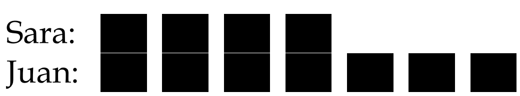
Veamos un ejemplo.

Originalmente, Sara tenía 4/7 de las canicas que tenía Juan. Cuando Juan le dio 36 canicas a Sara, los dos tenían la misma cantidad de canicas.

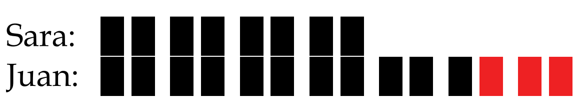
a. ¿Originalmente cuántas canicas más que Sara tenía Juan?
b. ¿Cuántas canicas había en total? (SEAB 2005, p. 17)

Janeth resolvió el problema de las canicas usando un método conocido como el “método del modelo” en los libros de texto en Singapur. En este método se emplean rectángulos para representar cantidades que no se conocen (incógnitas).

Su diagrama inicial fue:



Janeth modificó su diagrama de inmediato, separando cada rectángulo en dos medios y mostrando a color los que Juan dio a Sara para que los dos tuvieran la misma cantidad.



Janeth calculó 36 ÷ 3 = 12 y 6 × 12 = 72 para hallar la respuesta a la primera pregunta y 22 x 12 = 264 para hallar la respuesta a la segunda. Nótese que no tuvo que calcular con fracciones porque utilizó el diagrama.

Claramente se busca hacer del aprendizaje una experiencia centrada en el estudiante con el liderazgo del profesor.

---

[1] Burch, Sally, http://vecam.org/article517.html

Singapur intenta llegar a un punto aprovechable en una sociedad de conocimiento; llevar a cada ciudadano y profesional a una actitud de poder construir conocimiento por sí mismo y así innovar dentro de su esfera de acción.

El lema completo ha sido: ***escuelas que piensan, país que aprende***.

3.1 La tecnología y la formación en matemáticas

Adicionalmente, estamos presenciando una transformación en la forma en que se hace matemáticas y en la misma forma en que pensamos, influenciada fuertemente por la tecnología y las posibilidades de llevar a cabo procesos básicos con la ayuda de máquinas como la calculadora o el computador. Estos son cambios profundos, dinámicos y en permanente flujo, de modo que es sumamente difícil analizar su impacto total. Pero no por ello podemos dejar de examinar algunas facetas de su impacto que podemos apreciar claramente.

En efecto, hay dos tomas de posición que queremos mirar de cerca para luego situarnos en una posición propia desde la cual podamos comenzar a trazar nuestra agenda de investigación y acción.

Primero, una de las posiciones que se ha tomado es la de hacer caso omiso de los cambios que se están dando. Muy al lado de todas las novedades que se están presentando en el mundo, un importante sector de nuestros profesores de matemáticas siguen enseñando tal y como se les enseñó, haciendo totalmente irrelevante la experiencia escolar frente al estudiante que sabe divinamente bien que todo lo que le están haciendo aprender -conjuntamente con el frágil nivel de comprensión que se le exige – lo puede hacer con rapidez y seguridad la calculadora (el teléfono) o el computador.

Aun si miramos la tecnología que concierne directamente la forma en que se enseña y se aprende matemáticas, por ejemplo, el software dinámico en geometría, no estamos usándolo para que el estudiante aprenda más o desarrolle mejor su pensamiento matemático, sino apenas para dibujar mejor las mismas tareas. Nuestra apreciación tomando en cuenta exposiciones recientes en el CIAEM de Recife en el pasado mes de junio y el CCM de Bucaramanga en el pasado mes de julio, es que no se está haciendo mucho que se parece a matemáticas y el modelo pedagógico que se emplea es muy parecido al conductismo. “Señale un punto, trace una recta de pendiente tal, …”

Los grandes recursos se están perdiendo, estamos aprendiendo cómo usar un nuevo programa con el propósito casi declarado de no desarrollar mejor el pensamiento de nuestros estudiantes, de reemplazar los algoritmos rutinarios con software igualmente rutinario, en lugar de entender que son instrumentos para abordar situaciones que nos hacen pensar, no son -como dijimos antes- fines en sí mismos.

Por otra parte, la tecnología ha implicado que la información (y el entretenimiento) se transmiten cada vez más de manera visual. Esto también influye en la forma en la que piensan nuestros estudiantes, la forma como razonen y, en general, la forma que encuentran natural y agradable para ejercer la imaginación y transmitir sus propios pensamientos. Afortunadamente, ello aunque constituya un reto también constituye una oportunidad, de repensar la forma en que presentamos y “empaquetamos” la información o los problemas que queremos plantear a nuestros estudiantes y las formas en que queremos que ellos nos presenten sus análisis y soluciones. La exploración del tema de la video-matemática es una oportunidad excelente para nuestra investigación y desarrollo.

3.3. La naturaleza de la matemática misma

No sólo se investiga en las fronteras de la matemática, sino también es dable e importante la investigación en cada uno de los sistemas matemáticos abiertos.

Dentro de este panorama, la matemática elemental es una ciencia viva abierta y fecunda para la investigación; año tras año somos testigos de la creación de problemas nuevos y originales en áreas que incluyen teoría de números, geometría euclidiana, matemática discreta, con diferentes niveles de dificultad y complejidad.

En contraste, por lo general la matemática escolar intenta aproximarse a una parte paralizada – no muerta sino paralizada - de esa matemática elemental viva, una parte trajinada y aparentemente útil, una parte programable, matemática que puede hacer algo tan predecible que lo puede hacer con un computador con software que puede venderse en mercados de escala.

No es inútil, simplemente no es suficiente, y más importante aún, no llega a encantar a la persona que está aprendiendo, no llega a intrigar.

Dado que la matemática elemental es un sistema abierto en la que aparecen constantemente nuevos resultados, problemas, métodos y argumentos, ello exige un compromiso de renovación permanente de la matemática escolar, conservando sus tesoros pero buscando relevancia para cada nueva generación estudiantil en la cual los aportes, ideas y métodos de cada estudiante son valorados.

Por otra parte, estamos ante una explosión del conocimiento en general y del conocimiento matemático en particular. La dinámica de la creación de nuevo conocimiento matemático requiere que el currículo también esté buscando temas que lo mantienen en contacto con las fronteras de su ciencia.

En efecto, en estos momentos se lleva a cabo un proyecto conjunto organizado entre la Unión Matemática Internacional – IMU – y la Comisión Internacional de Instrucción Matemática – ICMI – una comisión permanente de la IMU, proyecto que se titula el Proyecto Klein. Félix Klein escribió dos grandes libros en los que se enfoca la matemática elemental desde un punto de vista avanzado. Entre otras cosas, Klein trata así de orientar y enriquecer la matemática escolar desde los resultados y métodos de la matemática de frontera. En esta tradición, el Proyecto Klein, como está actualmente concebido, busca elaborar publicaciones para el maestro y profesor de matemáticas con los adelantos matemáticos del pasado siglo que pueden influir e informar la forma en que se diseñan actividades de aprendizaje y se enseñan las matemáticas en la escuela y el colegio. Más generalmente, el proyecto es testimonio de la necesidad de repensar, enriquecer y hacer mucho más retadora la matemática escolar en todos sus niveles, pretensiones y matices. Es una posibilidad que debe apasionarnos a todos, e invito a todos los aquí presentes para que conjuntamente estructuremos un capítulo colombiano del Proyecto Klein. Congruente con el impacto de las olimpiadas de matemáticas a nivel extracurricular, hay que buscar hacer un impacto también a nivel curricular.

3.4 Los derechos del estudiante

Usualmente nuestros objetivos en la matemática escolar son bien distintos a los de proporcionar retos nuevos a nuestros estudiantes. Analizando la práctica actual, se observa que en la escuela, el colegio y la universidad buscamos llevar a nuestros estudiantes a conocer y dominar la matemática hecha por otros, los problemas que otros pudieron resolver, las técnicas, las herramientas, las estrategias, los métodos que otros desarrollaron.

No permite al estudiante realmente ejercer su propio pensamiento matemático, sino lo limita a observar el pensamiento de los demás e imitarlo.

No he encontrado un paralelo apropiado, pero usaré éste. Muchas propuestas curriculares y libros de texto presentan una aproximación excesivamente algorítmica a la matemática escolar, una especie de temática previamente licuada o digerida, algo así como comida para bebés, que deja totalmente irreconocible los elementos fuente en toda su riqueza, diversidad, color, forma y textura.

Varios países y sistemas escolares hace algún tiempo han tomado conciencia del cambio fundamental que debe tener lugar. Muchos han construido una cultura matemática enriquecida. Entre ellos podemos citar los de Rusia, Hungría y otros países de Europa oriental.

Otros sistemas escolares comienzan a tomar conciencia de la deseabilidad de estructurar un currículo más retador para todos. Ello es parte del programa de Singapur que hemos mencionado; en el para todos los estudiantes se plantean al menos un 25% de problemas retadores en todas las evaluaciones de matemáticas que se hacen, incluyendo los oficiales que son similares a las pruebas saber.

En los EEUU el estado de Connecticut ha promulgado el siguiente precepto.

“Todo estudiante necesita y merece un currículo matemático rico y riguroso que se enfoca en el desarrollo de conceptos, la adquisición de destrezas básicas y avanzadas, y la integración de experiencias de solución de problemas. El Departamento de Educación quiere animar a los educadores a proporcionar tales oportunidades retadoras en matemáticas para fomentar el crecimiento de miembros de la sociedad que sean inteligentes, pensantes y matemáticamente letrados.”

Lo que encontramos interesante en este precepto es que pone énfasis en la importancia de una educación matemática retadora para el estudiante y futuro ciudadano. Éste es un énfasis esencial, es lo que <u>*todo estudiante necesita y merece.*</u> Más aún, en su edición de verano de 2010, la revista *Ed.* The Magazine of the Harvard Graduate School of Education consideró apropiado enfatizar que el acceso a un currículo matemático más exigente – aunque fuera en la forma de más y mejor formación en álgebra – debiera pensarse como <u>*un nuevo derecho civil.*</u> Mirando otra vez el *Menón,* ¿sería que la condición de esclavo del aprendiz estuviera haciendo alusión a la creencia que el acceso a la matemática retadora es un derecho de todos?

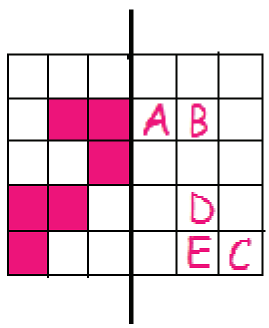
El llamado se hace particularmente en respuesta a la realidad escolar, mirando tanto políticas como las acciones de los docentes, que genera bajas expectativas de logro para grandes sectores de la población estudiantil.

Lo anterior es esencialmente el sentido de ICMI Study 16: *Matemática retadora en el aula y más allá* y queremos decir algunas cosas al respecto.

En el Estudio 16 se realzan varios casos de sistemas educativos que están desarrollando su compromiso con un currículo matemático más retador para todos, y allí se enfatiza que parte de la fortaleza en tratar problemas más retadores para todos los estudiantes yace en la representación apropiada, y en el nivel elemental visual o gráfica, de conceptos y hechos matemáticos, una representación que permite al estudiante pensar en los conceptos y hechos sin la intermediación de símbolos matemáticos que, desafortunadamente para el estudiante, pueden llegar a asemejarse a la filosofía formalista de Hilbert – la manipulación de símbolos sin significado según reglas de transformación explícitas.

Los paralelos con el método de Sócrates en el *Menón* salen a la vista, y el mensaje es claro. Presentar un problema retador, proporcionar las herramientas requeridas para entenderlo y pensar en el, y acompañar al estudiante a encontrar formas de expresar la solución de manera convincente.

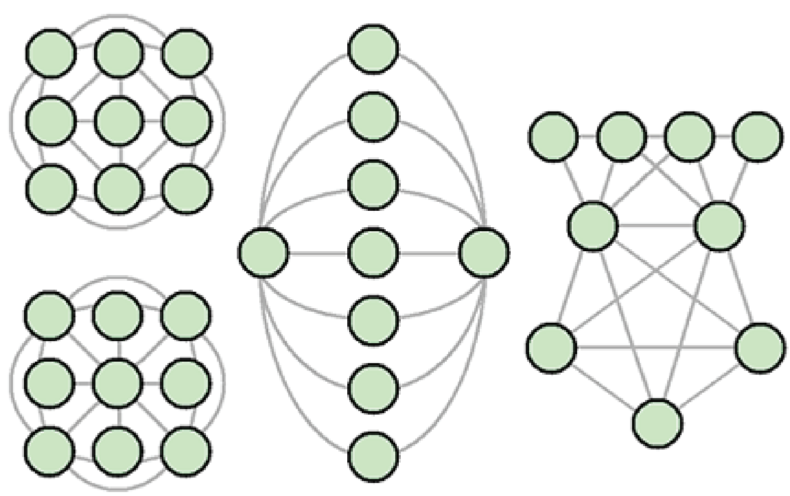
Los retos deben calibrarse, bien diseñados provocan el pensamiento matemático del estudiante y su creatividad. Vamos a dar unos ejemplos de retos sencillos e identificar cómo cada uno de ellos puede contribuir a este propósito. En el siguiente ejemplo, tomado del Canguro Matemático 2011 para el grado tercero, nótese cómo se induce la imaginación a la vez que el estudiante se comienza a acostumbrar a pensar en transformaciones geométricas.



Se dobla la hoja que se muestra en el dibujo a lo largo de la línea gruesa. ¿Cuál de las letras no será tapada por un cuadrito rosado?

(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

El siguiente problema – rompecabezas tiene un enunciado sencillo.



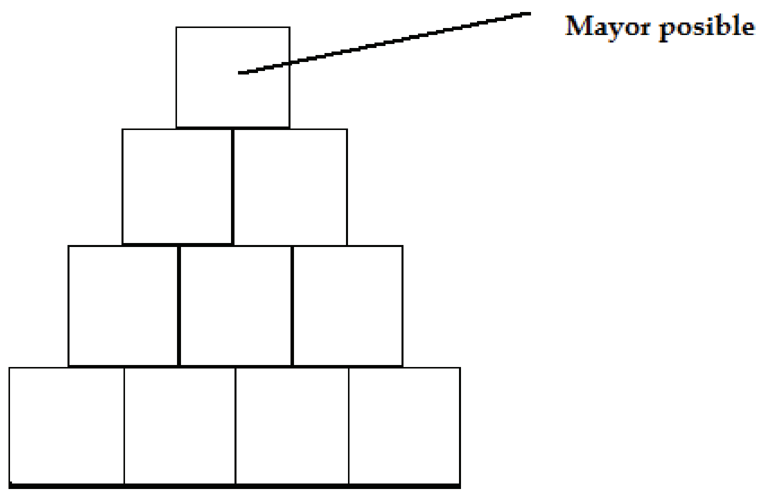
Colocar los dígitos de 1 a 9 en los círculos de tal modo que ningún par de dígitos en círculos vecinos sea consecutivos. Dos círculos son vecinos se están unidos por un arco.

Cuando es posible colocar los números de acuerdo con las condiciones dadas, el problema es una especie de rompecabezas, pero cuando no es posible, induce naturalmente al estudiante a producir un argumento convincente de por qué no puede hacerse. En este momento, el estudiante se compromete (de pronto sin saberlo) con la demostración de tipo matemático.

Debemos recordar que las operaciones aritméticas no son nunca fines en sí mismas (para ser ejercitadas hasta la saciedad), sino deben usarse en conexión con razonamiento combinatorio, de optimización o acotamiento, ordenación, todas éstas pertenecientes al pensamiento matemático.

En el sencillo ejemplo que miramos a continuación, tenemos la oportunidad de observar todas estas características del pensamiento matemático en interacción.

El problema puede enunciarse así:



1, 2, 3, 4

Se colocan los numeros 1, 2, 3, 4 en las casillas de la fila inferior. En cada fila sucesiva el numero en una casilla es la suma de los numeros en las dos casillas inferiores en las que descansa. Cual es el mayor numero posible que se puede conseguir en la casilla de la cuarta fila? Cual es el menor posible?

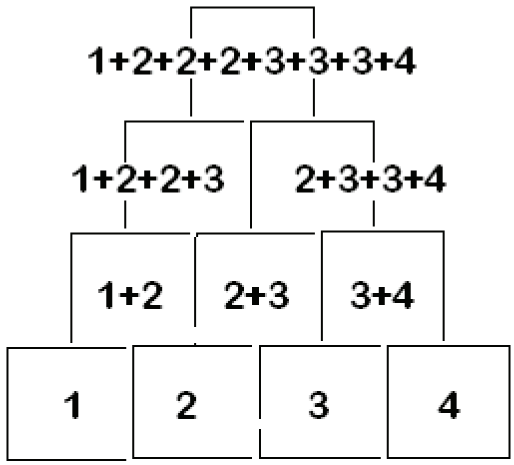
Obviamente, los estudiantes pueden ir tanteando y descubrir las respuestas. El estudiante que no las obtiene, volverá a revisar su planteamiento y su trabajo, porque todos quieren lograr el mayor.

Pero podemos aprovechar aun más el problema. Podemos pedirles si hay más de una forma de asignar los números a las casillas de manera que se obtenga el mayor valor. Podemos preguntar cuántas formas hay.

Podemos preguntar cuántos valores diferentes se pueden obtener en la casilla superior.

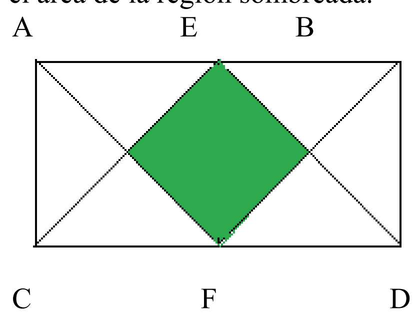
Si queremos que se ejercite la suma, podemos proponer el problema colocando los números 37, 21, 9 y 18 en las casillas de la fila inferior.

Si queremos animar a los estudiantes a sustentar sus resultados con argumentos, podemos pedir que justifiquen por qué el valor que dicen es máximo en efecto es el mayor posible. Esto no es tan difícil, un diagrama como el siguiente es suficiente para enmarcar un argumento contundente.

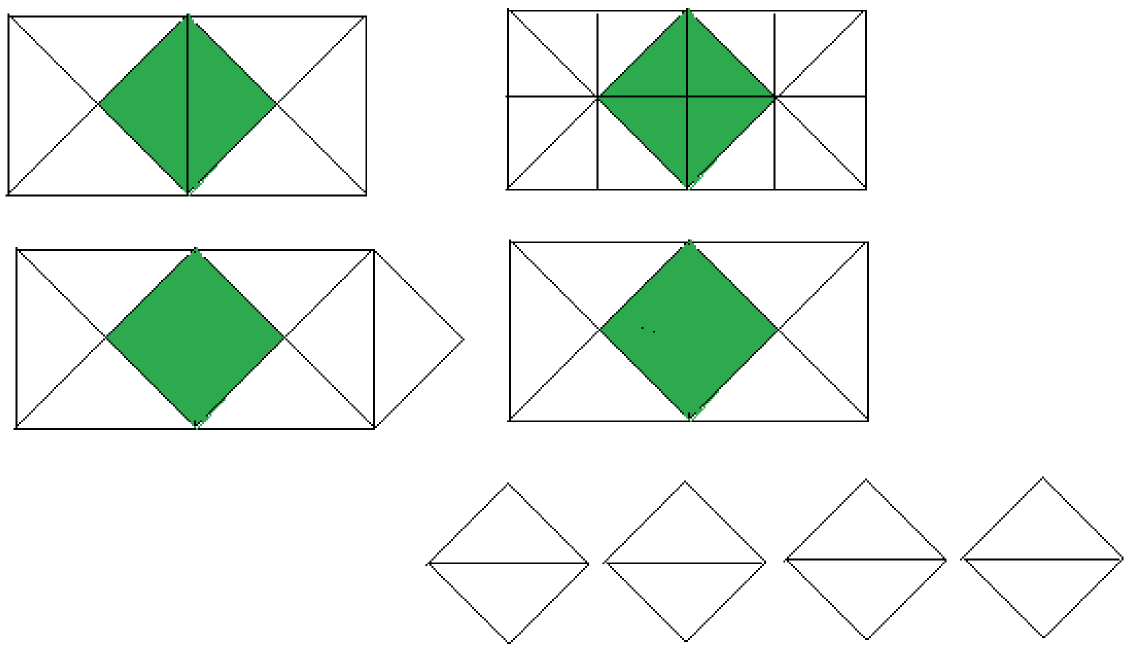


Aunque a nivel teórico puedan compartir elementos estructurales, el pensamiento geométrico es esencialmente diferente del algebraico, se complementan, y cada uno contribuye al acervo de estrategias que puede manejar un estudiante al enfrentar problemas reto.

Consideremos el siguiente problema en el cual el área del rectángulo ABCD es 500 cm², la longitud del lado AB es el doble de la del lado BC, y E, F son puntos medios de los lados AB, CD respectivamente. Se pide hallar el área de la región sombreada.



Siguiendo un enfoque claramente euclidiano, en el cual las áreas se determinan descomponiendo y recomponiendo figuras [y argumentando sobre la igualdad de áreas de ciertas figuras en la composición], un grupo de estudiantes de grado sexto de un colegio de estratos 1 y 2 de la localidad de Usme, después de solo 5 horas de desarrollo de una unidad para construir significado para el concepto de área produjeron tres soluciones diferentes al problema planteado, cada una con gran solvencia geométrica.



3.4 ***El camino real y el currículo***

Sin embargo, puede decirse que la evolución hacia un currículo matemático más retador para todos los estudiantes no ha tenido el impacto que merece en la política relacionada con la educación matemática en general.

Una vez más quiero volver a un incidente famoso de la matemática griega, uno que se cita con frecuencia pero que no necesariamente se interpreta plenamente en cuanto a sus implicaciones. Todos hemos oído la historia de Menecmo cuando le dijo a Alejandro Magno “no hay un camino real” para apropiarse de la geometría.

Un titular reciente del *Los Angeles Times* decía:
“América (EEUU) sigue buscando una solución sencilla para sus falencias en educación. Tal cosa no existe.”

Desafortunadamente, creo que una gran mayoría de los profesores y maestros, así como de los responsables de la política educativa, sigue buscando el camino real. Un solución milagrosa, algo que el futuro profesor puede digerir en un instante y que puede transmitirse a los estudiantes sin dificultades, pero por sobre todo sin esfuerzo.

Podemos participar en la tarea de convencer a la sociedad como un todo y a los que establecen la política educativa en particular, que realmente no hay un camino real a la geometría ni a la matemática en general; y que sería una tragedia si lo hubiera, dando soporte a nuestros esfuerzos con investigación relacionada con el éxito que se ha tenido en Singapur y en muchos otros países y regiones del mundo. La matemática forma al estudiante y es cautivante porque requiere esfuerzo, esfuerzo sostenido e inspirado, para hacer matemáticas en todo nivel de experticia. Propuestas, planes y diseños de un currículo matemático más retador es una tarea a la que podemos dedicarnos todos los educadores aquí presentes, así como a la investigación que valora claramente su impacto.

3.5 *Profesores y maestros*

Si miramos los análisis que se han hecho en diferentes contextos podemos ver que el rendimiento (performance) estudiantil sobresaliente casi siempre se puede trazar a profesores y maestros extraordinarios, y esto es cierto tanto para estudiantes que se desempeñan al nivel de las Olimpiadas como para estudiantes que toman parte en casi cualquier actividad matemática diseñada para medir su rendimiento (performance).

Esto se dice con claridad en el informe de MSRI The Mathematical Sciences Research Institute de la Universidad de California en Berkeley; ese instituto comisionó un estudio para analizar la historia de la formación de estudiantes que habían tenido resultados sobresalientes en la Competition Putnam, una competición de solución de problemas retadores para estudiantes universitarios. El informe data de 2005 y fue elaborado por Steve Olson. En el no sólo se identifican ciertos profesores que regularmente formaron estudiantes sobresalientes sino se reveló la existencia de momentos críticos para atraer a estudiantes hacia el estudio de las matemáticas, el más importante siendo para estudiantes de 12 a 13 años.

Sabemos trabajar con profesores y maestros, en investigaciones en el aula, en experiencias de capacitación y a nivel extracurricular, como en el caso de las Olimpiadas de Matemáticas, pero debemos y podemos aprender a trabajar intensivamente y con inspiración en la transformación de la formación universitaria y de la capacitación para profesores y maestros, para permitirles que tengan experiencia propia del poder y la belleza de la matemática que se encarna tan apropiadamente en retos en la matemática elemental, esa que forma el trasfondo de la matemática escolar, y debemos documentar los resultados que se obtienen en tales investigaciones.

Éste puede ser el momento para desarrollar unos preceptos y trabajar en su implementación.

3.6 Preceptos

- Todo niño tiene el derecho de confrontar matemáticas que es lo suficientemente retador para desarrollar su pensamiento matemático y suscitar en respuesta su creatividad.

- La matemática que reta representa la única experiencia de aprendizaje que es fiel a la naturaleza misma de la matemática y a ese tipo de pensamiento que puede llamarse matemático.

- El crecimiento matemático del estudiante está directamente relacionado con la formación, el talento y la dedicación del profesor y maestro. El maestro que no ha tenido él mismo la experiencia de enfrentar matemáticas retadoras y de pensar matemáticamente no podrá abrir la puerta hacia tal experiencia para sus estudiantes.

4. EL DESAFÍO PARA NOSOTROS, MAESTROS, PROFESORES Y EDUCADORES DE MATEMÁTICAS

Queda para nosotros el desafío de investigar, desarrollar e investigar de nuevo, proceso que puede transformar la matemática escolar en algo que responde a los requerimientos de la sociedad de conocimiento, que capitaliza las posibilidades tecnológicas para hacer matemáticas nuevas y desarrollar capacidades nuevas, que muestra claramente rasgos de la actividad de hacer matemáticas y pensar matemáticamente, y que responda a los derechos de todo estudiante a una formación matemática que le abre las puertas hacia el futuro.

Referencias

[1] Barbeau, E & P.J.Taylor. *The 16th ICMI Study. Challenging Mathematics in and Beyond the Classroom*. Springer. Enero, 2009.
[2] Burch, Sally. *The Information Society/the Knowledge Society*.
[3] Hamilton, Edith and Huntingdon Cairns, eds. *Plato: The Collected Dialogues*. Princeton University Press, 1961, pp. 365 – 369.
[4] Hough, Lory. "It Stems from Algebra". *Ed. The Magazine of the Harvard Graduate School of Education*. Volume LIII, No. 3, Summer, 2010, pp. 6-7
[5] http://www.sde.ct.gov/sde/cwp/view.asp?a=2618&q=320872
[6] Jackson, Bill. *Singapore Math: Developing conceptual understanding of mathematics*. Internet Blog http://www.thedailyriff.com/2010/03/singapore-math-demystified-why-we-should.php
[7] *Los Angeles Times*, June 1, 2010. "No magic bullet for education America keeps looking for one simple solution for its education shortcomings. There isn't one."

[8] Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Problemas varios.
[9] Olson, Steve. *Nurturing Mathematical Talent: Views from Top Finishers in the William Lowell Putnam Mathematical Competition*. Project commissioned by the Mathematical Sciences Research Institute of the University of California Berkeley as an extension of its Journalist in Residence program.

Volver al índice de Conferencias

La didáctica del infinito matemático

Bruno D'Amore
Mescud – Universidad Distrital Francisco José de Caldas – Bogotà

***Abstract*:** In this paper, we study the limits of understanding and lack of acceptance shown by students from the upper-secondary school related to actual mathematical infinity; in particular, we explore their answers with respect to a celebrated theorem of Georg Cantor. Moreover, we try to analyze the motives of this widespread non-acceptance which surfaces in diverse fashions.

Palabras clave: didáctica del infinito matemático, obstáculos epistemológicos y didácticos, infinito actual y potencial.

1. Prefacio

Este texto resume una extensa investigación realizada con estudiantes y maestros sobre la construcción del conocimiento en relación con el infinito matemático; el trabajo lleva a este punto más de 20 años. El título general de la línea de investigación es: *Lo veo, pero no lo creo*.

La bibliografía siguiente enumera algunos textos producidos en esta dirección; después de 5-6 años de investigación, en el julio 1996 el ICME dio a mi mismo la responsabilidad de *chief organizer* de un grupo temático, el XIV: *El infinito*, en el VIII ICME de Sevilla, con Raymond Duval como colaborador.

Dada la brevedad del tiempo y del espacio disponible, en esta ocasión voy a presentar sólo unos pocos puntos de la investigación, que sigue aún.

Por lo general, las investigaciones al interno del NRD de Italia, activo en el Departamento de Matemática de la Universidad de Bologna (NRD: www.dm.unibo.it/rsddm) se organizan según un esquema clásico y fijo:

1. referencias historias y epistemológicas
2. descripción del cuadro teórico de referencia
3. descripción de los problemas de investigación
4. hipótesis de la investigación
5. metodología
6. resultados de la investigación
7. discusión de los resultados
8. verificación de las hipótesis
9. respuestas a las preguntas formuladas en 4
10. referencias bibliográficas.

En esta ocasión me limitaré sólo a algunos de estos puntos.

2. Origen histórico del título de la investigación

Cuando nos acercamos a la historia de la matemática, una de las cuestiones que mas sorprende, es el contenido de una célebre y extraordinaria carta de Georg Cantor (1845-1918) a Richard Dedekind (1831-1916), enviada desde Halle el 29 de junio de 1877. Dado que Dedekind se retrasaba (!) en dar respuesta a un problema que le había propuesto el 25 de junio, Cantor, después de sólo 4 días, y pidiendo disculpas por el proprio *celo,* propone con fuerza, en la carta del 29 de junio, una nueva interrogación, declarando tener *necesidad* de recibir el parecer de Dedekind.

Casi al inicio de esta nueva carta (en alemán), Cantor escribe (en francés) la famosa frase:

> «*Mientras que usted no lo apruebe, yo no puedo más que decir: lo veo pero no lo creo*».[2]

Espontáneamente surge la siguiente pregunta, ¿cuál sería el argumento sobre el que Cantor solicitaba, decidido, una rápida respuesta de Dedekind? Nos lo dice el mismo Cantor en su carta del 25 de junio:

> «*Una variedad continua de p dimensiones, con p> 1, ¿se puede poner en relación unívoca con una variedad continua de una dimensión, de manera tal que a un punto de una corresponda uno y sólo un punto de la otra*?».

Debemos decir inmediatamente que, en aquella época, se entendía por "relación univoca" lo que hoy llamamos "correspondencia biunívoca". Para favorecer a un eventual lector no experto en matemática, nos podemos concretar al siguiente caso, particular, pero igualmente significativo:

¿es posible hallar una correspondencia biunívoca entre los puntos de un cuadrado[3] y los puntos de un segmento[4]?.

Se puede intuir la importancia de la pregunta a partir del siguiente comentario del mismo Cantor:

> «La mayor parte de aquéllos a los que les he puesto esta pregunta se han sorprendido mucho del hecho mismo de que yo la planteara, ya que es evidente que, para la determinación de un punto sobre una extensión de p dimensiones, se necesitan siempre p coordenadas independientes».

Después, Cantor confesó que había intentado demostrar este hecho, suponiendo que era verdadero, pero sólo porque ya no estaba satisfecho de la supuesta y tan difundida *evidencia*! Confiesa por lo tanto haber formado parte *siempre* de aquéllos que no ponían en duda tal hecho; *siempre,* hasta que demostró que las cosas no eran así...

La demostración hallada por Cantor es de una simplicidad genial; para verla, basta consultar un buen libro de texto de Análisis de nivel universitario, por ejemplo Bourbaki (1970), pagg. 47-49. Nosotros aquí nos inspiramos en una célebre vulgarización de la demostración de Cantor que se halla en Courant y Robbins (1941) relativa sólo al ejemplo visto arriba, propuesto a nuestro hipotético lector no matemático.[5]

---

[2] Sobre este punto véase Arrigo y D'Amore (1993) y Arrigo, D'Amore y Sbaragli (2011). Para conocer los textos completos de las cartas intercambiadas entre los dos formidables matemáticos alemanes, se puede ver (Noether, Cavaillès, 1937) y (Cavaillés, 1962).

[3] Por "cuadrado" entendemos de ahora en adelante una superficie plana con forma cuadrada *abierta,* es decir sin borde.

[4] De ahora en adelante, hablaremos de segmento *abierto*, es decir sin extremos.

[5] En realidad, en lo que sigue de nuestro trabajo, es sólo a este ejemplo al que haremos referencia.

Pongamos el cuadrado en un sistema de ejes cartesianos ortogonales de origen O, de manera tal que dos lados consecutivos se "apoyen" sobre los ejes (obviamente uno de los vértices coincide entonces con el origen). Considerando el lado del cuadrado como unidad de medida, se tiene inmediatamente que cada punto P interno a la superficie cuadrada tiene coordenadas reales x_P y y_P del tipo $0 < x_P < 1$, $0 < y_P < 1$, por lo tanto, explícitamente: $x_P = 0.a_1a_2...a_n...$, y $y_P = 0.b_1b_2...b_n...$. A *cada pareja ordenada de números reales* (x_P, y_P) hacemos corresponder *el número real* $x_{P'}$ definido de la siguiente manera: $x_{P'} = 0.a_1b_1a_2b_2...a_nb_n...$, obtenido anteponiendo 0 y el punto decimal, y alternando después las cifras decimales singulares de cada coordenada. Se puede fácilmente constatar que $0 < x_{P'} < 1$ y, como tal, $x_{P'}$ se define de manera univoca a partir de x_P y y_P; como $x_{P'}$ se puede considerar como abscisa de un punto P' en el eje x [P'($x_{P'}$,0)], se puede pensar, por lo tanto P', como *el* correspondiente de P en la correspondencia definida.

Viceversa: se puede partir de P' y de su abscisa y, con el método inverso de distribución de las cifras, llegar unívocamente a P.
Por lo tanto, hemos probado este teorema de Cantor, al menos en el caso en el que la dimensión p de la variedad vale 2: a los puntos internos del cuadrado unitario corresponden de manera biunívoca los puntos internos del segmento unitario.

Dado que esta demostración se basa en la escritura decimal de los números, es obvio que se debe dar por descontado una *unicidad* de tal escritura como, por otra parte, objetó el mismo Dedekind a Cantor en una carta posterior (no obstante aceptando la demostración y admitiendo que su objeción no la descalificaba en lo más mínimo). Se trata por lo tanto de eliminar por convención, antes del enunciado del teorema, la única ambigüedad posible, que se halla sólo en el caso en el que aparece un 9 periódico en la expansión decimal. Por ejemplo, es bien conocido que $0.35\overline{9} = 0.36$: basta entonces *prohibir* las escrituras del primer tipo y, en el momento en que aparezca, se sustituye con escrituras del segundo tipo.[6]

Nuestra investigación tiene motivaciones puramente didácticas y los párrafos precedentes tienen sólo el objetivo de situarla en el ámbito histórico.

Quisimos recordar lo anterior, sólo para justificar nuestro título: «Lo veo, pero no lo creo», la célebre frase de Cantor, que vuelve tan humana y fatigosa toda la historia de esta demostración; para nosotros será emblemática de aquello que podría decir también un joven estudiante de la escuela secundaria superior que tuviera que ver con la demostración tratada por Courant y Robbins (1941), e ilustrada por nosotros.

Pero todo esto nos lleva también a poner en evidencia, aunque sea brevemente, los obstáculos que se han tenido en el desarrollo histórico de este difícil y controvertido argumento, hasta la demostración de Cantor que, por cuanto genial y simple, no fue acogida de manera inmediata. Aunque ya no lo diremos mas de manera explícita, es obvio que cuando hablemos de obstáculos epistemológicos al respecto, la misma historia rápidamente delineada aquí debe considerarse como un apoyo poderoso a su evidencia.

3. Cuadro teórico de referencia

En ocasión del VIII ICME (Sevilla 1996), redacté una bibliografía de más de 300 títulos, con la contribución de muchos investigadores de todo el mundo; tal bibliografía se escribió en italiano,

---

[6] En realidad, existen otros detalles que hay que cuidar, así como precauciones que se deben tomar; pero, dado que nuestro objetivo aquí no es el de entrar en cuestiones finas sobre este argumento (por lo demás bien conocidas) si no exponer una de nuestras investigaciones, eludimos la cuestión. Se puede ver al respecto Carruccio (1964).

español e inglés y se puso a consideración (precisamente en Sevilla) de los participantes en el GT XIV y redacté también un panorama razonado de tales investigaciones (D'Amore, 1996).

Partiendo de estos antecedentes, delineamos brevemente el cuadro teórico de referencia, en el que nos queremos insertar.

3.1. Entre las tantas investigaciones presentes sobre el panorama mundial, muchas se dedican a la falta de aceptación, por parte del estudiante, de las diversas cardinalidades transfinitas [entre los muchos ejemplos, véanse los trabajos clásicos de Tsamir y Tirosh (1994), de Waldegg (1993), de Fischbein, Jehiam y Cohen (1994,1995), para tener una primera idea]. Normalmente, para los estudiantes, la cardinalidad de Z es, en un primer momento, superior a la de N (hay quien incluso dice que es el *doble*). Pero, una vez que se acepta la demostración de que estos dos conjuntos tienen la misma cardinalidad, muchos estudiantes creen que pueden concluir que esto depende del hecho de que ambos son conjuntos infinitos y que por lo tanto «todos los conjuntos infinitos tienen la misma cardinalidad»: *infinita.* Por lo que, por ejemplo, N, Z, Q y R deberían simplemente de tener la misma cardinalidad.

Esta aceptación intuitiva (que representa una *misconcepción* bastante difundida) la llamaremos de ahora en adelante: ***aplastamiento*** de los cardinales transfinitos.

3.2. Ponemos en evidencia otra convicción estudiada muchas veces en las investigaciones; por ejemplo, en Tall (1980)[7] se muestra cómo los procesos mentales y las convicciones intuitivas llevan a los estudiantes a pensar que en un segmento *largo* existan más puntos que en un segmento más *corto*.[8]

Esta aceptación intuitiva (que representa una *misconcepción* bastante difundida) la llamaremos de ahora en adelante: ***dependencia*** de los cardinales transfinitos de hechos relativos a medidas.

3.3. Las aceptaciones intuitivas *(misconcepciones)* de *aplastamiento* y de *dependencia* se hallan en contradicción entre ellas; pero parece que los estudiantes no se sienten interesados por volver coherentes sus creencias, como muestran, en modos y ámbitos diferentes, Stavy y Berkovitz (1980), Hart (1981), Schoenfeld (1985), Tirosh (1990), Tsamir y Tirosh (1997) y D'Amore y Martini (1997, 1999).

3.4. Duval (1983) analiza la dificultad que tienen los estudiantes para aceptar la correspondencia biunívoca llamada "de Galileo" entre N y el (su) subconjunto de los números cuadrados. Él la explica (incluso) gracias a un obstáculo que llama de ***deslizamiento***: en su caso se trata del deslizamiento del verbo *Tener* al verbo *Ser* en el curso de la demostración (es decir: en el curso de la demostración, se pasa de propiedades de ciertos números recurriendo al verbo *Tener,* a la descripción de una peculiaridad de estos mismos números expresada mediante el verbo *Ser*). Pero nosotros podemos tomar esto como prototipo y hablar de *deslizamiento* más en general; en el curso de una demostración: nuestra acepción de *deslizamiento* (un poco más amplia que la de Duval) se tiene cuando se está hablando de alguna cosa (o en un cierto modo, o en el ámbito de un cierto lenguaje) y, de improviso, nos hallamos hablando de otra cosa (o en otro modo o en otro lenguaje). Es evidente que este pasaje del contexto geométrico al aritmético y viceversa se inserta en el "*jeu de cadres*" de Douady (1984-86). Característica de nuestro caso específico es el doble pasaje y el hecho de que es relativo a una demostración. Se debe también hacer referencia a la dificultad de parte de los estudiantes en el pasaje entre diversos sistemas de representación Duval (1995).

---

[7] Pero sobre este argumento la literatura es vasta en todo il panorama internacional. Véase D'Amore (1996).

[8] Esta creencia de carácter *monádico* (y por lo tanto de factura *pitagórica*), no obstante variados pero esporádicos antecedentes, fue definitivamente descubierta solo en el siglo XX, es decir, mas bien recientemente. Véase Arrigo y D'Amore (1993). Ella, como sea, forma parte de la mentalidad común, más allá del mundo matemático. Se halla incluso entre los profesores.

3.5. El clásico debate filosófico de origen aristotélico sobre el infinito en sentido *actual* y en sentido *potencial* (Arrigo, D'Amore, 1993; Arrigo, D'Amore, Sbaragli, 2011) ha inspirado diferentes investigaciones, por ejemplo las de Moreno y Waldegg (1991), de Tsamir y Tirosh (1992), de Shama y Movshovitz Badar (1994) y de Bagni (1998). Se han hallado, en verdad, resultados a veces contradictorios; pero está probado que la evolución de la concepción *actual* del infinito matemático es más lenta y se da en modo contradictorio a lo largo del curso del currículo escolar y gracias a un proceso de maduración y sistematización cognitiva de los aprendizajes. Ahora, la demostración descrita por nosotros en el apartado 1 es claramente de tipo *actual* por el modo mismo en el que se manipulan algunos conjuntos infinitos (los puntos del cuadrado y del segmento, las cifras después del punto). Este hecho podría constituir uno de los puntos de dificultad para la aceptación de la demostración misma.

[Naturalmente tuvimos en cuenta los numerosos estudios sobre la demostración matemática en clase. Pero, en realidad, aquí no se trataba de "dar una demostración" sino de "seguir una demostración dada por otros" y después discutir el grado de aceptación para estudiar los motivos de un eventual rechazo: nos parece que la especificidad de la demostración y el hecho de que ella involucre al infinito cobran mayor relevancia con respecto a la actividad del demostrar en sí].

4. Resultados

La demostración del teorema de Cantor se revela por encima de las capacidades normales de aprendizaje de los estudiantes de las escuelas superiores que no han aún seguido un curso del Análisis. Esto se debe sobre todo a obstáculos de naturaleza epistemológica y didáctica, como hemos mostrado, y a dos pasajes en la demostración (deslizamiento y manipulación de las cifras). El éxito obtenido por el 19.2% cae en los valores normales del estrato de alto rendimiento de una población escolar y por lo tanto no parece significativo para nuestra investigación.

Las demostraciones de los otros dos teoremas ("segmentito-segmentote" y "formas periódicas") resultaron más accesibles, pero también pusieron en evidencia la existencia de obstáculos de diversa naturaleza, por ejemplo de tipo curricular y cognitivo general.

El examen de los cuestionarios nos lleva a intuir que los obstáculos se podrían superar en al menos dos modos:

- mediante una especie de eludir (véanse las demostraciones de "segmentito-segmentote" y de "formas periódicas"); la operación puede lograrse también plenamente, pero no tiene efecto duradero: a la fase "lo veo", es decir a la comprensión técnica de la demostración, puede seguir una reacción del tipo "pero no lo creo" causada por el regreso en superficie de los obstáculos;
- mediante remoción y superación de los mismos.

Para superar un obstáculo epistemológico se necesita hacer atravesar al estudiante la frontera de sus conocimientos, aumentándolos de manera directa y oportuna.

Por ejemplo, en el caso de "segmentito-segmentote" se necesita ayudar al estudiante a separarse del modelo del segmento como "collar" cuyas "perlas" se hallan estrechamente ordenadas. Se necesita hacerle tornar conciencia, por ejemplo, del hecho que, en un segmento, dado un punto, no tiene ya sentido pensar ni en el punto anterior ni en el sucesivo, buscando imágenes oportunas.

Referencias

Arrigo, G., and D'Amore, B. (1993). *Infiniti*. Milano: Angeli.

Arrigo, G., and D'Amore, B. (1999). "Lo veo, pero no lo creo". Obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de un teorema de Georg Cantor que involucra al infinito actual. *Educación matemática*, *11*, 1, 5-24.

Arrigo, G., and D'Amore, B. (2002). "Lo vedo ma non ci credo…", seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La Matematica e la sua didattica*, *1*, 4-57.

Arrigo, G., and D'Amore, B. (2004). Otros allazgos sobre los obstáculos en la comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor. *Educación Matemática*, *16*, 2, 5-20.

Arrigo, G., D'Amore, B., and Sbaragli, S. (2011). *Infiniti infiniti*. Trento: Erickson. [En curso de traducción en idioma español: Bogotá: Magisterio].

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'ésprit scientifique*. Paris: Vrin.

Bagni, G.T. (1998). L'infinitesimo nelle concezioni degli studenti prima e dopo lo studio dell'Analisi. *L'educazione matematica*, *3*, 2, 110-121.

Bourbaki, N. (1970). *Éléments de Mathématiques* - *Théorie des ensembles* - E III. Paris: Hermann.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistemologiques et les problèmes des mathématiques. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, *4*, 2, 165-198.

Carruccio, E. (1964). *Mathematics and Logic in History and in Contemporary Thought*. London: Faber and Faber.

Cavaillès, J. (1962). *Philosophie mathématique*. Paris: Hermann.

Courant, R., and Robbins, H. (1941). *What is mathematics*? New York: Oxford Univ. Press.

D'Amore, B. (1996). El infinito: una historia de conflictos, de sorpresas, de dudas. *Epsilon*, *36*, 341-360.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora. [Edición en español, 2006: *Didáctica de la matemática*. Bogotá: Magisterio].

D'Amore, B., Arrigo, G., Bonilla Estévez, M., Fandiño Pinilla, M.I., Piatti, A., Rojas Garzón, P.J., Rodríguez Bejarano, J., Romero Cruz, J. H., and Sbaragli, S. (2004). Il "senso dell'infinito". *La matematica e la sua didattica 4*, 46-83. D'Amore, B., Arrigo, G., Bonilla Estévez, M., Fandiño Pinilla, M.I., Piatti, A., Rodríguez Bejarano, J., Rojas Garzón, P.J., Romero Cruz, J.H., and Sbaragli S. (2006). El "sentido del infinito". *Epsilon*, *22(2)*, 65, 187-216.

D'Amore, B., and Fandiño Pinilla, M.I. (2001). La "matemática de la cotidianidad". *Paradigma*, *1*, 59-72.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., and Sarrazy, B. (2011). *Didattica della matematica, Alcuni effetti del contratto*. Prefacio y postfacio de Guy Brousseau. Bologna: Archetipolibri. [En curso de traducción en idioma español: Bogotà: Magisterio].

D'Amore, B., and Martini, B. (1997). Contrato didáctico, modelos mentales y modelos intuitivos en la resolución de problemas escolares típicos. *Números*, *32*, 26-32.

D'Amore, B., and Martini, B. (1999). El "contesto natural". Influencia de la lengua natural en las respuestas a test de matemática. *Suma*, *30*, 77-87.

D'Amore, B., and Sandri, P. (1996). "Fa' finta di essere...". Indagine sull'uso della lingua comune in contesto matematico nella scuola media. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *19A*, 3, 223-246.

Douady, R. (1984). Jeux de cadres et dialectique outil-object dans l'enseignement des mathématiques. Thèse d'État, Univ. De Paris. (1986) *Recherches en didactique des mathématiques*, *7*, 2, 5-31.

Duval, R. (1983). L'obstacle de dedoublement des objects mathématiques. *Educational Studies in Mathematics*, *14*, 385-414.

Duval, R. (1995). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Actes de l'École d'été* 1995.

Fischbein, E. (1985). Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. En Chini Artusi L. (ed.). *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Bologna: Zanichelli-UMI. 122-132.

Fischbein, E., Jehiam, R., and Cohen, D. (1994). The irrational numbers and the corresponding epistemological obstacles. *Proceedings of the* XV1I1 PME. 2. Lisboa. 352-359.

Fischbein, E., Jehiam, R., and Cohen, D. (1995). The concept of irrational numbers en high-school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, *29*. 29-44.

Hart K. (ed.) (1981). *Children's understanding of mathematics*. London: Murray.

Moreno, L., and Waldegg, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 211-231.

Noether, Y., and Cavaillès, J. (eds.) (1937). *Briefwechsed Cantor-Dedekind*.

Sbaragli, S. (2006). Primary School Teachers' beliefs and change of beliefs on Mathematical Infinity. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 5*, 2, 49-76.

Sbaragli, S. (2007). Le "proposte" degli insegnanti di scuola primaria concernenti l'infinito matematico. En Giacardi, L., Mosca, M., and Robutti, O. (eds.) (2007). *Conferenze e seminari 2006-2007.* 73-87.

Schoenfeld, A. H. (1985) *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Shama, G., and Movshovitz Hadar, N. (1994). Is intinity a wholer number? *Proecedings of the* XVIII PME, 2, Lisboa. 265-272.

Stavy, R., and Berkovitz, B. (1980). Cognitive conflict as a basic for teaching qualitative aspecis of the concept of temperature. *Science Education*, *28*, 305-313.

Tall, D. (1980). The notion of intinity measuring number and its relevance in the intuition of infmity. *Educational Studies in Mathematics*, *11*, 271 -284.

Tirosh, D. (1990). Inconsistencies in students' mathematical constructs. *Focus on Learning Problems on Mathematics*, *12*, 111-129.

Tsamir, P. (2000). La comprensione dell'infinito attuale nei futuri insegnanti. *La matematica e la sua didattica*, *2*, 167-207.

Tsamir, P., and Tirosh, D. (1992). Students' awareness of inconsistent ideas about actual inlinity. *Proceedings of the* XVI PME, Durham NH, 90-97.

Tsamir, P., and Tirosh, D. (1994). Comparing infinite sets: intuition and representation. *Proceedings of the* XVI PME, 2, Lisboa. 345-352.

Tsamir, P., and Tirosh, D. (1997). Metacognizione e coerenza: il caso dell'infinito. *La matematica e la sua didattica*, *2*.122-131.

Waldegg, G. (1993). La comparaison des ensembles infinis: un cas de resistance à l'instruction. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, *5*, 19-36.

Volver al índice de Conferencias

Objetos Matemáticos y Prácticas Constitutivas. La Génesis de la Topología de Vecindades

Luis Carlos Arboleda
Universidad del Valle, Cali, luis.carlos.arboleda@gmail.com

Resumen. La axiomatización de la topología de espacios abstractos es un paso fundamental en el desarrollo de las estructuras matemáticas del siglo XX. Por otra parte, las vecindades constituyen el recurso privilegiado para seleccionar y organizar las estructuras de la topología general, y garantizar el estudio fecundo de los problemas más importantes de la teoría de funciones. Las primeras estructuras topológicas determinadas por la convergencia de sucesiones y la métrica, aparecieron en los trabajos de Fréchet preparatorios de su tesis doctoral (Fréchet, 1904) y (Fréchet, 1906). Aunque el propio Fréchet, Hilbert, Riesz, Moore y otros matemáticos hicieron aportes significativos a la caracterización de la topología del espacio abstracto a través de las vecindades, la presentación axiomática que hoy utilizamos fue formulada inicialmente por Hausdorff en sus conferencias de Bonn de 1912 y luego en su célebre obra *Fundamentos de la teoría de conjuntos* (Hausdorff, 1914). En esta conferencia solo estudiaremos los trabajos de Fréchet y Hausdorff sobre las vecindades.

En cuanto a las concepciones de ambos autores que inspiraron sus prácticas matemáticas constitutivas de este objeto, en el caso de Fréchet las estructuras topológicas se introducen y estudian como parte del programa del Análisis General que apunta a extender las propiedades fundamentales del cálculo infinitesimal al dominio de las funciones generalizadas o funcionales. Este enfoque se reclama de la "analiticidad" leibniziana, y está orientado por un cierto ideal de "categoricidad de los espacios abstractos" (Fréchet, 1928). En cuanto a Hausdorff, se mostrará que algunas características del estilo estructural moderno de los *Fundamentos de la teoría de conjuntos* se pueden encontrar en sus trabajos filosóficos tempranos, y se basan en su "determinación" de escoger entre varias presentaciones generales de la topología del espacio, aquélla con la axiomática más sencilla y menos redundante posible. Este programa condujo a Hausdorff e incluso al mismo Fréchet y a otros matemáticos de su escuela, a preferir las vecindades porque permitían desembarazarse de las dificultades de lo numerable que conlleva el uso de la convergencia secuencial.

Palabras clave: Historia de Matemáticas, Topología de Vecindades, Objeto Matemático, Fréchet, Hausdorff.

1. INTRODUCCIÓN

A comienzos del siglo XX el Análisis Funcional estudiaba la clase de funciones numéricas definidas sobre conjuntos de líneas, funciones reales, sucesiones numéricas y otros objetos. El campo no estaba aún unificado y la investigación se adelantaba en una pluralidad de teorías, cada una determinada por la naturaleza del dominio de la variable (Arboleda y Recalde, 2003). El aporte de matemáticos como Volterra, Hadamard y Fréchet consiste en reconocer la necesidad de introducir dos extensiones.

En la primera extensión los objetos del campo son funciones numéricas definidas sobre conjuntos de naturaleza cualquiera. Esto implica que la teoría adquiere una *unidad de primer orden* en la cual se hace abstracción de la naturaleza de la variable.

La segunda extensión genera el nuevo campo matemático que Fréchet denominó *Análisis General* (Fréchet, 1928) cuyos objetos son funciones abstractas, no exclusivamente numéricas, definidas sobre conjuntos de puntos de naturaleza cualquiera. Estas funciones generalizadas se denominarán *funcionales*. Esta generalización busca darle a la teoría una *unidad de segundo orden* en la cual se haga abstracción tanto de la naturaleza de la variable como de la naturaleza de los valores de la función.

El objetivo inmediato del programa de investigación del Análisis General era extender aquellas propiedades fundamentales del cálculo infinitesimal al dominio de las funcionales. En esta dirección se impone la necesidad de reconocer una condición estructural del espacio en el cual se define la funcional, su *geometría intrínseca* a través de determinada relación de proximidad entre sus puntos, es decir, la topología del espacio. En la publicación (Fréchet, 1904) se generaliza por primera vez a la clase de las funcionales continuas la propiedad de Weierstrass sobre la existencia del extremo de una función real continua en un intervalo cerrado y acotado.

2. FRÉCHET Y LA GÉNESIS DE LAS PRIMERAS ESTRUCTURAS TOPOLÓGICAS

En varios de sus trabajos históricos sobre el Análisis, particularmente en su historia de los espacios completos, Dugac reconoce que "Fréchet abrirá con su tesis una nueva época en el análisis, caracterizada por un florecimiento de espacios nuevos y por la búsqueda de las propiedades características de estos espacios que condujo a "estructuras" a la vez flexibles y ricas para responder a las aplicaciones más importantes en el análisis." (Dugac, 1984).

En efecto, en su tesis (Fréchet, 1904) Fréchet introduce por primera vez una estructura topológica en un espacio abstracto. Sea una clase *L* de elementos de naturaleza cualquiera. Fréchet define la convergencia de una sucesión (a_n) de tales elementos con base en las siguientes condiciones:

(i) Si $a_n = a$, para $n = 1, 2, \ldots$, entonces (a_n) converge a a;

(ii) Si (a_n) converge a a, entonces (a_{k_n}) converge a a para toda sucesión (a_{k_n}) de (a_n).

Es el llamado *espacio L* de Fréchet, una clase L de elementos indeterminados en la cual la convergencia de sucesiones generalizadas está determinada por las condiciones (i) y (ii). Fréchet define las partes compactas *E* del espacio *L* (como generalizaciones de los intervalos de *R*) y enuncia así la extensión del teorema de Weierstrass en *L*: Toda funcional continua en un conjunto compacto y cerrado *E* y alcanza su cota superior y su cota inferior en *E* (Fréchet, 1904).

Un espacio abstracto es una clase o conjunto de elementos de naturaleza homogénea pero cualquiera, en la cual se ha definido la noción de *proximidad* entre tales elementos. El problema de determinar las propiedades infinitesimales de las funcionales está *lógicamente precedido* por el problema de establecer las propiedades infinitesimales de los conjuntos abstractos.

La generalización de segundo orden escapa a la intuición pues el objeto funcional es de naturaleza cualquiera y está definido en espacios de naturaleza cualquiera dotados de una estructura topológica (convergencia generalizada). Esta situación es elevada a la categoría de programa de investigación por Hadamard (Hadamard, 1912):

«El *continuo funcional* –es decir la multiplicidad obtenida haciendo variar continuamente una función de todas las maneras posibles-, no ofrece a nuestro entendimiento, ninguna imagen simple. La intuición geométrica no nos enseña nada, *a priori*, al respecto. Estamos obligados a poner remedio a esta ignorancia, y solo podemos hacerlo analíticamente, creando un capítulo de la teoría de conjuntos para el uso del continuo funcional.»

Fréchet creó una teoría de conjuntos especialmente concebida para permitir el estudio *analítico* del continuo funcional. De ahí el título de su obra más conocida: "Teoría de los Espacios abstractos como Introducción al Análisis general" (Fréchet, 1928). Años más tarde afirmará que el estudio de espacios abstractos por su estructura topológica "evita la repetición fastidiosa de teorías y demostraciones exactamente idénticas en el fondo, aunque relativas a dominios de objetos de naturaleza diversa: números, curvas, superficies, funciones, series, grupos, variables aleatorias, etc., etc." (Fréchet, 1933).

Fréchet reconoce en su tesis que las clases *L* son excesivamente generales y no permiten la extensión de ciertas propiedades de los conjuntos lineales, v. gr. la propiedad de que el derivado de cualquier conjunto es cerrado. Entonces considera necesario imponerle ciertas restricciones a las clases *L* (Fréchet, 1906):

"1° Tales restricciones deberían poder enunciarse independientemente de la naturaleza de los elementos considerados; 2° Deberían satisfacerse para las clases de elementos que intervienen lo más frecuentemente en las aplicaciones; 3° Deberían proporcionar la generalización que se está buscando de los teoremas sobre conjuntos lineales y funciones continuas."

Entonces introduce una nueva clase de espacios cuya generalidad cumple estas restricciones. Es la clase *V* ("V" de vecindad), en donde las "vecindades" están definidas en términos de una función distancia de la siguiente manera (Fréchet, 1906): A cada par de elementos A y B de naturaleza cualquiera de la clase *V*, se le asigna un número llamado "vecindad" $(A,B) = (B,A) \geq 0$ que cumple las siguientes propiedades:

(i) $(A,B) - 0$ si y solamente si $A - B$;

(ii) existe una función positiva $f(\varepsilon)$, tal que $f(\varepsilon)$ tiende a 0 para ε muy pequeño y para la cual $(A,C) \leq f(\varepsilon)$ si $(A,B) \leq f(\varepsilon)$ y $(B,C) \leq f(\varepsilon)$ para todo A, B, C de la clase *V*.

Conviene aclarar que en los años siguientes Fréchet continuó desarrollando sus investigaciones sobre la topología de las vecindades de manera independiente de Hausdorff cuya obra de 1914 solamente conoció en 1919. Estos trabajos de Fréchet, en conexión con Riesz, Moore, Hausdorff y otros autores han sido estudiados en (Arboleda, 1980).

Fréchet introduce en su tesis la noción moderna de *espacio completo* para una clase *V* (Fréchet, 1906): "Diremos que una clase *V* admite una generalización del teorema de Cauchy si toda sucesión de elementos de esta clase, que satisfacen las condiciones de Cauchy, tiene un elemento límite." Así mismo introduce el objeto de *espacio métrico* bajo la denominación de clase *E, E* de *écart* (distancia). A todo par de elementos A, B asocia un número $(A,B) \geq 0$ que verifica las siguientes propiedades (Fréchet, 1906):

"(i) La distancia (A,B) es nula cuando A y B son idénticos;

(ii) Si A, B, C son tres elementos cualesquiera, siempre se tiene que $(A,B) \leq (A,C) + (C,B)$."

Fréchet demuestra que la distancia es una vecindad, es decir que toda clase *E* es una clase *V*. Uno de los problemas de mayor interés en la investigaciones topológicas de los años 1920 fue el problema de las condiciones suficientes y necesarias para que una clase *V* sea clase *E*. Es decir, el problema de las *metrizaciones* de un espacio abstracto.

Las prácticas constitutivas de objetos matemáticas no se pueden estudiar al margen de las concepciones y valores de los matemáticos sobre tales objetos. Fréchet reconoce a lo largo de su carrera que sus investigaciones en Topología General y Análisis General se inspiraron en el ideal leibniziano del análisis de los principios que resume en el siguiente precepto (Fréchet, 1933):

"Quienes prefieren avanzar en los detalles de las ciencias desprecian las investigaciones abstractas y generales. Quienes profundizan en los principios entran raramente en las particularidades. En cuanto a mi, le doy igual importancia a lo uno y lo otro porque he encontrado que *el análisis de los principios* facilita el avance de las invenciones particulares."

También se podría reconocer que su práctica de constitución de objetos abstractos está marcada por la búsqueda leibniziana de una *matemática de las formas*. Una matemática que permita formular en el registro del pensamiento simbólico aquello que nos permite ver la percepción. Lo cual conlleva, tanto para Leibniz como para Fréchet, un trabajo de generalización que tenga las siguientes caracteristicas:

(i)introducir en el análisis *procedimientos de combinatoria* que prescindan de lo infinitesimal;

(ii) interpretar convenientemente la ley de continuidad para generalizar propiedades de lo finito a lo infinito, y

(iii) conocer los objetos matemáticos en el universo simbólico de su representación.

3. Hausdorff y la formalización de la topología de vecindades

En la noticia histórica del volumen de su *Topología General* (Bourbaki, 1940), Bourbaki reconoce que:

"Con Hausdorff comienza la topología general como se la entiende actualmente. Retomando la noción de vecindad, supo escoger entre los axiomas de Hilbert para las vecindades del plano aquellos que podían dar a su teoría toda la precisión y al mismo tiempo toda la generalidad deseables. El capítulo en el que desarrolla las consecuencias continúa siendo el modelo de teoría axiomática, abstracta pero bien concebida para adaptarse a las aplicaciones. Este fue el punto de partida natural de las posteriores investigaciones sobre la topología general."

En efecto, la axiomática de las vecindades de Hausdorff para la topología de un espacio abstracto se encuentra en el capítulo VII sobre "Conjuntos de puntos en espacios generales" de los *Fundamentos de la teoría de conjuntos* (Hausdorff, 1914). (Seguimos aquí la selección y traducción de los apartes correspondientes en (Dugac, 2003)). Al introducir el primer parágrafo sobre "Vecindades", Hausdorff afirma que:

"La teoría de conjuntos ha celebrado su más bello triunfo en la aplicación a los conjuntos de puntos de los espacios, en la clarificación y la consolidación de los fundamentos geométricos."

Antes de presentar la forma general del sistema de axiomas sobre las vecindades para un espacio abstracto Hausdorff lo *interpreta* para un espacio métrico. Procede como si la ilustración del objeto le permitiera justificar la pertinencia de su escogencia (p. 211):

"Pero para generar inmediatamente una imagen concreta, comencemos por vecindades especiales que se definen a través de la distancia. Entendemos por un *espacio métrico* un conjunto E en el cual se hace corresponder a dos elementos (puntos) x y y cualesquiera un número real no negativo, su *distancia* $\overline{xy} \geq 0$ y además exigimos seguidamente la validez de los axiomas siguientes sobre las vecindades:

(α) (Axioma de simetría). Siempre se tiene que $\overline{yx} = \overline{xy}$.

(β) (Axioma de coincidencia). Siempre se tiene que $\overline{xy} = 0$ si y solamente si $x = y$.

(γ) (Axioma de desigualdad triangular). Siempre se tiene que $\overline{xy} + \overline{yz} = \overline{xz}$."

Hausdorff define enseguida una *vecindad* U_x de un punto x en un espacio métrico E, como el conjunto de puntos y cuya distancia a x es más pequeña que un número positivo dado.

Después de precisar que de acuerdo con la tradición de sus antecesores emplea la designación de espacio abstracto para indicar que sus elementos son de naturaleza cualquiera, introduce el sistema de axiomas que caracterizan el espacio topológico (p. 264):

"Por espacio *topológico* entendemos un *conjunto* E, cuyos elementos (puntos) x pertenecen a un subconjunto U_x, que llamamos vecindad de x, y que verifica los siguientes *axiomas de vecindades*:

(A) Para todo $x \in E$, existe una vecindad U_x y $x \in U_x$.

(B) Si U_x y V_x son vecindades de x, existe otra vecindad de x, W_x, tal que $W_x \subseteq U_x$ y $W_x \subseteq V_x$.

(C) Si $y \in U_x$, existe un U_y tal que $U_y \subseteq U_x$.

(D) Si $x \neq y$, existen U_x y U_y tales que $U_x \cap U_y = \emptyset$."

Sabemos que este último axioma caracteriza la condición de separación de los llamados *espacios de Hausdorff*. Hausdorff define (p. 315) el concepto de *espacio métrico completo,* como aquel espacio métrico en el cual toda sucesión de Cauchy ("sucesión fundamental") converge. En palabras de Fréchet, el espacio métrico completo es la clase que admite la generalización del teorema de Cauchy. Luego Hausdorff demuestra que todo espacio métrico puede extenderse en un espacio métrico completo.

En sus conferencias de Bonn de 1912 Hausdorff interpreta las vecindades como el interior de esferas con centro en puntos de un espacio euclidiano *E* de dimensión *n*. El sistema de axiomas es equivalente al de *Fundamentos de la teoría de conjuntos* (1914) salvo el (B): "Toda intersección de dos vecindades de un punto contiene una vecindad del punto". Este axioma se enuncia en 1912 así:

"Dadas dos vecindades de un punto U_x y U'_x, $U_x \subset U'_x$ o bien $U_x \supset U'_x$."

Como se observa en (Taylor, 1985), Hausdorff aclara en 1914 que la topología del espacio puede fundamentarse indistintamente en las nociones de distancia, convergencia secuencial o vecindades, pero escoge axiomatizar las vecindades por varias consideraciones.

En primer lugar, porque la noción de vecindad es más general que la de distancia, y permite deducir de ella una teoría de conjuntos de puntos válida tanto para la recta y el plano, como para las superficies de Riemann, los espacios de dimensión finita e infinita y los espacios de curvas y superficies.

En segundo lugar, porque entre varias presentaciones generales de la teoría debe escogerse *aquella con la axiomática más sencilla y menos redundante posible.* En este sentido las vecindades son preferibles porque permiten desembarazarse de las dificultades de lo numerable que conlleva el uso de la convergencia secuencial.

Hausdorff subraya que la generalidad no debe traducirse en grandes complicaciones y, al menos en las características principales de la teoría, debe acompañarse de la simplificación y la protección contra los errores de razonamiento derivados de una intuición defectuosa:

“Finalmente, en este procedimiento lógico-deductivo nos protegemos de los errores a los que nos puede conducir la intuición. Esta pretendida fuente de conocimiento – cuyo valor heurístico obviamente no se cuestiona- se nos revela a menudo tan insuficiente y poco confiable en las partes más sutiles de la topología de conjuntos de puntos, que *solo podemos confiar en ella después de un examen cuidadoso*.”

Como recuerda (Punkert, 2008) a lo largo del siglo veinte se estableció la práctica estándar de dotar a las teorías matemáticas de una base conjuntista y axiomática. La creación de teorías axiomatizadas, como la topología, sirvió entre otras cosas para exponer los *elementos estructurales* comunes a varias situaciones concretas o áreas especiales que quedaban subsumidas como casos especiales de una teoría abstracta. De esta manera se obtenía una considerable simplicidad, unidad y economía de pensamiento. Los *Fundamentos de Teoría de Conjuntos* son pioneros en este sentido, y abrieron la vía al desarrollo de las matemáticas modernas.

Hausdorff adoptó este enfoque en la lectura temprana de los *Fundamentos de la Geometría* de Hilbert (Hilbert, 1903). En su conferencia de 1903 sobre *Tiempo y Espacio*, escribió (Punkert, 2008):

“Las matemáticas están completamente alejadas tanto del sentido real que se le atribuye a sus conceptos, como de la validez real que se le adjudica a sus proposiciones. Sus conceptos indefinibles son objetos de pensamiento escogidos arbitrariamente; sus axiomas también son arbitrarios y libres de toda contradicción. Las matemáticas son la ciencia del pensamiento puro, como lo es la lógica formal.”

Hausdorff expresa esta misma opinión sobre el espacio (Punkert, 2008):

“El espacio es una construcción lógica, es decir, incluye todas las proposiciones que se obtienen como consecuencia lógica de axiomas escogidos arbitrariamente, dado que los conceptos que se emplean son objetos de pensamiento escogidos arbitrariamente.”

Para Hilbert el conocimiento geométrico involucra algo más que lógica y pensamiento conceptual. Según la “Introducción” de los *Fundamentos de la Geometría,* la “intuición espacial” parece ser la fuente del conocimiento geométrico (Hilbert, 1903):

“Establecer los axiomas de la geometría e investigar sus interconexiones es una tarea que ha sido discutida en numerosos y excelentes tratados de la literatura matemática desde Euclides. *Esta tarea consiste en el análisis lógico de nuestra intuición espacial”*.

Hilbert distingue entre *presentación axiomática* de la geometría cuya finalidad es “establecer los axiomas de la geometría”, y *método axiomático*, el instrumento para el “análisis lógico de nuestra intuición espacial” (Majer, 2006). La “intuición espacial” es un recurso importante para la presentación axiomática. El análisis de la “intuición espacial” mediante el método axiomático permite reconocer las conexiones lógicas entre los axiomas.

4. BIBLIOGRAFIA

Arboleda, L. C. (1980). *Contribution à l'étude des premières recherches topologiques d'après l'œuvre et la correspondance de Maurice Fréchet.* Tesis de Doctorado, París.

Arboleda, L. C. (1980). *Las primeras investigaciones sobre los espacios topológicos.* Sociedad Colombiana de Matemáticas. X Coloquio Colombiano de Matemáticas, Paipa.

Arboleda, L. C. y Recalde, L. C. (2003). Fréchet and the Logic of the Constitution of Abstract Spaces from Concrete Reality, *Synthese*, vol. 134, 245-272.

Arboleda, L. C. (2007). Modalidades constructivas y objetivación del cuerpo de los reales, *Revista Brasileira de Historia da Matemática*, Especial n°1: 215-230.

Bourbaki, N. (1940). *Topologie Générale. I. Structures topologiques. II. Structures uniformes,* Paris, Hermann.

Bourbaki, N. (1974). *Éléments d'histoire des mathématiques.* Paris, Hermann.

Dugac, P. (1984). Histoire des espaces complets. *Revue d'Historie des Sciences,* 3-28.

Dugac, P. (2003). *Histoire de l'Analyse. Autour de la notion de limite et de ses voisinages*. Paris, Vuibert.

Fréchet, M. (1904). Généralisation d'un théorème de Weierstrass. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, vol. 139, 848-850.

Fréchet, M. (1906). Sur quelques points du calcul foncionnel. *Rendiconti Circolo Mat. Palermo*, vol. 22, 1-74.

Fréchet, M. (1928). *Les Espaces Abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'Analyse Générale.* Paris, Gauthier-Villars.

Fréchet, M. (1933). *Notice sur les travaux scientifiques de Maurice Fréchet*. Paris, Hermann.

Hausdorff, F. (1914). *Grundzüge der Mengenlehre.* Leipzig, Veit.

Hilbert, D. (1899). *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig: Teubner. English translation of the Tenth German edition: Foundations of Geometry, Open Court, LaSalle, 1990.

Manheim, J. (1964). *The Genesis of point set Topology*. Oxford.

Purkert, W. (2008). The Double Life of Felix Hausdorff/Paul Mongré. *Math. Intellingencer*, vol. 30, 36-50.

Majer, U. (2006). The relation of Logic and Intuition in Kant's Philosophy of Science, particularly Geometry. *Western Ontario series in Philosophy of Science,* 47-66.

Tarrés Freixenet, J. (1994). La topología general desde sus comienzos hasta Hausdorff. *Historia de la matemática en el siglo XIX*. 2ª. Parte, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Madrid.

Taylor, A. E. (1985). A Study of Maurice Fréchet: II Mainly about his Work on General topology, 1909-1928. *Archive for History of Exact Sciences*. Vol. 34, 279-380.

Volver al índice de Conferencias

Evaluación, Impacto en el aula

Ferley Ortiz Morales
ICFES, Bogotá, fortiz@icfes.gov.co

Resumen. Las evaluaciones externas, más que ofrecer algunos resultados a partir de los cuales se obtiene información acerca de la clasificación de estudiantes o colegios, provee elementos fundamentales que pueden servir como insumo para desarrollar acciones pedagógicas en el aula. En este sentido, es importante revisar algunos criterios que se tienen en cuenta para el diseño y aplicación de pruebas objetivas y marcar la diferencia entre este tipo de evaluaciones y las que son de tipo formativo, que exigen un mayor acompañamiento al estudiante. No obstante, aunque distintas, ambas contienen elementos que bien aprovechados pueden complementarse y proveer la generación de actividades más significativas para los procesos de aprendizaje.

Palabras clave: Validez, Confiabilidad, Objetividad, Evaluación estandarizada, Evaluación formativa.

1. ¿PARA QUÉ EVALUAR?

La evaluación es un proceso que se sigue a partir de la aplicación de instrumentos y el análisis de resultados que sirven de base para tomar decisiones. Escenarios naturales que dan sentido y pertinencia a las evaluaciones son por ejemplo, el ingreso a un programa de formación, el progreso en un proceso de aprendizaje, la efectividad de un proyecto curricular, el aprovechamiento de recursos de una institución educativa. Cada uno de ellos hace que las evaluaciones tengan intenciones distintas y por ende deberían llevar al diseño de instrumentos diferentes para capturar información. No es lo mismo tener un instrumento de selección, donde solamente se tienen en cuenta los mejores y como consecuencia debería contener retos que no todos los evaluados puedan superar, que medir el progreso en un programa de aprendizaje, donde los desafíos deberían estar graduados con distintos niveles de dificultad, pasando por lo mínimo, lo satisfactorio y lo avanzado.

Este es solo uno de los aspectos que vale la pena mirar en la evaluación para ampliar el espectro de posibles percepciones que por desconocimiento, o falta de interés, se tiene de ella.

2. EVALUACIÓN, PRIMERAS PERCEPCIONES

Cuando se piensa en evaluación, inmediatamente surge la imagen de una prueba escrita, en la cual los estudiantes deben responder preguntas, en su mayoría, con formato de opción múltiple con única respuesta. Esto obedece al impacto que tienen las evaluaciones estandarizadas, con las cuales las instituciones, programas y sujetos que hacen parte del proceso educativo, son medidos.

Este fenómeno aparece como problemático cuando los resultados de las pruebas estandarizadas son mal interpretados y generan consecuencias que se alejan de las intenciones sobre las cuales fueron pensadas y aplicadas las evaluaciones, lo que conlleva a que docentes y estudiantes, quienes son más vulnerables con las malas decisiones que se pueden tomar, teniendo como referencia los resultados de las pruebas, estigmaticen las evaluaciones y vean en ellas algo negativo que atenta contra su desempeño.

Antes que pretender salvar de responsabilidad a las evaluaciones externas por estos hechos, lo que planteo en el presente documento es la posibilidad de aproximar a los docentes, en este caso particular de matemáticas, a que conozcan algunos aspectos que pueden servir, en primera instancia para interpretar de mejor manera los resultados de las evaluaciones y poder tener elementos que generen una postura crítica fundamentada frente a estos; y posteriormente para adoptar herramientas con las que se pueden diseñar de mejor manera las evaluaciones que se desarrollan en el aula de clase y superar las limitaciones que pueden tener las pruebas estandarizadas.

3. CARACTERÍSTICAS DE LAS PRUEBAS ESTANDARIZADAS

Fundamentalmente, las pruebas estandarizadas siguen tres principios: **validez**, **confiabilidad** y **objetividad.** La **validez** se traduce en coherencia, que pasa por la estrecha relación entre: el objetivo de evaluación, el marco teórico de la misma y la forma cómo se evalúa. Si se mide competencia es eso lo que se debe evaluar y no la memoria o la comprensión lectora. La **confiabilidad** se refiere al grado de precisión o exactitud de la medida, en el sentido de que si aplicamos repetidamente el instrumento al mismo sujeto u objeto produce iguales resultados. Es el caso de una balanza o de un termómetro, los cuales serán confiables si al pesarnos o medir la temperatura en dos ocasiones seguidas, arrojan los mismos datos. La **objetividad** se refiere a que los resultados sean independientes de la actitud o apreciación personal del observador, por lo cual lo que se hace al evaluar es seguir estrcitamente unos parámetros previamente definidos que van a ser aplicados a todos los evaluados de la misma manera.

La principal limitación que tienen las pruebas estandarizadas está en su falta de dinamismo. Estas evaluaciones, tanto por costos como por el proceso mismo que se debe seguir para su aplicación, no se pueden ejecutar permanentemente, lo que sí se puede hacer en el aula de clase, donde se tiene mayor posibilidad de acercarse a los procesos de pensamiento que sigue un sujeto que se somete a una evaluación. Sin embargo, la aproximación al raciocinio del estudiante debe estar acompañada de criterios claros con los cuales se van a juzgar los avances y desarrollos que éste pueda tener.

4. CARACTERÍSTICAS DE LAS EVALUACIONES DE AULA

Las evaluaciones de aula, permiten que el docente reaccione inmediatamente frente a una mala interpretación o respuesta que pueda tener un estudiante frente a un estímulo o instrumento de evaluación, que de hecho, debería superar el formato de opción múltiple con única respuesta, ya que una de las ventajas que ofrece es el acceso directo a los procesos de pensamiento que desarrolla el estudiante, a través de la argumentación, la ejercitación de procedimientos y la interacción con el entorno.

Esto conlleva a generar instrumentos distintos de evaluación: pruebas de pregunta abierta, exposiciones, mentefactos, carpetas, que sirvan como herramientas para que el docente pueda observar los procesos más que los resultados o productos finales frente a las situaciones problema que se puedan plantear al estudiante.

Otra ventaja que pueden tener las evaluaciones de aula es que pueden servir como escenarios de participación por parte de los estudiantes, ellos pueden ser propositivos frente a sus instrumentos de evaluación y elegir, dentro de lo que el universo de posibilidades le ofrezca, cómo podrían ser evaluados.

A pesar de todas las bondades que ofrecen las evaluaciones de aula como posibilitadoras de procesos de formación, hay que tener cuidado con algunas prácticas que van en contravía de la consideración de algunos criterios que sí son tenidos en cuenta en las evaluaciones objetivas.

- **Subjetividad excesiva:** el docente, no dejará que los esfuerzos de un estudiante, por más que los resultados estén lejos de lo esperado, sean en vano, y terminará aprobando la intención más que el resultado mismo, afectando directamente la validez de cualquier instrumento de evaluación, y al mismo tiempo su confiabilidad –la del instrumento-.

- **Planteamiento de situaciones complejas:** Con el afán de desafiar a los estudiantes con situaciones problema "interesantes" y proponer retos que demanden procesos de pensamiento complejos, se proponen instrumentos con altos grados de dificultad, donde la mayoría de los estudiantes se sienten incómodos por no tener las herramientas suficientes para dar respuesta a ellos. Es común que en ocasiones, los instrumentos sean tan difíciles para los estudiantes que no arrojan información acerca de lo que ellos son capaces de hacer y solo se limitan a ser evidencia de que los evaluados no saben, con lo cual se atentará contra la confiabilidad del instrumento, ya que de antemano se sabe que los sujetos que participan en el proceso de evaluación aprenden de distinta manera y siguiendo diferentes ritmos.

- **Desatención a objetivos iniciales:** En ocasiones por cumplir con la orden de elaborar un instrumento que contenga un número determinado de preguntas, se "rellena" un documento con situaciones, o actividades no pertinentes que se alejan de los particulares objetivos de cada evaluación. La idea es que cada actividad o instrucción que contenga el instrumento, responda a una intención que le permita al evaluador mirar aspectos particulares que complemente la información que pueda obtener a partir de las otras.

Es importante destacar que aunque no están ajenas a errores, las evaluaciones estandarizadas cumplen con estos criterios, como consecuencia del rigor y la sistematicidad con que son construidas. Características que podrían adaptarse también a las evaluaciones en el aula, propendiendo con ello que apoyen los procesos educativos, es decir, que sean formativas.

5. EVALUACIÓN FORMATIVA

Si se tienen distintos tipos de evaluación, si se tienen criterios claros para valorar el desempeño de los estudiantes, se van a considerar mejores instrumentos para hacer de la evaluación una reflexión permanente y un profundo análisis del proceso educativo cuya prioridad no puede ser categorizar, excluir o juzgar. Debería ser un proceso continuo que tenga en cuenta información acerca del desempeño que tienen los estudiantes en la búsqueda del alcance de unos objetivos claros, como también sobre los resultados que dan cuenta de cómo los estudiantes hacen uso de los conceptos que han aprendido para solucionar problemas. Este es uno de los grandes aportes que arrojan los resultados de las evaluaciones externas, ya que además de ofrecer un marco conceptual validado por una comunidad de académicos expertos, investigadores y técnicos en evaluación, ofrecen alternativas para la interpretación de resultados que van más allá de una simple medida, o un número cualquiera.

En esta parte conviene revisar lo que se establece en algunas de las evaluaciones externas, nacionales e internacionales en torno a las matemáticas, tanto los objetos de evaluación, como los resultados que ha obtenido Colombia, lo cual, marca un panorama acerca de la situación de la educación matemática en el país.

6. EVALUACIONES EXTERNAS EN MATEMÁTICAS

Las evaluaciones que se citan a continuación son promovidas por el ICFES (Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación). Respecto al área de matemáticas es posible mencionar que no se centran en una rama específica de la disciplina –álgebra, geometría, aleatoriedad..,- sino que procuran involucrarlas a todas en mayor o menor proporción. Se propone al lector profundizar en cada una de ellas consultando la página web del ICFES. A continuación se presenta una tabla en la que se caracteriza cada una de las pruebas de matemáticas en las que Colombia participa.

Tabla No 1. Evaluaciones externas en matemáticas

Evaluación/ Tipo	Frecuencia de aplicación/ Población	Formato de evaluación	Objeto de evaluación	Resultados
Prueba SABER, 5º y 9º / Censal	Cada tres años /5º y 9º	Opción múltiple con única respuesta	**Competencias** **El razonamiento y la argumentación** cómo y porqué de los caminos que se siguen para llegar a conclusiones, justificación estrategias y procedimientos. **La comunicación, la representación y la modelación** expresión de ideas, interpretación de datos, uso de diferentes tipos de representación, **Planteamiento y resolución de problemas**, Ejecución de estrategias y verificación de resultados frente a condiciones de pertinencia.	En **quinto grado**, 31 de cada 100 estudiantes están en el nivel mínimo. Ellos son capaces de utilizar operaciones básicas para solucionar problemas, identificar información relacionada con la medición, hacer recubrimientos y descomposiciones de figuras planas, además de organizar y clasificar información estadística. El 17% de los estudiantes demuestra las competencias establecidas en el nivel satisfactorio, (Mirar caracterización en documento ICFES.) El 8% de los alumnos de ese grado se ubica en el nivel avanzado. (Mirar caracterización en documento ICFES.) En **noveno grado**, el 52% de los alumnos está en nivel mínimo de desempeño. (Mirar caracterización en documento ICFES. El 19% de los alumnos, se ubica en el nivel satisfactorio. Además de lo establecido en el nivel mínimo, estos estudiantes utilizan las propiedades de la potenciación, la radicación y la logaritmación para solucionar problemas; recurren a expresiones algebraicas y representaciones gráficas para modelar situaciones simples de variación; establecen relaciones entre los sólidos y sus desarrollos planos; reconocen y aplican movimientos rígidos a figuras planas en un sistema de coordenadas; comparan atributos medibles de uno o varios objetos o eventos; hacen conjeturas acerca de fenómenos Sólo el 3% demuestra un desempeño sobresaliente en el área.
Evaluación/ Tipo	**Frecuencia de aplicación/ Población**	**Formato de evaluación**	**Objeto de evaluación**	**Resultados**
PISA/Muestral	Cada tres años / estudiantes de	Opción múltiple	**Procesos matemáticos**: ***Formular situaciones***	El 38,8% de los estudiantes colombianos se ubicó por debajo del nivel 1, lo que indica que tienen

	15 años	simple/ múltiple compleja, pregunta abierta, prueba por computador	***matemáticamente***. Capacidad de las personas de reconocer e identificar oportunidades para utilizar las matemáticas, esto es, traducir un problema en un contexto natural a una forma matemática. ***Emplear conceptos, hechos, procedimientos y raciocinio matemático***. Capacidad de las personas de aplicar conceptos, hechos, procedimientos y raciocinios matemáticos para resolver problemas formulados matemáticamente. ***Interpretar, aplicar y evaluar los resultados matemáticos***. Habilidades de las personas para reflexionar sobre las soluciones, los resultados o conclusiones matemáticos, e interpretarlos en el contexto de los problemas de la vida real.	dificultades para usar la matemática con el fin de aprovechar oportunidades de aprendizaje y educación posteriores, pues no pueden identificar información ni llevar a cabo procedimientos que surgen de preguntas explícitas y claramente definidas. El 31,6% se clasificó en el nivel 1. Al sumar esta proporción con la de quienes están por debajo de ese nivel, se encuentra que el 70,6% de los alumnos no logra el desempeño mínimo establecido por PISA (nivel 2),. El 20,3% de los estudiantes se ubicó en el nivel 2; el 7,5% en el 3; y sólo el 1,8% restante en los niveles 4, 5 y 6. Estos resultados son muy preocupantes, pues además de ser los más deficientes entre las tres áreas evaluadas, contrastan con los de Shanghái, Finlandia y Corea, países en los que más de la mitad de los alumnos se clasificó por encima del nivel 3 (**Gráfico 6**). En Latinoamérica, Uruguay es el único país en el que más de la mitad de sus estudiantes alcanzaron o superaron el nivel 2 (52,4%). México y Chile tuvieron mejores resultados que las demás naciones de la región, aunque el 50,8% y el 51% de sus alumnos, respectivamente.
Evaluación/ Tipo	**Frecuencia de aplicación/ Población**	**Formato de evaluación**	**Objeto de evaluación**	**Resultados**
TIMSS / Muestral	Cada cuatro años/ cuarto y octavo	Opción múltiple simple/ pregunta abierta	*Conocer* hechos, procedimientos y conceptos que los estudiantes deben saber. Se partió de la base que cuanto más relevantes son los conocimientos de un estudiante, mayor será su capacidad para enfrentarse a situaciones problema *Aplicar*, habilidad de los estudiantes para poner en práctica conocimientos y conceptos para resolver problemas, contestar preguntas o crear representaciones. *Razonar*, capacidad de pensamiento lógico y sistemático, así como situaciones nuevas, contextos complejos y problemas que requieren el desarrollo de varios pasos para su resolución.	En TIMSS 2007 el promedio global en matemáticas de los estudiantes colombianos de cuarto grado fue 355 puntos, con una desviación estándar de 90. En octavo el promedio fue 380, con una desviación estándar de 79. Estos resultados son relativamente homogéneos y significativamente más bajos que el promedio TIMSS, y las diferencias con respecto a los de los cuatro países que obtuvieron los promedios más altos (Hong Kong, Taipéi, Singapur y Corea) son de más de 200 puntos. En cuarto grado, el 69% de los estudiantes colombianos mostró logros inferiores a los descritos en la prueba; el 22% se ubicó en el nivel bajo; el 7% en el medio, 2% en alto y menos del 1% en el avanzado. En octavo el 61% tuvo logros inferiores a los descritos en la prueba para ese grado; el 28% se ubicó en el nivel bajo, el 9% en el medio, el 2% en el alto y menos del 1% en el avanzado. Estos resultados muestran que casi las dos terceras partes de los alumnos presentan dificultades en el manejo de los conocimientos básicos de las matemáticas. En contraste, en Hong Kong y Singapur más del 40% de los estudiantes de cuarto grado se ubicó en el nivel avanzado y muy pocos tuvieron logros inferiores; en Estados Unidos el 31% de los estudiantes de octavo logró ubicarse en el nivel avanzado.

Los resultados de las pruebas externas evidencian la falta de aprehensión de los estudiantes respecto a las matemáticas, lo que tiene como consecuencia que no sea reconocida su utilidad para resolver situaciones problema.

A pesar de que por tradición, los métodos de enseñanza de las matemáticas hoy día siguen siendo magistrales, los resultados en pruebas como TIMSS muestran que los estudiantes no tienen los conocimientos que deberían tener para el grado en el que están. Al contrario, se ubican en los últimos lugares de clasificación.

El camino para transformar esta situación no es adoptar una posición radical frente a las evaluaciones externas, tampoco que obtener mejores resultados se convierta en el objetivo No 1 de la enseñanza de las matemáticas. Más allá de esto, lo que se propone con base en esta información, es que sea posible diseñar aplicar y analizar, en el aula, actividades que promuevan un mejor aprendizaje de las matemáticas por parte del estudiante, a partir del verdadero desarrollo de la evaluación formativa, y que, sin ser el objetivo primordial, reflejen unos resultados más óptimos en futuras aplicaciones de las mismas.

Referencias

Acevedo, M. y otros. (2008). Propuesta de fundamentación conceptual área de matemáticas. Bogotá: ICFES.

Álvarez, J. (2001). *Evaluar para conocer, examiner para excluir*. Madrid: Morata.

ICFES, (2011). Informe de resultados prueba PISA. Bogotá, Colombia.

ICFES, (2007). Informe de resultados prueba TIMSS. Bogotá, Colombia.

ICFES, (2010). Informe de resultados prueba SABER. Bogotá, Colombia.

Rávela, P. (2006). Fichas didácticas para comprender las evaluaciones educativas. Montevideo: PREAL.

Shepard, L. (2006). *La evaluación en el Aula*. Universidad de Colorado. USA. 623-646.

Volver al índice de Conferencias

Programas de enriquecimiento, un ejemplo, los Clubes de Matemáticas

Lyda Constanza Mora Mendieta
Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C.,
lmendieta@pedagogica.edu.co

Resumen. Los Clubes de Matemáticas son un espacio que en la actualidad diferentes instituciones educativas han acogido como actividades extracurriculares que buscan el fomento y desarrollo de habilidades matemáticas, pero sobre todo la atención a estudiantes que gustan de las matemáticas y que encuentran en los Clubes, un espacio para enriquecerse no sólo intelectual sino socialmente. Con esta memoria se pretende motivar a los profesores lectores a crear sus propios Clubes en las instituciones donde laboran.

Palabras clave: enriquecimiento, club, talento.

1. INTRODUCCIÓN

Durante cerca de seis años (2005-2010), la autora de este documento coordinó el desarrollo del Club de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, con la entrega de cerca de setenta maestros en formación quienes desarrollaban sus prácticas en el marco de esta propuesta educativa, la colaboración de formadores de profesores que también le apostaron a este proyecto y dedicaron mucho de su tiempo (María Rosa González, Yancy Campos, Leonardo Ángel, Francisco Camelo y Carlos Luque) y naturalmente con el aval institucional. Durante esos seis años fueron varias las instituciones educativas de Bogotá (la mayoría de ellas, distritales) y sus alrededores que participaron en el Club nominando estudiantes destacados en matemáticas, muchos de ellos hoy en día estudiantes de diferentes carreras profesionales. De esta maravillosa experiencia han surgido también varios trabajos de pregrado y un par de tesis de maestría, se abrió una línea de investigación dedicada a la proposición de actividades matemáticas para estudiantes talentosos en matemáticas que gestó un proyecto de investigación durante 2008 y 2009. Hoy, a pesar de que el Club no continúa su funcionamiento en la Universidad, este espacio de enriquecimiento continúa su desarrollo en la Institución Educativa General Santander (Soacha), bajo la orientación de las profesoras Eliana Alfonso y Paola Balda, licenciadas en matemáticas de la Universidad Distrital y egresadas del Programa de Maestría de la Universidad Pedagógica, con el liderazgo académico de la Universidad Pedagógica Nacional a través de la Práctica Educativa del Departamento de Matemáticas; este Club, a diferencia del inicialmente constituido en la Universidad, atiende no sólo a estudiantes de la secundaria sino a niños de la educación infantil y primaria, con excelentes resultados, uno de ellos, la manifestación, a viva voz, del *amor* que tienen hacia las matemáticas estos pequeños. ¿Qué es Club? ¿Qué se hace en un Club? Son estos los interrogantes que se desarrollarán en este escrito

2. PROGRAMAS DE ENRIQUECIMIENTO

Así como los profesores manifiestan el poco interés demostrado por algunos estudiantes por el estudio de las matemáticas, todos reconocen que siempre, en toda aula, hay por lo menos un estudiante que gusta de las matemáticas, ¿qué atención se le presta a estos niños o jóvenes?, ¿qué estrategias son utilizadas en las instituciones educativas para potenciar este gusto y para aportarle a sus procesos educativos? El MEN (2006), proponen dos estrategias en particular, la integración escolar y el agrupamiento (a través de Aulas Especializadas, Escuela satélite, o Agrupamiento específico), también incluye otras estrategias de apoyo como el enriquecimiento (a través de la estimulación –asignación de mayor intensidad horaria a cierta asignatura- o la condensación curricular –adaptación o supresión de ciertas temáticas y la inversión de este tiempo en actividades que potencien el talento del estudiante-), la aceleración (ingreso temprano al preescolar o primaria, promoción de curso, promoción de materia, ingreso temprano a la Universidad).

El enriquecimiento es una opción interesante. Según Jiménez (2000) existe una triple dimensión del enriquecimiento: orientado al contenido, orientado al proceso u orientado al contenido[1].

2.1. ENRIQUECIMIENTO ORIENTADO AL CONTENIDO.

Se entiende como el que suele darse para profundizar en áreas del currículo y suele darse fuera de los horarios habituales, popular en establecimientos que tienen superdotados, se cita como ejemplo los cursos de los sábados. En ocasiones dirigidos a enfatizar o a desarrollar una habilidad.

2.2. ENRIQUECIMIENTO ORIENTADO AL PROCESO

Este tipo de enriquecimiento lo contienen programas que desarrollan en los estudiantes habilidades de pensamiento de alto nivel o estrategias metacognitivas orientadas a productos de alto nivel, se acude a modelos especiales de solución de problemas, pidiendo que estos métodos los apliquen en su estudio independiente, la objeción planteada es nuevamente el desligar de la materia de estudio, dificultando la transferencia de habilidades.

2.3. ENRIQUECIMIENTO ORIENTADO AL PRODUCTO.

Su énfasis radica en la capacitación a estudiantes en la elaboración de productos que se categorizan en simples, compuestos, tangibles o intangibles, la estrategia privilegiada es el ejemplo y la motivación. Se interesa por los altos niveles de pensamiento y el dominio de determinadas habilidades.

Los Clubes de Matemáticas pueden configurarse en una estrategia de enriquecimiento orientada al contenido, al proceso y al producto. Desde cada una de tales opciones se aporta a la educación de los jóvenes que gustan de las matemáticas, se amplía su saber sobre lo que son las matemáticas, sobre lo que significa la actividad matemática y los procesos que ello involucra y se desarrollan habilidades de comunicación al trabajar en productos propios de la vida académica como lo es la participación en eventos, al interior de las mismas instituciones escolares, por ejemplo.

3. ACTIVIDADES EN UN CLUB DE MATEMÁTICAS

Son varios los temas (conceptos y procesos) que se han abordado en el Club de Matemáticas desde los diversos cursos que se han ofrecido, diseñados por maestros en formación acompañados por profesores del Departamento de matemáticas; se mencionan algunos de ellos (Otros ejemplos de actividades a desarrollar en un Club pueden consultarse en www.estalmat.org o en www.ttm.unizar) con el ánimo de que los lectores interesados puedan replicar cursos como éstos en sus instituciones escolares en el marco de Programas de enriquecimiento como los Clubes de matemáticas:

[1] La descripción de estos tipos de enriquecimiento está tomada de Mora y Herrera (2010).

1. Elementos de Geometría: Visualización, Generalización, Conceptualización.
2. Elementos de Aritmética y Álgebra: Conteo, Medición y localización, Diseño.
3. Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: Contar e Inducir, poliminós y patrones de números a partir de dibujos basados en poliminós.
4. Iniciación a los teselados: Teselados regulares, semiregulares, demirregulares, notaciones para algunos tipos de teselados, teselados con polígonos irregulares, algunas técnicas para teselar.
5. Matemática y Arte II: Estudio de estructuras algebraicas clásicas (por ejemplo, grupos cíclicos y diédricos) a partir de diseños artísticos como: rosetones, frisos y tapices y, principalmente, los movimientos rígidos del plano.
6. De los poliminós a la divisibilidad -Poliminós-: Caracterización y reglas de formación de los poliminós, familiarización y desarrollo de actividades encaminadas a algunos aspectos de la teoría de números, estudio de polyamantes e identificación de sólidos que se forman con éstos..
7. Particiones de números -A contar sin contar I-: Representación de números a partir de sumas de otros, diagramas de Ferrer, técnicas de conteo, grafos garbosos. Técnicas de conteo en matemáticas discretas (variaciones, combinaciones y permutaciones) y su aplicación en el juego del Kakuro a través de las particiones numéricas.
8. Contar sin contar II: Técnicas de conteo en matemática discreta, con un énfasis en el establecimiento de nexos entre los números de Stirling de clases I y II con el conteo del número de subconjuntos de un conjunto y el número de particiones, Triángulo de Pascal.
9. Geometría dinámica del trilado: Estudio de propiedades de los trilados (triángulos que no consideran su interior, sólo sus lados, de ahí el nombre) utilizando el software Cabri.
10. Redes: Acercamiento a la teoría de grafos: características, tipos de grafos, teorema de Euler, construcción de grafos, eulerización de redes, optimización.
11. Criptografía: Estudio elemental de la estenografía, criptografía y el criptoanálisis a partir de técnicas clásicas como la sustitución, la clave César, módulos y matrices, entre otras.
12. Geometría plana: conceptualización de algunos temas básicos de la geometría como área de algunas figuras geométricas, triángulos y sus rectas notables, tipos de polígonos, criterios de congruencia entre triángulos.
13. Sucesiones y arte: se tratan algunas sucesiones básicas relacionadas con el arte como lo son las sucesiones de Fibonacci y su relación con el número áureo, las espirales, las fracciones continuas, algunas sucesiones geométricas y aritméticas relacionadas con pinturas famosas como las Omar Rayo.
14. Geometría 3D: Se establecen algunas nociones de la geometría plana y del espacio; se construyen, caracterizan y establecen diferencias entre los sólidos Platónicos, de Arquímedes, Kepler y Poinsot, los cuales son elaborados con material concreto (origami principalmente), y otros son modelados con el software educativo Cabri 3D. Se estudia la característica de Euler y algunas nociones propias de los sólidos como caras, vértices, aristas y volumen.
15. Fractales: Se estudian algunas características de los fractales, tales como; la autosimilitud y la dimensión, se construyen y reconocen fractales clásicos como la curva de Koch, el conjunto de Cantor, la alfombra de Sierpinski, y el triángulo de Sierpinski.
16. Introducción a la teoría de juegos: Como su nombre lo indica, en este curso se hace un acercamiento al estudio de la teoría de juegos; a partir de juegos usuales como ajedrez, triqui y nim, los estudiantes encuentran estrategias ganadoras que se discuten y se establecen como tales, para con ello determinar qué es una estrategia, desde la teoría misma; se presentan otros juegos, menos usuales, con el ánimo de ampliar la idea intuitiva de juego y llegar a una más teórica; también se estudian clases de juegos y algunos términos importantes de la teoría:

juegos simétricos y asimétricos, juegos de suma cero, punto de equilibrio, maximin y minimax, entre otros.

17. Arte y estructuras algebraicas: Se estudiaron estructuras algebraicas clásicas (por ejemplo, grupos cíclicos y diédricos) a partir de diseños artísticos como: rosetones, frisos y tapices o grupos cristalográficos, todo basado en el estudio de las isometrías.
18. Generalización aritmético-algebraica: Se presentaron algunos problemas de tipo numérico o geométrico a partir de lo cual fuera posible hacer generalizaciones verbales o simbólicas donde se hiciera hacer traducciones y buscar equivalencias.
19. Matemática y Literatura: En este curso se leyó el libro El Tío Petros y la Conjetura de Goldbach, siendo el documento transversal del espacio, con base en éste se trabajaron algunas temáticas como: La idea de teorema, la conjetura de Goldbach, el teorema de Fermat y los números primos, también se estudiaron algunas biografías de matemáticos famosos y se hicieron lecturas de fragmentos de otros libros como El hombre que calculaba y El diablo de los números.

Otros títulos de los cursos ofrecidos son:

1. Matemáticas y Astronomía.
2. El problema de la proporcionalidad.
3. Factorización desde el álgebra y la geometría.
4. Regletas de Cuiseinaire para la visualización, la clasificación, la generalización y el conteo.
5. Origami para el reconocimiento de figuras geométricas como triángulos (tipos) y cuadriláteros convexos.
6. Técnicas de Escher.
7. Tangram para el reconocimiento de la semejanza de triángulos.
8. Iniciación a la teoría de números para estudiantes de primaria (tipos de números y criterios de divisibilidad)

REFERENCIAS

Campos, Y., González, M. y Mora, L. (2007). *Informe proyecto de Facultad: El Club de matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional: Un espacio para el estudio de las matemáticas con niños y niñas de colegios distritales entre 10 y 15 años* (Proyecto de Facultad 2007). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional, Departamento de Matemáticas.

Jiménez, C. (2000). *Diagnóstico y educación de los más capaces*. Colección *Varia.* Madrid: UNED/MEC.

MEN (2006). *Orientaciones para la atención educativa a estudiantes con talentos o capacidades excepcionales*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Mora, L. y Herrera, A. (2010). *Proyecto de intervención educativa con alumnos de alta capacidad*. Trabajo presentado como requisito para la culminación del curso Experto Universitario en Diagnóstico y Educación de Alumnos con Alta Capacidad. UNED-España (No publicado).

Mora, L. (2011). *Descripción del Club de Matemáticas*. Manuscrito no publicado. Universidad Pedagógica Nacional: Bogotá.

Volver al índice de Conferencias

Funciones no diferenciables

Rafael Felipe Chaves Escobar
Universidad Distrital Francisco José de Caldas. rafach_25@hotmail.com

Milton Lesmes Acosta
Universidad Distrital Francisco José de Caldas. mlesmes@udistrital.edu.co

Resumen. A partir de una revisión breve de la noción de derivada de funciones entre números reales, se contrapone el de la no diferenciabilidad de una función en puntos de su dominio. Se propone el estudio de casos de no diferenciabilidad, incluyendo el de la no diferenciabilidad en todo punto de una función continua definida en los números reales. Uno de los aspectos importantes de la presentación analítica y computacional de funciones con la característica de ser continuas diferenciables en ningún punto, se debe a su aplicabilidad en teoría de probabilidades y procesos estocásticos, específicamente en el estudio de integrales con respecto a trayectorias aleatorias o movimiento Browniano, denominadas integrales estocásticas.

Palabras clave: Función, Límite, Diferenciable.

1. FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE LA DIFERENCIACIÓN.

La noción de derivada es fundamental en el estudio de la variación de una función entre números reales.

Definición: Dado A un subconjunto abierto de los números reales y dada una función $f: A \to \mathbb{R}$. f se dice diferenciable en $a \in A$ si existe el límite $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Este límite se denomina la derivada de f en a, se denota generalmente como $\frac{df}{dx}(a)$ si f define sus imágenes por $f(x)$, o como $f'(a)$. Este límite también es igual a $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

El estudio de este límite permite caracterizar la derivada sobre funciones en aspectos como los que se aprecian en la figura 1, como los son la recta tangente, la no existencia del límite.

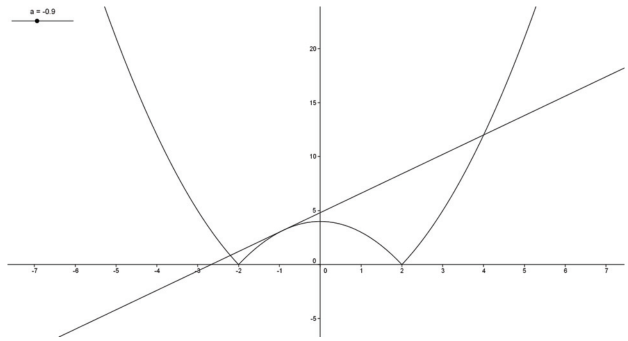


Figura 1

De los aspectos mencionados se considerará el de la no existencia de la derivada.

Cómo es posible que no exista la derivada?

La respuesta a esta pregunta generalmente implica una reflexión sobre el significado de la misma; se revisan funciones polinómicas, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, etc y todas tienen derivada.

Con un poco de reflexión se encuentra un ejemplo seguramente similar al más conocido, $f(x) = |x|$ no es diferenciable en $x = 0$.

La recta tangente como la mejor aproximación lineal.

En relación con la derivada de una función en un punto, se puede definir intuitivamente la recta tangente en un punto como la recta que contiene el punto y mejor aproxima la gráfica de la función cerca del punto. Pero precisando:

Definición: Una recta $T(x)$ que pasa por el punto $(a, f(a))$ se llama recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$, si para cualquier otra recta $L(x)$ que pasa por $(a, f(a))$, existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - T(x)| \leq |f(x) - L(x)|$ para todo $x \in (a - \delta, a + \delta)$.

Mediante esta definición, se muestra la imposibilidad de recta tangente a $f(x) = |x|$ en $x = 0$, es conveniente efectuar esta revisión al igual que la recta tangente a x^2 y a x^3 en x= 0. La Figura 2 muestra algunas de las consecuencias de la existencia de la derivada utilizando la definición de la recta tangente de este apartado.

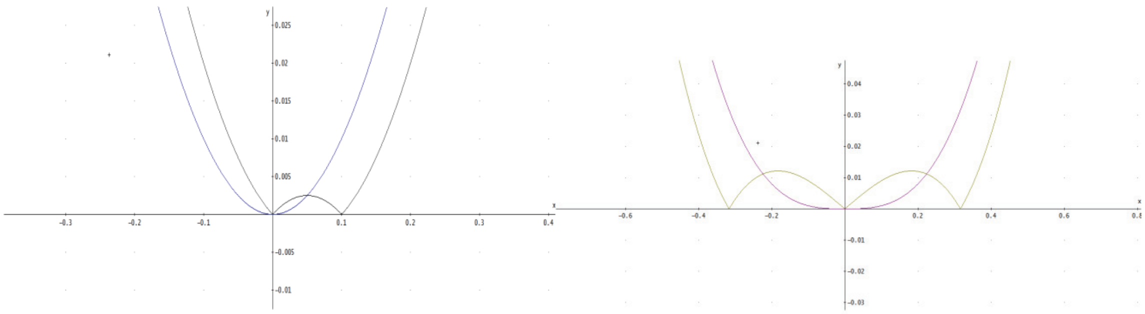


Figura 2

Uno de los resultados sobre diferenciabilidad: Si f es diferenciable en x entonces es continua en x. Si f es continua en x entonces no necesariamente es diferenciable en x.

Ahora bien, como son las funciones que resultan al derivar una función?. Uno de los problemas relacionados con las derivadas es el de encontrar una función diferenciable en todos los números reales, pero con derivada no continua.

La solución de éste problema nos conduce al estudio de funciones exóticas o patológicas que como generalmente ha ocurrido, conduce a nuevas preguntas y problemas más profundos. (recordemos el descubrimiento de los números irracionales por la escuela de Pitágoras).

Funciones de Clase C^1.

Una función de clase C^1 es diferenciable y con derivada continua.

Cómo plantear bien un problema sobre una función que no sea de clase C^1?

Ejemplo de una función que es diferenciable pero no es de clase C^1, es decir su derivada no es continua.

$$f(x) = x^2 sen \frac{1}{x}$$

Su gráfica se muestra en la figura 3.

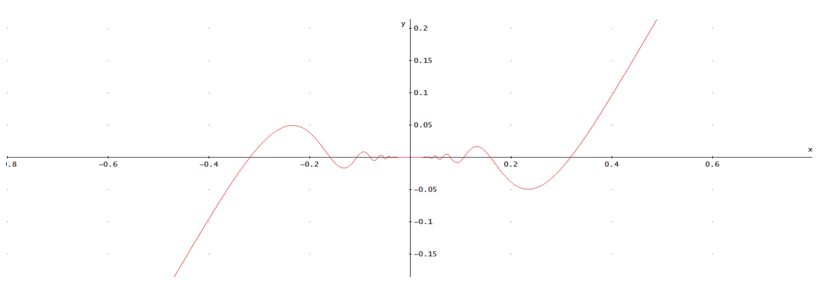


Figura 3

La derivada de la función $f(x) = x^2 sen\frac{1}{x}$ se muestra en la figura 4.

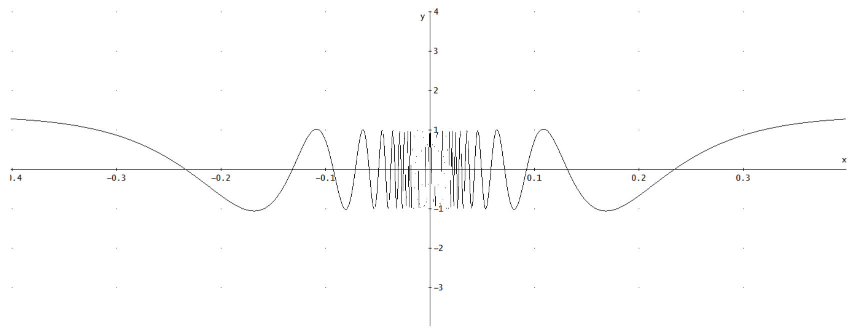


Figura 4

Existencia de una función continua no diferenciable en ninguna parte:

En la figura 5 se muestra una función que fue construida, mediante la suma de las funciones que se presentan en la figura 6

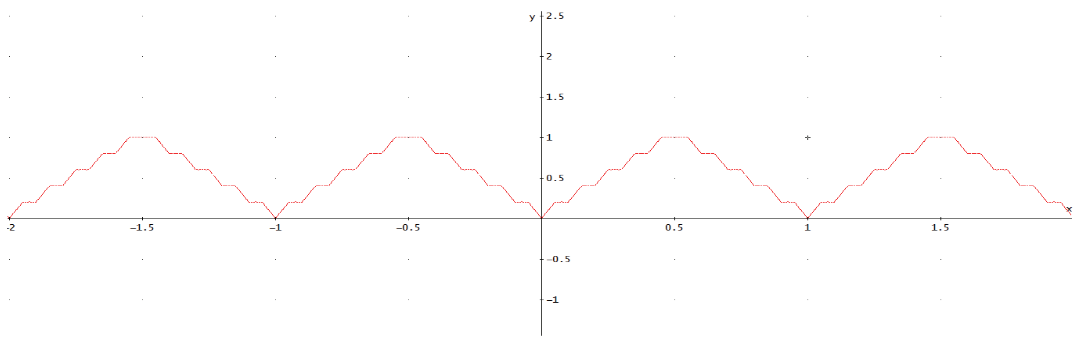


Figura 5

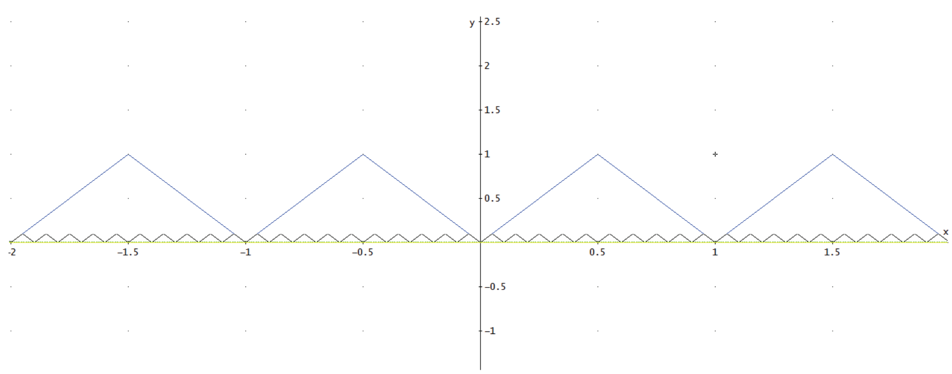


Figura 6

La función considerada es $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n x\}}{10^n}$, en donde el corchete $\{\ \ \}$ es la distancia al entero más próximo.

2. PROBLEMAS DE LA TEORÍA DE LA DIFERENCIACIÓN

Calculando el $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ para el caso $a=0$ con la función $f(x)=x^2 sen\frac{1}{x}$ y la no existencia de este límite para ningún a con la función $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{10^n x\}}{10^n}$, naturalmente conduce al análisis y consideraciones profundas de estos problemas de las funciones y sus derivadas.

REFERENCIAS

Apostol T. (1996). *Análisis Matemático*. 2ª Ed. México: Reverté

Riesz F. Nagy Sz. (1955). *Functional Analysis*. New York: Ungar.

Spivak M. (1965). *Calculus on Manifolds.* Perseus Books Publishing.

Volver al índice de Conferencias

Verdad, Falsedad y Demostrabilidad: El Teorema de Incompletitud de Gödel

Jorge Alejandro Ruiz Vega
Universidad Pedagógica Nacional

Resumen. *El teorema de Incompletitud de Gödel tuvo una fuerte incidencia en los fundamentos de las Matemáticas y es un tema que, desde mi experiencia en el pregrado de la Universidad Pedagógica Nacional, debería ser más difundido en la formación de licenciados en Matemáticas. Por ello, a continuación se presenta un panorama general del significado de este teorema y se comentan las implicaciones que este tuvo frente a algunos de los sistemas formales más amplios construidos en Matemáticas, como lo son la Teoría de Conjuntos de Zermelo-Frankel y el sistema de Principia Mathematica propuesto por Russell y Whitehead. También se expone un esbozo de la idea de la demostración del mismo y se presenta otra demostración informal y no muy rigurosa, pero que permite resaltar el ingenio de Gödel de una manera bastante explícita.*

1. INTRODUCCIÓN

A través de la historia de las Matemáticas, han surgido diversos problemas cuya solución fue en su momento todo un reto para los matemáticos de la época y muchos años más tarde se llegó a demostrar que simplemente dicha resolución era imposible. Es así que se tienen los problemas célebres de los griegos: la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo, así como el problema de expresar la diagonal del cuadrado como cociente entre dos enteros, teniendo como unidad el lado del mismo, o el problema de encontrar una expresión con radicales que permita hallar las raíces de una ecuación de grado quinto o superior.

Por ende, la imposibilidad en Matemáticas ha tenido un papel bastante relevante:

> El descubrimiento de la imposibilidad ha ejercido una notable influencia en el desarrollo de las matemáticas, a veces dando lugar a nuevas y poderosas teorías. (Martinón, 2006, p. 157).

De esta manera, el surgimiento de las geometrías no euclidianas se dio gracias a la imposibilidad de demostrar el quinto postulado de Euclides a partir de los otros cuatro.

Ahora bien, el contexto histórico de la época en que surgió el teorema de Incompletitud de Gödel, está enmarcado por el surgimiento de varias paradojas y contradicciones alrededor de los comienzos del siglo XX. Principalmente, se destacan Cantor y la paradoja del mayor cardinal, cuando en ese entonces se aceptaba la existencia del conjunto de todos los conjuntos, al igual que Frege y su monumental tratado titulado “Las leyes básicas de la Aritmética” el cual fue publicado con gran tristeza por parte del mismo, debido a que la obra de toda su vida quedaba en entredicho gracias a la paradoja de Russell (Careaga, 2002). Por consiguiente, el ambiente de la época estaba marcado por una gran preocupación de los matemáticos frente a este tipo de hallazgos, ya que si en una teoría se obtenía una contradicción, entonces:

> En tal teoría todas las proposiciones y sus negaciones serían teoremas…invalidando completamente la teoría. Este es el motivo por el cual la aparición de una sola contradicción causa tanta inquietud, zozobra y desesperación. (Muñoz, 2002, p. 36).

De igual forma, el hecho de que no había errores en la obtención de estas paradojas, ponía de manifiesto un fallo en los fundamentos de la Matemática misma. Luego, para salir de esta crisis, se desarrollaron diferentes escuelas en Matemática: Logicismo, Formalismo y Constructivismo, intentando restablecer así la veracidad de la misma (Ernest, 1991).

Así pues, surgía el programa de formalización total del razonamiento matemático, encabezado por Hilbert, y con el objeto de demostrar la consistencia de las Matemáticas. Para ese entonces, el monumental tratado Principia Mathematica de Russell y Whitehead, y la emergente Teoría de Conjuntos, eran algunos sistemas formales en los cuales se puede expresar toda la Matemática conocida y lo único que hacía falta era demostrar la consistencia de ellos mismos (Gutiérrez, 1999). Precisamente, alrededor del año 1930, Kurt Gödel se encontraba trabajando en dicha labor, bajo el programa de Hilbert, y finalmente en 1931, es publicado el trabajo titulado “Sobre sentencias formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines”, en el cual se plantea y se demuestra el famoso teorema de Incompletitud de Gödel y en donde, como menciona Gutiérrez, quién estuvo más cerca de culminar el programa de formalización de Hilbert, fue quién precisamente le dio el tiro de gracia.

2. EL TEOREMA DE INCOMPLETITUD DE GÖDEL Y SUS CONSECUENCIAS

Aunque existen diversas maneras de mencionar el teorema de Gödel, como se puede consultar en las referencias bibliográficas, esencialmente el Teorema consta de dos partes y plantea lo siguiente:

- ✓ En todo sistema axiomático finito, formal y consistente existen aseveraciones cuya verdad o falsedad es imposible demostrar dentro de ese sistema.
- ✓ Si A es un sistema consistente de axiomas, entonces la consistencia de A no es demostrable en A

Sin embargo, antes de entrar en detalles de la idea de la demostración del mismo, se hace énfasis en las consecuencias que este teorema produjo. Inicialmente, una de ellas es que a partir de este teorema aparecen diferencias entre lo que se entiende por Verdad o Falsedad y Demostrabilidad:

> Gödel no se interesa en saber si una aseveración es falsa o verdadera. Lo que afirma es que en cualquier sistema lógico basado en axiomas, existen aseveraciones cuya verdad o falsedad no vamos a poder decidir. Antes de Gödel esto ni siquiera se consideraba, pues lo interesante de una aseveración era poder demostrar que era verdadera o bien que era falsa. A partir de Gödel aparece una diferencia muy sutil entre verdad/falsedad y demostrabilidad. (Careaga, 2002, p. 9).

Seguidamente, debido al teorema de Gödel, todo el programa de formalización propuesto por Hilbert se derrumbó y quedó demostrado, como bien menciona Ernest (1991), que no todas las verdades matemáticas se pueden representar como teoremas en un determinado sistema formal y de igual manera, el sistema no puede garantizar su seguridad a través de él mismo. Además, en cuanto a la filosofía de las Matemáticas, surgieron nuevas concepciones o posturas frente a esta, ya que por una parte se encontraban los partidarios de la visión absolutista de las Matemáticas, en la cual, según Ernest, la verdad matemática es de certeza absoluta y esta ciencia es la única con una estructura de conocimiento que es completamente verídica, en contraste con la visión falibilista, en la cual las Matemáticas son corregibles y se encuentran en constante proceso de revisión y corrección, es decir, el conocimiento matemático es falible.

En este punto, es importante resaltar la visión que como docentes de Matemáticas se pueda tener frente a estas mismas, puesto que como plantea Ernest (1991), el adoptar una de esas dos filosofías, Absolutismo o Falibilismo, determinará la enseñanza de las Matemáticas. Igualmente, es necesario destacar que el hecho de que las Matemáticas no puedan justificar su consistencia en sí mismas no es algo que se tenga que ver de una forma totalmente negativa:

> La pérdida de "la certeza" (Kline, 1980) no representa la pérdida del conocimiento. Existe una situación análoga en el desarrollo de la física moderna. La teoría general de la relatividad requiere de abandonar el absoluto, en favor de marcos de referencia universales con una perspectiva relativa. En la teoría cuántica, el principio de incertidumbre de Heisenberg, significa que esa noción de determinar con certeza la posición y momentum de una partícula también debe ser dejada. Pero no vemos que se acabe el conocimiento como marco absoluto de certeza. Por el contrario vemos que el conocimiento se acrecienta, colocando límites dentro de los cuales podemos conocer. Relatividad e incertidumbre representan un gran avance en el conocimiento. (Ernest, 1991, p. 17).

Incluso, para el conocimiento humano en general, como plantea Careaga (2002), las implicaciones del teorema de Gödel son enormes y todos tenemos que aceptar las limitaciones inherentes en el potencial del conocimiento, ya que por más que se desee nunca se llegará a la verdad absoluta y definitiva del universo, puesto que esta limitación es aplicable para cualquier sistema finito de saberes.

a. ESBOZO DE LA IDEA DE LA DEMOSTRACIÓN

A continuación se presenta un esbozo general de la idea de la demostración del teorema de Gödel, tomado del artículo de Claudio Gutiérrez titulado "El teorema de Incompletitud de Gödel (Versión para no iniciados)", publicado en 1999, en la revista Cubo de la Universidad de la Frontera en Chile. Es válido aclarar que en el documento original divulgado por Gödel en 1931, él mismo esboza la idea de la demostración antes de presentarla rigurosamente, y precisamente ese esbozo es expuesto por Claudio Gutiérrez en el artículo en mención.

En primer lugar, se toma un sistema formal en el cual se desarrolla la demostración. Gödel usó el sistema formal de Principia Mathematica. Aquí se toma el sistema formal que usa Gutiérrez, el cual es denominado como N, y se puede pensar como una axiomatización de la aritmética de los números naturales. Es decir, N es un sistema de axiomas y reglas de deducción que permiten deducir afirmaciones sobre los números naturales. Es así que, el objetivo de la demostración es encontrar una oración F del sistema N, que tenga la propiedad de que ni ella ni su negación sean deducibles en el sistema N[1]. Luego se presentan uno a uno los pasos generales de la demostración:

1) Se establece el lenguaje del sistema formal, el cual consta de signos primitivos, variables, constantes lógicas, etc.
2) Se establece un método de reglas para reconocer lo que Muñoz (2002), denomina fórmulas bien formadas del lenguaje del sistema, de modo que se tengan oraciones o proposiciones de

[1] Gödel establece unas condiciones mínimas que debe cumplir el sistema formal, en las cuales Gutiérrez no entra en demasiado detalle, pues para efectos de entender la idea de la demostración, es suficiente con tener claro que se parte de un sistema consistente finito de axiomas.

3) Se hace una codificación de todas las fórmulas bien formadas a través de números naturales. De esta manera, a cada fórmula F le corresponde un único número natural n, y el código de F se determinará por [F]. Es así que Gutiérrez presenta lo que se conoce como numeración de Gödel haciendo uso de los números primos, como se muestra a continuación:

   Primero que todo, se codifican cada uno de los símbolos que se usan en el lenguaje del sistema, a través de números impares, de manera que a cada símbolo le corresponde un único natural.

"1"…1 "="…5

"+"…3 "x"…7

   Ahora bien, al escribir una fórmula bien formada como por ejemplo $x=1+1$, inicialmente a esta fórmula le corresponde la sucesión de números (7, 3, 1, 3, 1) de acuerdo a los valores establecidos anteriormente para esos símbolos. Luego, en la sucesión de los números primos y para este caso, se toman como potencias de los primeros cinco números primos, precisamente a cada uno de los números impares que corresponden a su respectivo símbolo.

"$x=1+1$"…$2^7 3^3 5^1 7^3 11^1 = 586776960$

   De esta forma, y tomando provecho de la descomposición en números primos, se garantiza que a cada fórmula le corresponda un único número natural n.

4) Se hace una aclaración respecto a las fórmulas con una variable libre, de manera que se establece que ellas en sí, codifican conjuntos de números y todas estas fórmulas se ordenan en una lista:

$F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$,…

   Así, por ejemplo la fórmula $F_1(x)$ representará el conjunto de todos los números n para los cuales $F_1(n)$ es deducible en el sistema N.

5) Se demuestra que todos los conceptos meta-matemáticos que se necesitan, como "fórmula", "ser deducible en N", "sustitución de variable", etc., se pueden codificar en el sistema formal N.

6) En particular, se demuestra que existe una fórmula, que es denominada Dem(x), en el lenguaje de N, que codifica el conjunto de todas las oraciones que son deducibles en N. De esta manera Dem(x) tiene la propiedad de que si F es una oración en N, entonces la oración Dem([F]) es deducible en N si y sólo si F es deducible en N.

7) En seguida se define un conjunto de números, que se denota con la letra K, a través de la siguiente fórmula:

$n \in K \Leftrightarrow \neg \mathrm{Dem}([F_n(n)])$

   Y en este punto Gutiérrez hace la aclaración de que de acuerdo a la definición de Dem dada en el paso 6), es posible concluir que $n \in K$ si y sólo si la oración $F_n(n)$ no es deducible en N.

8) Se menciona que el conjunto K es formalizable en N, además de que hay una fórmula de la lista en 4) que codifica al conjunto K. Se supone que es la q-ésima de la lista. Luego, se tiene que $n \in K$ si y sólo si $F_q(n)$ es deducible en N.

9) Finalmente, se considera el caso de la fórmula $F_q(q)$. Si se supone que $F_q(q)$ es deducible en N, entonces por 7), $q \notin K$. Pero ello significa por 8) que $F_q(q)$ no es deducible en N. Ahora bien, si se supone que $F_q(q)$ no es deducible en N, entonces por 7), $q \in K$. Pero esto significa por 8) que $F_q(q)$ es deducible en N.

> Es decir, es imposible que $F_q(q)$ sea deducible en N. También es imposible que la negación de $F_q(q)$ sea deducible en N, pues suponerlo implica que $F_q(q)$ no es deducible, debido a la consistencia de N, y esto lleva a otra contradicción.

Después de este esbozo general de la idea de la demostración, Gutiérrez plantea nuevamente el teorema de Incompletitud de Gödel, en términos de la fórmula $F_q(q)$: "La oración $F_q(q)$ es indecidible en N, es decir en N no se puede deducir $F_q(q)$ ni su negación".

b. UNA DEMOSTRACIÓN NO MUY RIGUROSA.

En seguida, se presenta una demostración bastante informal pero que permite evidenciar de una manera muy clara y explícita el ingenio de Gödel para demostrar su teorema. Esta demostración es presentada por Alfredo Careaga en la serie Hipercuadernos de Divulgación Científica, y está basada en el libro de Rudy Rucker: Infinity and The Mind.

La demostración se da a manera de relato y consiste en suponer que existe una computadora llamada la Máquina de la Verdad Universal (MVU), la cual puede responder con la verdad, cualquier pregunta hecha por cualquier ser humano. Es así que un día, un joven llamado Kurt Gödel escribe la siguiente frase, a la cual llama G:

G = La MVU no dirá que esta frase es cierta

Luego Gödel le pregunta a la MVU si la frase G es verdadera o es falsa, y entonces la máquina hace un extenso análisis y no contesta la pregunta. Seguidamente, el joven Gödel encuentra una verdad que la MVU no puede afirmar, puesto que la frase G es cierta, pero la computadora es incapaz de decidir su verdad o falsedad, y por ende la MVU no es una máquina verdaderamente universal.

> Gödel fue capaz de encontrar para cualquier sistema axiomático finito una ecuación polinómica compleja cuya solución existe si y sólo si G es verdad. Es decir, que G no es una frase vaga y mal definida que se basa en juegos de palabras. Al contrario, G es un problema matemático específico cuya solución conocemos, pero que el sistema axiomático en cuestión es incapaz de decidir si es cierta o falsa. La consecuencia demoledora del teorema de Gödel es que dicho sistema axiomático finito, cualquiera que este sea, no puede representar una teoría completa y definitiva de las matemáticas. (Careaga, 2002, p. 19).

Por último, las demostraciones presentadas aquí se dieron con el ánimo de tener un panorama general respecto al Teorema de Incompletitud de Gödel. No obstante, debido a la complejidad del mismo, no resulta práctico presentar la demostración completa con todo el rigor matemático requerido. Simplemente, se quiso resaltar grosso modo la idea de la demostración y algunas de las consecuencias de este, de manera que se pueda difundir más esta temática entre los licenciados en Matemáticas y otorgar así nuevas perspectivas para afrontar los desafíos que se tienen en la formación matemática.

REFERENCIAS

Careaga, A. (2002). El teorema de Gödel. *Serie: Hipercuadernos de Divulgación Científica, Universidad Nacional Autónoma de México 1*, 3-29. Recuperado el 7 de Marzo de 2011 de http://isaiasgarde.myfil.es/get_file?path=/careaga-alfrede-teorema-godel.pdf

Ernest, P. (1994). *The Philosophy of Mathematics Education. Studies in Mathematics Education*. (Y. Astudillo, H. Castillo, E. Guacaneme, G. Obando & L. Torres, Trads.) Londres, Inglaterra: The falmer press. (Trabajo original publicado en 1991).

Gutiérrez, C. (1999). El Teorema de Incompletitud de Gödel (Versión para no iniciados). *Revista Cubo, Universidad de la Frontera, 1*, 68-75. Recuperado el 5 de Marzo de 2011 de http://sw.deri.org/~juan/weblog/godel.pdf

Martinón, A. (2006). Kurt Gödel: La cumbre del imposible matemático [Versión Electrónica]. Revista *Números,* 64, 157-160.

Muñoz, J. (2002). *Introducción a la teoría de conjuntos* (4ta Ed.) Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Volver al índice de Conferencias

La ruta hacia una visión estructural abstracta en las matemáticas y los aportes de Dedekind a la noción estructura algebraica

Vicente Erdulfo Ortega Patiño
Universidad de Nariño

Resumen. En siglo XIX la historia del álgebra demostró que el camino hacia la concepción de generalizaciones iba más allá de lo abstracto, esto estuvo determinado por el desarrollo de programas concretos, como la resolución de ecuaciones, el desarrollo de una teoría de los números algebraicos, así como, a partir de un nuevo punto de vista relacionado con la búsqueda de propiedades invariantes bajo transformaciones proyectivas, el haber llegado a plantear el célebre Programa de Erlangen de 1872. Así se aclaró que el surgimiento de noción de estructura requería tomar conciencia progresiva de fenómenos de isomorfismos, lo cual, junto con los estudios de Cantor y Dedekind, sobre la teoría de conjuntos, permitiría pensar las matemáticas en forma unificada, superando la concepción de la división artificial de las mismas. Este trabajo presenta la estructura algebraica como resultado y nuevo objeto de la matemática moderna fundada en la concepción de Dedekind.

Palabras clave: abstracción, estructura algebraica

1. Introducción

La *matemática clásica*, en los comienzos del siglo XIX, se encontraba dividida en partes caracterizadas por la naturaleza de los respectivos objetos estudiados como el caso de los números enteros en la aritmética, las ecuaciones en el álgebra, el espacio y las figuras en la geometría y las funciones en el análisis y al acercarse al *enfoque estructural de la matemática moderna,* también el llamado *criterio de autoevidencia,* heredado del control ontológico permanente sobre los objetos, propio de la concepción euclidiana, involucrado en el enlace entre *intuición y rigor*, entró en crisis por cuanto, poco a poco, los matemáticos llegaron a la convicción de que, en esta disciplina, no tenía importancia la consideración de la naturaleza de los objetos, sino las relaciones entre objetos indefinidos y las reglas que rigen las operaciones entre ellos. Este proceso de cambio de concepción, denominado *desontologización,* posibilitaría el paso hacia las estructuras como nuevos objetos de la *matemática moderna*. Pero para desprenderse de dicha concepción tradicional y *poder pensar en forma unificada* habría que esperar hasta los tiempos y los aportes de Cantor y Dedekind.

2. La corriente abstractiva y los aportes de la escuela británica

Los aportes de la escuela británica al desarrollo de las matemáticas, desde la iniciación del siglo XIX, fueron el resultado de los esfuerzos por dar respuesta a los problemas que planteaban las matemáticas en aquella época y por superar la parálisis que había sufrido el trabajo de los matemáticos ingleses durante el siglo XVIII. Hacia 1800 la situación en la que se encontraban las

Los aportes de la escuela británica al desarrollo de las matemáticas, desde la iniciación del siglo XIX, fueron el resultado de los esfuerzos por dar respuesta a los problemas que planteaban las matemáticas en aquella época y por superar la parálisis que había sufrido el trabajo de los matemáticos ingleses durante el siglo XVIII. Hacia 1800 la situación en la que se encontraban las matemáticas era motivo de muchas expresiones de insatisfacción. Este estado de cosas se ponía de manifiesto en el uso libre de varios tipos de números reales y aún de números complejos, sin la definición precisa de los mismos y sin la justificación de las operaciones respectivas. Pero las mayores inquietudes provenían del hecho de que las letras se manipulaban como si tuvieran las propiedades de los números enteros, pese a lo cual tenían validez los resultados de tales operaciones cuando las letras eran sustituidas por números cualesquiera.

La ausencia del desarrollo de la lógica de los diversos tipos de números, no permitía entender que estos tenían las mismas propiedades formales de los enteros positivos y de la misma manera, que expresiones literales que simplemente se mantenían para cualquier clase de números reales o complejos debían poseer las mismas propiedades. En otras palabras, esto significaba que el álgebra ordinaria era únicamente aritmética generalizada. La situación se presentaba como si el álgebra de expresiones literales poseyera una lógica en sí misma, la cual garantizaba su efectividad y corrección. Estaba planteado entonces el problema de justificar las operaciones con expresiones literales o simbólicas.

Durante el siglo XIX, el álgebra se enriqueció con la creación de nuevos objetos como los vectores, los cuaterniones, las matrices, las formas cuadráticas binarias, los números hipercomplejos, las transformaciones, las sustituciones y las permutaciones. Al romperse los cánones clásicos del álgebra, con criterio cada vez más abstracto, estos entes matemáticos se combinarían mediante operaciones y como resultado de la difusión del enfoque simbólico y de un proceso también de aritmetización, como en el caso de los números complejos, por ejemplo, el concepto de operación experimentaría después una ampliación, dando lugar al concepto básico de "*ley de composición*"[1], que pasó a ser el foco de investigación en álgebra y se aislaron las propiedades fundamentales como conmutativa, distributiva y asociativa, que la caracterizarían.

Guiados por el pensamiento de Leibniz, la mayoría de los matemáticos británicos, desarrollaron su trabajo haciendo especial énfasis en el problema del simbolismo formal operatorio. Ellos lograron darse cuenta de que la elección adecuada de un simbolismo hacía posible el desarrollo de la matemática, en tanto que la ausencia del mismo sería motivo de su estancamiento. En consecuencia, la búsqueda de simbolismos idóneos, el manejo formal de los mismos y su ampliación a campos de objetos cualesquiera son las características y las temáticas propias de esa época.

A partir de 1830 se inició, en Gran Bretaña, un movimiento orientado a reformar la enseñanza y modificar las notaciones introducidas por Newton, las cuales eran consideradas anticuadas. La reforma del álgebra emprendida por los miembros de la Analytical Society de Cambridge como Peacock, Herschel, Babbage, De Morgan, Hamilton y Boole, entre otros, tenía como propósito tratar de justificar las operaciones algebraicas que había que realizar en expresiones simbólicas o literales, ya que se carecía de explicaciones convincentes acerca de la lógica, el sentido y los referentes de dichas operaciones. Así entonces, los matemáticos ingleses iniciaron la reforma encaminada a dilucidar y desarrollar una cierta lógica que pudiera garantizar la validez de las operaciones algebraicas estableciendo el llamado "*principio fundamental de la permanencia de las leyes formales*", según el cual "expresiones iguales indicadas en los términos generales de la aritmética universal han de seguir siendo iguales si las letras dejan de designar «cantidades» simples, y por tanto también si se altera la interpretación de las operaciones".

[1] La noción de ley de composición resultaría ser fundamental para desarrollar las principales estructuras algebraicas que surgirían posteriormente como grupo, subgrupo, subgrupo invariante, anillo, cuerpo, ideal, entre otras.

de la matemática continental. Todo lo cual llevaría a desarrollar la *tendencia a la abstracción* como una característica del trabajo de los matemáticos ingleses de esa época.

Según Ferreirós, parte de las dificultades que acompañaron en sus inicios al álgebra simbólica se originaron en el hecho de que la exposición de Peacock resaltaba demasiado la vía ascendente que mediante la generalización puramente formal pasaba del álgebra aritmética al álgebra simbólica y por el contrario, tenía en cuenta demasiado poco otra vía descendente, que a partir de los principios del álgebra simbólica debía llevar a interpretaciones efectivas. Agrega que, a raíz de todas las críticas recibidas, tanto Peacock como De Morgan, enfatizaron con más claridad la importancia de la noción de interpretación.

Como es conocido, Cayley, Hankel, Dedekind, Pasch y Schröder, entre otros, tomaron muy en cuenta la lección de Peacock, y, observa Ferreirós que, a pesar de esto, es en este punto donde también se encuentra la respuesta al interrogante de por qué el álgebra simbólica británica no fue un álgebra estructural, puesto que ella no propuso programa de investigación característico alguno. Sin embargo, los británicos participaron en la búsqueda de sistemas de números hipercomplejos y en el desarrollo del cálculo de operaciones, temas estos estudiados también en el continente. Hace referencia también a que la historia del álgebra en el siglo XIX demuestra que el camino hacia el enfoque moderno "*estructural*" más que por lo meramente "*abstracto*", estuvo determinado por el desarrollo de ciertos programas de contenido bien concreto, como por ejemplo, el problema clásico de la resolución de ecuaciones, que contó con los aportes de Lagrange, Cauchy, Abel y Galois principalmente. Pero el más novedoso fue el encaminado a desarrollar una teoría de los números algebraicos con los trabajos de Gauss, Kummer, Kronecker y Dedekind.

De esta manera se pone en claro que para que surgiera la noción de estructura se requería de la toma de conciencia progresiva de *profundos fenómenos de isomorfismos*, es decir, de formas de comportamiento operacional similares, entre teorías muy diversas.

Teniendo en cuenta estas condiciones, Ferreirós puntualiza que en el álgebra simbólica no se encuentra ni esa toma de conciencia, ni líneas de investigación que pudieran conducir a ella; lo cual lo considera natural por lo temprano de la época por un lado y por otro, por el estado relativamente elemental en el que se hallaba la matemática británica frente a la del continente europeo. Así entonces, era obvio que los matemáticos de la siguiente generación como Cayley y Sylvester se dedicaran a trabajar en los problemas que se estudiaban en el continente.

Por otra parte, al estudiar la manera como se entendía la lógica del álgebra ordinaria en la primera mitad del siglo XIX se hizo posible valorar la originalidad de la creación algebraica de Hamilton, la cual, además de marcar una ruptura con viejas concepciones acerca del comportamiento de los números, abría nuevas rutas de indagación sobre el tema, por ejemplo, plantear la posibilidad de construir otras clases de álgebras, como es el caso del álgebra de los números complejos fundamentada en los números reales.

3. Las fuentes del cambio de perspectiva y el proceso de desontologización

Fueron numerosas las fuentes del cambio de la época clásica a la época moderna. En primer lugar, al analizar el problema de la resolución de ecuaciones por radicales, Lagrange planteó por primera vez la pregunta de por qué funcionaban las formulas para los casos de segundo, tercero y cuarto grados y que se escondía tras ello. Buscó entonces las razones del éxito alcanzado para dichos casos y las del fracaso en los de grados superiores. Encontró que el triunfo de los métodos de Del Ferro, Tartaglia, Cardano y Ferrari para resolver ecuaciones de tercero y cuarto grados residía en la existencia de ciertas funciones no simétricas de las raíces, las cuales poseían determinadas propiedades de *Invariancia por permutaciones* y que el problema de resolver ecuaciones de quinto grado o mayor aún, está relacionado con ciertas expresiones que, de algún modo, son *Invariantes* con respecto a las permutaciones de las raíces.

Abel, en 1824, resolvió el problema al demostrar que no había fórmulas que permitieran obtener las raíces de ecuaciones de quinto grado o mayor. Con esta conclusión se inauguraba una nueva era en la evolución del álgebra, esto es, los comienzos de la teoría de grupos y por consiguiente el estudio de las *estructuras*. Iniciando el siglo XIX, Galois estudió ciertas "*agrupaciones*" o "*grupos*" de permutaciones y las propiedades de determinados "*subgrupos*" que permanecían invariantes bajo ciertas transformaciones, con lo cual pudo probar que era imposible resolver, por medio de radicales, las ecuaciones de grado mayor que cuatro. El estudio de esos grupos de permutaciones de números o símbolos se llevó a cabo durante todo el siglo XIX, pero sólo al final de 1882, en los trabajos de van Dyck, Netto, y Weber, se alcanzó a formular en abstracto la estructura de esos grupos, y a proponer los axiomas mínimos que deberían cumplir esos sistemas de transformaciones.

Cauchy, para poder generalizar los resultados logrados por Ruffini y Abel, presentó la noción de permutación con un enfoque totalmente nuevo. Eligió un conjunto finito de objetos designados por letras, en un cierto orden, en una línea e hizo corresponder el objeto de una segunda línea, que tuviera el mismo rango, mediante una ley que la llamó *sustitución*.

En el siglo XIX se fijaron de manera definitiva los conceptos fundamentales y los objetivos principales del álgebra abstracta que trataba de las colecciones de objetos de naturaleza a veces muy diferente a la de los números reales o complejos. Durante este siglo el álgebra se enriqueció con creaciones tales como los vectores, los cuaterniones, las matrices, las formas cuadráticas binarias, los hipernúmeros de diferentes clases, las transformaciones y las sustituciones o permutaciones. Tales objetos se combinaron mediante operaciones y leyes de composición para desarrollar los conceptos algebraicos de base. Las investigaciones sobre los números algebraicos pusieron de presente diferentes variedades de álgebras, que se distinguían por las propiedades de las operaciones definidas en ellas. A partir de los notables trabajos de Galois se pudo establecer de manera definitiva la solución de las ecuaciones polinómicas en términos de operaciones algebraicas. Pero las ideas de Galois, antes de fructificar, debieron esperar otros resultados.

La obra de Peacock tuvo el mérito de preparar el camino para desarrollos más abstractos del álgebra y junto con Gregory y De Morgan intentaron hacer del álgebra una ciencia independiente de las propiedades de los números reales y complejos. Otra fuente del cambio en la matemática comienza con el advenimiento de las geometrías no *euclidianas*, hacia la tercera década del siglo XIX.

Su importancia radica en su valor intrínseco y en su vinculación con el método axiomático. Las características de la geometría euclidiana en relación con el método axiomático están plasmadas en los *Elementos de Euclides,* en los cuales, los postulados de la geometría eran considerados como *verdades autoevidentes* acerca del espacio físico y por más de veinte siglos constituidos en el modelo ideal de explicación racional de la realidad. El problema de la autoevidencia está directamente relacionado con la *concepción ontológica* de que el razonamiento matemático estaría siempre antecedido por la realidad del objeto del que se ocupa.

Las geometrías no euclidianas ejercieron una importante influencia y repercusión sobre las ideas que habían de conducir a la matemática de hoy, por cuanto tuvieron el mérito de socavar los fundamentos de la geometría euclidiana y de facilitar una nueva concepción de la geometría, en la que se elimina toda referencia intuitiva al espacio físico, quedando subsistente sólo la abstracción y el reconocimiento de la libre creación de los sistemas matemáticos.

Utilizando el concepto de grupo de transformaciones, Klein elaboró una extraordinaria síntesis de estos conceptos importantes que tienen como principio unificador la idea de que una geometría es el estudio de las propiedades de un conjunto que permanecen invariantes cuando los elementos de dicho conjunto se someten a las transformaciones de un cierto grupo de las mismas, estableciéndose una jerarquía entre todas aquellas geometrías. Surgió entonces el Programa de Erlangen de 1872.

En los *Fundamentos de la geometría*, Hilbert se propuso formalizar rigurosamente la geometría euclidiana y con tal fin consideró que era necesario no tener en cuenta la naturaleza de los objetos geométricos básicos como los puntos, rectas y planos, sino únicamente las relaciones entre ellos. Esta tendencia hacia la *desontologización*, la ilustraba diciendo que podían sustituirse las palabras *punto*, *recta* y *plano*, por *mesa*, *silla, vaso de cerveza* o por cualesquiera otras, sin que esto alterara en lo más mínimo la geometría resultante; lo que equivale a subrayar el carácter arbitrario del nombre de los objetos, que se convierten en entes abstractos definidos implícitamente por los *axiomas*.

En consecuencia, en adelante se tendrían que aceptar postulados no autoevidentes y al mismo tiempo se ponía de presente un abandono inconsciente del *control ontológico del objeto matemático* y en cambio se tenía en cuenta únicamente la estructura lógica del sistema geométrico en su conjunto. El comprender la necesidad de la *desontologización* de los objetos matemáticos se considera uno de los resultados más importantes y productivos en el desarrollo de la axiomática y de la matemática moderna, cuya idea clave expresa que lo que cuentan son las relaciones mutuas entre objetos indefinidos. Esto constituye *la tematización de la estructura* como objeto de estudio. Posteriormente la obra de Hilbert cambiará el panorama de modo sustancial.

4. Los aportes de Dedekind a la formación de la noción de estructura algebraica

Un factor importante para el surgimiento de las estructuras matemáticas fue el lenguaje conjuntista que en principio apareció como lenguaje conjuntista ingenuo, por cuanto Dedekind

no consideró la necesidad de presentarlo en forma de axiomas. Como precursor de los enfoques estructurales de la matemática moderna, en el curso de sus investigaciones se convenció del papel básico de los conjuntos en las matemáticas y en su correspondencia con Cantor tomó parte en algunos capítulos del nacimiento de la teoría de conjuntos.

En su libro *¿Qué son y para qué sirven los números?* proponía las bases de toda una concepción de la matemática pura, capaz de abarcar la aritmética, el álgebra y el análisis, utilizando únicamente las nociones de aplicación y de conjunto. Sobre la base de la noción de ideal fundó la teoría de números algebraicos. Así mismo contribuyó a clarificar, de manera esencial, las nociones de *grupo, anillo, ideal, campo, módulo*, es decir, los conjuntos dotados de una estructura.

También formaron parte de su trabajo matemático, los fundamentos de las matemáticas, los números reales, la teoría de Galois, la teoría de las funciones algebraicas, la topología de conjuntos y los principios del análisis, entre otros temas. Trabajó de manera sistemática e independiente sobre los prerrequisitos de la teoría de grupos para la teoría de Galois. Así pudo reconocer que la teoría tenía relación con extensiones de cuerpos y presentó por primera vez el tema que en el lenguaje moderno hace referencia a las relaciones entre los subcuerpos del cuerpo de descomposición y los subgrupos del grupo de Galois de un polinomio, adelantándose, unos treinta años, en una visión abstracta de los grupos.

Así mismo llegó a realizar también una prueba del teorema de homomorfismo. Pero en particular, su trabajo sobre la teoría de ideales es de tal importancia que es considerado su obra maestra. Una característica relevante de su exposición tiene que ver con su propuesta metodológica en la cual la teoría de conjuntos desempeña un papel esencial. En efecto, el problema de la factorización de ideales se separa del enfoque basado únicamente en términos de *números*, y hace su propuesta en *términos de conjuntos*, coherente con su enfoque conjuntista de toda la matemática.

Los cuerpos de *números algebraicos* en los que existe una sola descomposición de los *enteros algebraicos* en *números primos*, son una excepción. Para restituir el *teorema fundamental de la aritmética* a los enteros de todos los cuerpos de *números algebraicos*, Dedekind revisó la *divisibilidad de los enteros racionales*. Este fue el paso crítico que condujo a la invención de los *ideales*.

Un ideal es un conjunto de enteros *cerrado* para las operaciones de *suma y diferencia* y también para el *producto* de sus elementos por enteros del cuerpo correspondiente. Dedekind resuelve el problema básico de la *factorización de enteros algebraicos* definiendo las nociones de *producto de ideales e ideal primo,* y demostrando que, dado un cuerpo cualquiera de números algebraicos, todo ideal admite una *única descomposición* como producto de ideales primos. De esta manera, la descomposición de un *número entero algebraico* en producto de enteros algebraicos, se reduce a la descomposición de un *ideal en producto de ideales* siendo válido el teorema fundamental de la aritmética. Es decir, se reemplazan los enteros del cuerpo por sus correspondientes ideales principales.

En términos generales, la clave del problema estaba en reemplazar la relación de divisibilidad *aritmética* por la relación de pertenencia a una clase. Así la invención de los ideales constituyó un ejemplo de la *tendencia moderna y de la metodología de la generalización* por ampliación para regularizar las excepciones. Una característica del pensamiento de Dedekind acerca del número era: resolver en términos infinitos un problema estrictamente finito. El problema de los enteros algebraicos de la *descomposición única*, Dedekind lo resolvió por medio de *clases infinitas particulares* de los *enteros algebraicos* llamados *ideales*. Esto recuerda el caso de las *cortaduras*.

Todas las tentativas sucesivas y el empeño para *ampliar el concepto de número,* desde la perspectiva de las *matemáticas como un todo* y con la *metodología de la generalización y de la abstracción deliberadas,* a la manera de Cantor, dio como *resultado culminante la estructura* como *nuevo objeto* de la *matemática moderna* fundada en la *concepción de Dedekind*.

REFERENCIAS

Ferreirós, J. (1999). *Labyrinth of thought. A history of set theory and its role in modern mathematics*. Berlin: Birkhäuser Verlag.

Ferreirós, J., & Gray, J (2006). *The architecture of modern mathematics. Essays in history and philosophy*. New York: Oxford University Press.

Wussing, H. (1984). The genesis of the abstract group concept. London: MIT Press.

Volver al índice de Conferencias

Análisis multiresolución e interpretacion de Wavelets

Samuel Barreto M.
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

El análisis multiresolución resalta las propiedades importantes de los splines y los algoritmos wavelets para la descomposición y reconstrucción de funciones. El objetivo aquí es el de construir un sistema wavelet, el cual es un conjunto ortonormal completo en $L^2(\mathbb{R})$ que consiste en un conjunto determinado de traslaciones y dilataciones de una sola función ψ. En este sentido, la construcción del sistema wavelet se reduce a la construcción de un análisis multiresolución.

Definición 1. Para $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R})$ y $j,k \in \mathbb{Z}$, se definen $\varphi_{j,k}, \psi_{j,k} \in L^2(\mathbb{R})$, mediante

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^j x - k) \qquad \text{y} \qquad \psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k)$$

El factor $2^{\frac{j}{2}}$ en la definición de $\varphi_{j,k}$ y $\psi_{j,k}$ permite que la L^2-norma sea la *misma* (o invariante) para todo j,k:

$$\left\|\psi_{j,k}\right\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\, 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k)\,|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}} 2^j\, |\,\psi(2^j x - k)\,|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}} |\,\psi(y)\,|^2\, dy = \left\|\psi\right\|^2$$

donde $y = 2^j x - k, \quad dx = \dfrac{dy}{2^j}$. De manera análoga $\left\|\varphi_{j,k}\right\| = \left\|\varphi\right\|$.

La escritura de $\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j(x - 2^{-j}k))$ muestra que la definición de $\psi_{j,k}$ involucra normalización, dilatación y traslación.

La gráfica de $\psi(2^j x - k) = \psi(2^j(x - 2^{-j}k))$ se obtiene trasladando la gráfica de $\psi(2^j x)$ $2^{-j}k$ unidades a lo largo del eje x (a la derecha si $k > 0$, a la izquierda sí $k < 0$). Si ψ tiene soporte compacto en el intervalo $[-r, r]$, entonces $\psi(2^j x - k)$ tiene soporte compacto en $[-2^{-j}r + 2^{-j}k,\, 2^{-j}r + 2^{-j}k]$ y la gráfica de $\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j(x - 2^{-j}k))$ se obtiene de $\psi(2^j x - k)$ multiplicada por $2^{\frac{j}{2}}$, la cual dilata la gráfica en la dirección vertical por este factor. De manera análoga se obtienen resultados para $\varphi_{j,k}$.

En términos generales, las funciones φ *y* ψ que se considerarán se centran cerca de 0 y concentradas en una escala comparable a 1(lo que significa que la mayoría de la masa de la función se encuentra dentro de un intervalo en torno al origen de longitud n, donde n es un entero positivo razonablemente pequeño). En resumen $\varphi_{j,k}$ y $\psi_{j,k}$ se centran cerca al punto $2^{-j}k$ en una escala comparable a 2^{-j}.

Definición 2. *Un sistema wavelet para* $L^2(\mathbb{R})$ *es un conjunto ortonormal completo en* $L^2(\mathbb{R})$ *de la forma* $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ *para* $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. *Las funciones* $\psi_{j,k}$ *son llamadas wavelets. La función* ψ *es llamada la wavelet madre.*

Sin entrar a considerar la existencia del sistema wavelet, nuestro objetivo es construir uno. Sí $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ es un sistema wavelet, entonces toda $f \in L^2(\mathbb{R})$ puede ser escrita en la forma

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k}\rangle \psi_{j,k}$$

denominada *identidad wavelet* y el mapeo que asocia f con la secuencia de coeficientes $\{\langle f, \psi_{j,k}\rangle\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ se denomina *transformada wavelet discreta*. Lo anterior se sustenta en el siguiente teorema del análisis funcional:

Teorema 1. *Sí* H *es un espacio de Hilbert y* $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *es un conjunto ortonormal en* H. *Entonces* $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *es un conjunto ortonormal completo si solo si*

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle f, a_j\rangle a_j \quad \text{para todo} \quad f \in H$$

La identidad wavelet se interpreta así: como $\psi_{j,k}$ está centrada cerca al punto $2^{-j}k$ y tiene una escala de alrededor 2^{-j}, el coeficiente de la transformada wavelet $\langle f, \psi_{j,k}\rangle$ es la magnitud(o porción) del término $\psi_{j,k}$ en la expansión. En otras palabras, el producto interno $\langle f, \psi_{j,k}\rangle$, en esencia, describe una operación de comparación de la "similitud" entre la función f y la función $\psi_{j,k}$, es decir, el grado de cercanía entre las dos funciones. Cuanto más similares son, mayor es el valor del producto interno. En resumen, la identidad wavelet expresa la descomposición de f en sus componentes a diferentes escalas 2^{-j}, centradas en diferentes posiciones $2^{-j}k$, para $j,k \in \mathbb{Z}$.

Definición 3: Un análisis multiresolución (ó MRA) con función de escalado φ es una secuencia de subespacios $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ con las siguientes propiedades:

i. (*Monotonicidad*) La secuencia es creciente, es decir, $V_j \subseteq V_{j+1}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$.

ii. (*Existencia de la función escalado*) Existe una función $\varphi \in V_0$ tal que el conjunto $\{\varphi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal y

$$V_0 = \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} z(k)\varphi_{0,k} \;\; / \;\; z = (z(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z}) \right\}$$

iii. (*Propiedad de Dilatación*) Para cada j, $f(x) \in V_0$ si solo si $f(2^j x) \in V_J$

iv. (*Propiedad de intersección trivial*) $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$

v. (*Propiedad de Densidad*) $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$.

Claramente $\left\{\sqrt{2}\varphi(2x-k)\right\}$ es una base ortonormal de V_1 ya que el mapeo $f \mapsto \sqrt{2}f(2\cdot)$ es una isometría de V_0 *a* V_1. Como $\varphi \in V_1$, este debe tener una expansión, la *ecuación de*

$$\varphi(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)\varphi_{1,k}(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)\sqrt{2}\,\varphi(2x-k)\ \ ,\ \ u=(u(k))_{k\in\mathbb{Z}}\in l^2(\mathbb{Z})\,.$$

Nótese que $u(k)=\left\langle \varphi,\varphi_{1,k}\right\rangle$ ya que $\left\{\varphi_{1,k}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es un sistema ortonormal completo para V_1. La condición de dilatación (iii) establece que $V_j=\left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} z(k)\varphi_{j,k}\ /\ z=(z(k))_{k\in\mathbb{Z}}\in l^2(\mathbb{Z})\right\}$

Ejemplos de análisis multiresolución conocidos: Haar con función de escalado $\varphi(x)=\chi_{[0,1]}(x)$ y donde V_0 se compone de funciones constantes a trozos, el que conduce a los wavelets de Franklin donde $\varphi(x)$ es la función "hat" y donde V_0 se compone de funciones lineales a trozo continuas con salto en los enteros.

CONSTRUCCION DE SISTEMAS WAVELETS.

La siguiente observación es crucial en la construcción de sistemas wavelets en $L^2(\mathbb{R})$.

Teorema 2. Si $\left\{V_j\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *es un análisis multiresolución con función de escalado* φ y *secuencia escalada* u. *Entonces* $\left\{R_{2k}u\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *es un conjunto ortonormal completo en* $l^2(\mathbb{Z})$.

Lo anterior establece que a una función de escalado φ para un MRA, le corresponde una secuencia escalada $u\in l^2(\mathbb{Z})$ con la propiedad de que las traslaciones enteras pares de u son ortonormal en $l^2(\mathbb{Z})$. Así que el problema se mapea al dominio discreto desde $L^2(\mathbb{R})$ a $l^2(\mathbb{Z})$ donde se resuelve para luego mapear de nuevo hacia $L^2(\mathbb{R})$ y obtener las wavelets para $\mathbb{R}$. El siguiente esquema muestra la ruta a seguir

$$\begin{array}{ccc}
L^2(\mathbb{R}) & & l^2(\mathbb{Z}) \\
\text{MRA: }\varphi & \xrightarrow{\ \varphi=\sum_{k\in\mathbb{Z}} u(k)\varphi_{1,k}\ } & u:\left\{R_{2k}u\right\}_{k\in\mathbb{Z}} \text{ es ortonormal en } l^2(\mathbb{Z}) \\
 & & \Big\downarrow\ v(k)=(-1)^{k-1}\overline{u(1-k)} \\
\psi & \xleftarrow{\ \psi=\sum_{k\in\mathbb{Z}} v(k)\varphi_{1,k}\ } & v:\left\{R_{2k}u\right\}_{k\in\mathbb{Z}}\cup\left\{R_{2k}v\right\}_{k\in\mathbb{Z}} \text{ es un} \\
 & & \textit{conjunto ortonormal completo} \text{ en } l^2(\mathbb{Z})
\end{array}$$

En la misma forma que se corresponden $\varphi\to u$ y $\psi\to v$, la división ortogonal de $L^2(\mathbb{R})$

se corresponde con $l^2(\mathbb{Z})$. El procedimiento del teorema de Mallat para obtener un sistema wavelet a partir de un MRA es explícito y constructivo. Se pueden obtener ejemplos de sistemas wavelets si es posible construir MRA(s)

Teorema 3(Mallat).

Supóngase que $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *es un análisis multiresolución (MRA) con función de escalado* φ *y secuencia escalada* $u=(u(k))_{k\in\mathbb{Z}}\in l^1(\mathbb{Z})$. *Definiendo* $v=(v(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ *mediante* $v(k)=(-1)^{k-1}\overline{u(1-k)}$ $,k\in\mathbb{Z}$ *y* $\psi(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}v(k)\varphi_{1,k}(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}v(k)\sqrt{2}\,\varphi(2x-k)$. *Entonces* $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ *es un sistema wavelet.*

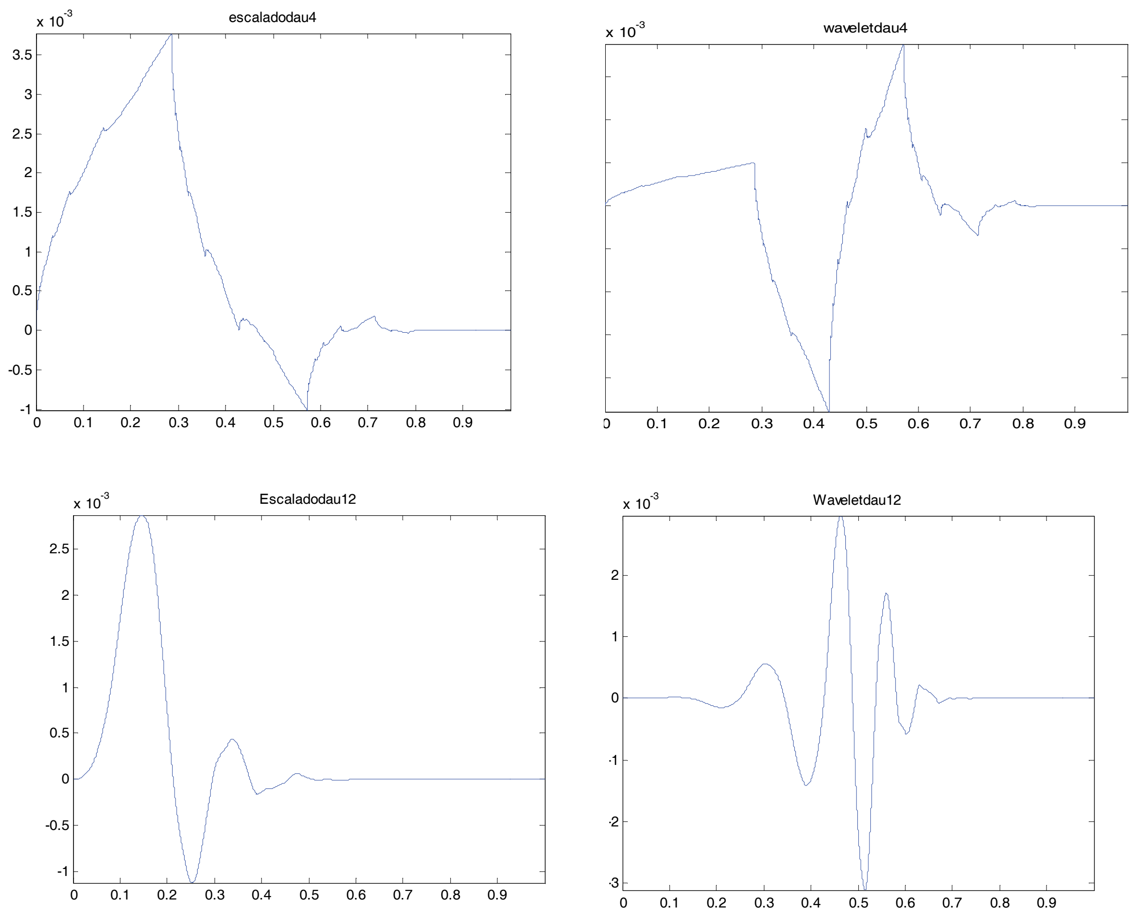


FIGURA 1. Gráficas del sistema wavelet de Daubechies: D4, D12, de soporte compacto.

CONCLUSIONES.

1. El *análisis multiresolución* esencialmente es una estructura en la que funciones $f \in L^2(\mathbb{R})$ pueden tratarse como un límite de aproximaciones sucesivas $f = \lim_{m \to \infty} P_m f$ donde las diferentes proyecciones $P_m f$, $m \in \mathbb{Z}$ corresponden a versiones suavizadas de f del orden de 2^m. El resultado es igualmente valido para el caso general donde $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

2. En aplicaciones, el MRA es una estructura matemática efectiva para la descomposición jerárquica de una señal o de una imagen en diferentes componentes de escala representada mediante una secuencia espacios de funciones sobre $\mathbb{R}$.

3. La ecuación de refinamiento o de dilatación es central en la teoría wavelet y en el límite da lugar al algoritmo de cascada. Esto es, en la iteración del filtro pasabajo (con escalado).

4. El teorema de Mallat permitió el desarrollo de un algoritmo numérico efectivo para la descomposición y reconstrucción wavelet de una imagen o función usando el análisis multiresolución.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS:

An Introduction to Wavelets Through Linear Algebra. Michael W. Frazier. Springer-2001.
Wavelets and Other Orthogonal Systems. Gilbert G. Walter and Xiaoping Shen. Studies in Advanced Mathematics. CRC. 2005.
Wavelets, Theory and applications for Manufacturing. Springer. 2011 .
Discrete Wavelet Transformations. Patrick J. Van Fleet. Wiley . 2008.
An Introduction to Wavelet Analysis. David Walnut. Birkhaüser. 2005.
Explorations in Harmonic Analysis with applications to complex function theory and the Heisenberg Group. Steven G. Krantz. Birkhaüser. 2009.

Volver al índice de Conferencias

Dinámica de la coordinación en redes complejas, un resumen

David Blázquez Sanz
david@ima.usergioarboleda.edu.co
IMA - Universidad Sergio Arboleda

Yeny Magaly Borda Pinzón
yeny.borda@usa.edu.co
Universidad Sergio Arboleda

Resumen. Estudiamos desde del punto de vista matemático como la estructura de una red de interacción permite a un grupo de agentes coordinar sus decisiones. Nuestras herramientas son la teoría de juegos, las redes complejas y los sistemas dinámicos. La teoría de juegos modela como agentes racionales eligen entre diferentes estrategias al interactuar. Investigadores contemporáneos (Nowak M. A. & May R. M., 1992) añadieron las dimensiones espacial y dinámica a la teoría de juegos, al introducir el dilema del prisionero espacial. En este dilema cada agente se sitúa en un vértice de un retículo e interactúa con sus vecinos inmediatos. En este trabajo, nosotros estudiamos el juego de la coordinación, y substituimos el retículo por una red aleatoria. Relacionamos la dinámica del juego, y la existencia de nuevos equilibrios, con la estructura de la red.

Palabras clave: Juegos no cooperativos, sistemas dinámicos, grafos, redes complejas.

1. Introducción

En este trabajo abordamos la siguiente pregunta: ¿cómo influye la estructura matemática de una red de interacción en la toma de decisiones colectivas y en la capacidad de coordinación? Nuestra hipótesis es que la dinámica de las decisiones colectivas es un fenómeno *emergente*. Es decir, esta complejidad no está constituida únicamente por la suma de decisiones individuales, sino que la complejidad de la red de interacción provoca fenómenos nuevos en la dinámica. Este trabajo incluye resultados recientemente obtenidos y presentados en una tesis de maestría en la Universidad Sergio Arboleda (Borda Pinzón, Y. M., 2011).

2. Teoría de Juegos no Cooperativos

La teoría de juegos nace con el trabajo del matemático húngaro John von Neumann y Oskar Morgenstern (von Neumann, J. & Morgensten O., 1944) . La pregunta original es si en un juego con reglas matemáticamente establecidas existe una "mejor estrategia" o "estrategia racional" que lleve al jugador a maximizar su beneficio independientemente de las elecciones de los otros jugadores. Posteriormente aparecen las nociones de *equilibrio de Nash* y de *estrategia evolutivamente estable* (Maynard, J., 1982). En el contexto desarrollado por Maynard, l*a teoría de juegos evolutiva*, los jugadores adaptan sus estrategias de acuerdo a los resultados obtenidos.

Definición 1: *un juego no cooperativo J = (A, S, M) está constituido por:*

1. *Un conjunto finito* A={1,2, ...} *de jugadores, que simbolizan agentes que interactúan.*
2. *Un conjunto finito* S={a,b,c, ...} *de estrategias puras que los jugadores pueden escoger.*
3. *Un tensor de pagos* M(j) *para cada jugador* j *en* J*, que nos dice cual es el beneficio obtenido por el jugador* j *al elegir una determinada estrategia, teniendo en cuenta las estrategias elegidas por los otros jugadores.*

Cuando en el juego participan dos jugadores, el tensor M puede describirse de la siguiente manera: a cada jugador le corresponde una matriz de pagos $n \times n$ (donde n es el número total de estrategias) cuyo elemento (i,j) es el beneficio del jugador al elegir la estrategia i, si su oponente elige la estrategia j. Cuando la matriz de pagos es la misma para ambos jugadores decimos que el juego es *simétrico*. Veamos esto con un ejemplo, el clásico dilema del prisionero (Schelling, 1960; Poundstone, 2002):

Tabla 1: Dilema del prisionero

Jugador 1 \ Jugador 2	**Coopera**	**Delata**
Coopera	5, 5	-5, 10
Delata	10, -5	-2, -2

En el dilema del prisionero los jugadores representan a dos ladrones que están siendo interrogados por la policía. Los ladrones disponen de un botín oculto que tiene una utilidad de 10 y pueden repartirse. La pena si son delatados tiene una utilidad de -5 (por ejemplo, 5 años de cárcel). La policía ofrece a los prisioneros una descarga en su pena de 3 años si delatan a su compañero. De esta manera, si los ladrones cooperan entre ellos y no se delatan, ambos quedarán libres y podrán repartirse el botín (utilidad de 5 para cada uno). Si ambos se delatan entre sí serán castigados con dos años de cárcel (utilidad de -2). En el caso de que uno de ellos decidiera cooperar, pero fuera delatado por el otro, cumpliría una pena de 5 años y el botín quedaría íntegramente en manos del otro.

¿Cual es la solución racional de este juego? Aparentemente, ambos deberían cooperar, sin embargo J. F. Nash introdujo una noción de equilibrio (von Neumann J. & Morgensten O., 1944; Nash J. F. 1951) que explica que ambos jugadores tienen un incentivo racional para delatarse. Analicemos desde el punto de vista racional la decisión por parte de uno de los ladrones. El ladrón puede pensar: "mi compañero va a cooperar, entonces yo debo delatarlo y quedarme el botín de 10 doblando mi beneficio", o bien "mi compañero va a delatarme, en tal caso yo también debo delatarlo y así reducir mi pena". Ocurre entonces, que si un ladrón piensa en la acción de su compañero como una elección fija, delatar es la estrategia que maximiza su beneficio en todo caso. Queda entonces claro que, según la siguiente definición, *delatar* constituye un equilibrio de Nash.

Definición 2: Un *equilibrio de Nash* para el Juego J =(A, S, M) es una asignación de estrategias (una estrategia a cada jugador) en la cual ninguno de los jugadores tiene un motivo racional para cambiarla. Es decir, si suponemos fijas las estrategias de todos los jugadores excepto uno, este último jugador se encuentra eligiendo una estrategia que maximiza su utilidad.

Generalmente, se permite que los jugadores elijan "estrategias mixtas". Una estrategia mixta no es otra cosa que una distribución de probabilidad en el espacio de las estrategias puras. A las estrategias mixtas les corresponden *pagos esperados.* Uno de los motivos de permitir estrategias mixtas, es que en tal caso tenemos un teorema de existencia para el equilibrio de Nash.

Teorema 1 (J. F. Nash, 1951): Todo juego con un número finito de jugadores y un número finito de estrategias puras posee al menos un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

Sin embargo, a lo largo de este artículo no consideraremos más la noción de estrategia mixta. Analicemos el siguiente juego:

Tabla2: Juego de la Coordinación

Jugador 1 \ Jugador 2	**I**	**D**
I	1, 1	0, 0
D	0, 0	1, 1

El "juego de la coordinación" modela la interacción de dos jugadores que deben coordinarse para obtener un beneficio. En el caso mas sencillo se consideran dos estrategias, Izquierda (I) y Derecha (D), y beneficios iguales. Los jugadores obtienen un beneficio de 1 si ambos eligen la misma estrategia. En cualquier otro caso no obtienen nada. No es difícil comprobar, que ambas estrategias (es decir, las asignaciones que hacen corresponder a los dos jugadores la misma estrategia) son equilibrios de Nash. Desde el punto de vista de teoría de Juegos no cooperativa poco más puede decirse del juego de la coordinación. Sin embargo, se añade una dimensión nueva al juego si consideramos una *red* de jugadores que interactúan entre sí a lo largo del *tiempo*. Para dicho análisis es necesario considerar la teoría de grafos y de sistemas dinámicos.

3. GRAFOS Y REDES COMPLEJAS

Definición 3: Un *grafo* G = (V, E) consiste en un conjunto finito de vértices V unidos por un conjunto finito de aristas. Cada arista une una pareja de vértices. Un grafo es *simple* si cada arista une dos vértices diferentes, y si uniendo cada pareja de vértices existe a lo más una arista. Decimos que dos vértices son *vecinos* si están unidos por alguna arista.

El origen histórico del tratamiento matemático de los grafos está en el problema de los puentes de Königsberg (actual Kaliningrado) resuelto por Leonard Euler en 1735. Los grafos, al expresar un sistema de *relaciones*, aparecen de forma ubicua en problemas científicos. Las redes eléctricas, de carreteras, de interacciones entre proteínas, de alimentación entre seres de un ecosistema (tróficas), etc. pueden ser entendidas matemáticamente como grafos.

Muchos de los grafos que aparecen en problemas aplicados, han sido generados por la naturaleza a través de leyes que pueden aproximarse estadísticamente. Por ejemplo, las ramificaciones que surgen en el crecimiento de un árbol (nos referimos aquí a un árbol biológico, y que matemáticamente se simbolizará mediante un grafo que también se conoce con el nombre de árbol) o en el desarrollo del sistema nervioso.

Generalmente estos grafos no se conocen completamente, sino solo algunas de sus propiedades estadísticas. Es por eso, que matemáticamente es útil trabajar con *distribuciones de probabilidad* dentro del conjunto de todos los grafos. Estas distribuciones se conocen como *grafos aleatorios*. Muchos autores actuales se refieren a los grafos aleatorios, en los cuales aparecen *fenómenos* emergentes, con el nombre de *redes complejas* (Barabási A. L. & Reka A., 1999; Strogatz H., 2001; Newman M. E. J., 2010).

Los primeros *grafos aleatorios* estudiados fueron los modelos de Gilbert y Erdös-Renyi (Erdos P. & Renyi A., 1959, 1960). En el modelo de Gilbert, se considera fijo el número de vértices N, y una probabilidad p. Cada arista aparece o no en el grafo con probabilidad p y de forma independiente de las demás. En el modelo de Erdös-Renyi se fija el numero de vértices N y el número de aristas L. Todos los grafos con N vértices y L aristas se consideran equiprobables. Las propiedades estadísticas del modelo de Gilbert y de Erdös-Renyi, cuando N tiende a infinito y $N(N-1)p = 2L$ son convergentes. Por este motivo, estos dos modelos suelen considerarse como equivalentes.

Los modelos de Gilbert y Erdös-Renyi son completamente aleatorios. Buscando un modelo adecuado para las interacciones sociales, Watts y Strogatz introdujeron un modelo de *grafo aleatorio* que mezcla propiedades de los grafos completamente aleatorios y los grafos regulares (Watts, D.J & Strogatz,H., 1998). En dicho modelo se considera un anillo de N vértices, cada uno conectado con sus r vecinos más cercanos. Después, cada arista puede reubicarse en una posición aleatoria con una probabilidad p fija. Las aristas reubicadas crean atajos que reducen drásticamente el diámetro del grafo. Una particularidad interesante de este modelo es que produce grafos que tienen un clustering muy alto (es decir, los vértices están muy agrupados) pero un diámetro muy pequeño (es posible viajar de un vértice a otro pasando por un número pequeño de aristas).

4. LA APLICACIÓN DE NASH

Consideremos ahora un grafo G = (V,E) donde los vértices representan jugadores, que interactúan a lo largo de una serie de rondas. Fijemos J = ({1,2},S,M) un juego no cooperativo, simétrico, de dos jugadores. Supongamos que en cada ronda cada jugador elige una estrategia, y juega con sus vecinos al juego J. Supongamos, que cada jugador decide su próxima estrategia basándose en los resultados obtenidos en la ronda anterior. Si estas reglas de decisión son deterministas, acabamos de definir un sistema dinámico $f: S(G) \rightarrow S(G)$, donde S(G) representa el conjunto de posibles estados del sistema, es decir las posibles asignaciones que hacen corresponder una estrategia a cada uno de los vértices del grafo. Un estado E es entonces una aplicación de V en S. Dado que S(G) es un conjunto finito, todas las órbitas de f son eventualmente periódicas, es decir, el límite positivo de cualquier punto por las iteraciones de f es una órbita periódica (o un punto fijo, que es un caso particular de órbita periódica)

El dilema del prisionero espacial (Nowak, M.A & May, R.M., 1992) propone el siguiente sistema dinámico. En cada ronda, cada vértice evalúa el beneficio obtenido por cada uno de los vértices vecinos. Para la siguiente ronda, elige la estrategia de su vecino más exitoso. Los investigadores Nowak y May estudiaron la evolución de este sistema cuando el grafo es un retículo bidimensional de celdas en el plano. Encontraron que la dinámica podía describirse como compleja, y caótica, hasta el punto que un espacio de fases finito permite usar esta palabra. Recientemente, el dilema del prisionero espacial ha sido estudiado sobre grafos aleatorios (Santos F. C. & Pacheco J. M., 2005).

Nosotros proponemos otra ley de evolución, que llamamos *aplicación de Nash* (Borda Pinzón Y. M., 2011). Consiste en una serie de decisiones racionales, en las que cada vértice considera fijas las estrategias de sus vecinos.

Definición 4: Sea J = ({1,2}, S={a,b,c,...}, M) un juego simétrico de dos jugadores donde el conjunto de estrategias está totalmente ordenado. Sea G un grafo simple, y S(G) el conjunto de asignaciones de estrategias a los nodos. El *aplicación de Nash* para J en G es la aplicación N: S(G) $\rightarrow$ S(G), definida de la siguiente manera. Cada vértice evalúa el beneficio esperado de cada estrategia, de acuerdo a las estrategias de sus vecinos. Entonces, elige como nueva estrategia aquella que maximiza su beneficio. Si esta no está completamente determinada, se elige la menor.

El conjunto de estados S(G) está dotado de una estructura de espacio métrico discreto. Dos estados E y E' están a distancia d(E,E')={Número de vértices x en los cuales E(x) difiere de E'(x)}.

Definición 5: Consideremos f: S(G) $\rightarrow$ S(G). Sea O una órbita periódica de f y k un número natural. Decimos que O es una órbita k-atractora de N si para cada asignación E en S(G) tal que d(E, O) es menor que k, se tiene que el límite positivo de E por f es O. La noción de punto fijo k-atractor es un caso particular de órbita k-atractora.

Proposición 1: Supongamos que a en S es un equilibrio de Nash en el juego J (es decir, la asignación en la cual los dos jugadores eligen la misma estrategia a). Entonces, para cualquier grafo G, la asignación E, que asigna a cada vértice de G la estrategia a, es un punto fijo de la aplicación de Nash para J en G.

En el juego de la coordinación, las dos estrategias puras (I, D) son equilibrios de Nash. Podemos además asegurar que se trata de atractores para la aplicación de Nash.

Proposición 2: Si el grado mínimo de G es m (es decir, cada vértice tiene al menos m vecinos), entonces los dos equilibrios de Nash clásicos para el juego de la coordinación son k-atractores para cada k tal que $2k < m$.

Demostración: Consideremos la configuración donde todos los jugadores eligen la estrategia I. Cualquier otra configuración a distancia menor que k de esta, tiene como máximo k jugadores con estrategia D. En el peor de los casos, estos k jugadores son vecinos de un mismo jugador. Pero si $2k<m$, ocurre que este jugador tendrá mas vecinos con la estrategia I que con la estrategia D, y por tanto elegirá la estrategia I en la siguiente ronda. Es decir, todos los jugadores elegirán la estrategia I después de una iteración. **q.e.d**.

Sin embargo existen otros puntos fijos de la aplicación de Nash. Por ejemplo, consideremos un grafo de Barbell (dos grafos completos unidos por una arista). Al eliminar la arista que une los dos grafos completos, el grafo de Barbell tiene dos componentes no conectadas. Si todos los miembros de una componente eligen la estrategia I, y todos los miembros de la otra componente eligen la estrategia D, esto representa un nuevo punto fijo, como ilustra la figura 1.

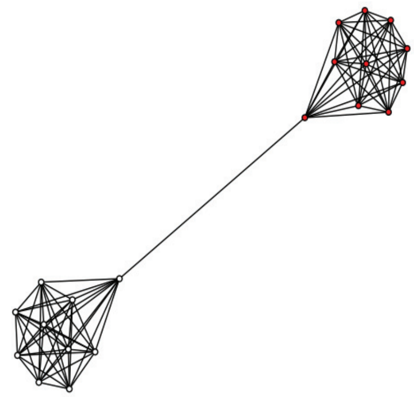


Figura 1: Equilibrio de Nash no trivial en el juego de la coordinación, grafo de Barbell

Dado un juego J = ({1,2}, S = {a,b,c,...}, M) simétrico de 2 jugadores y un grafo G, podemos considerar el *juego en red* como un juego J(G)=(V, S, M*) con tantos jugadores como vértices tiene el grafo, el mismo conjunto de estrategias S, y donde el tensor de pagos M* se calcula a partir de M y la red de interacción G de la siguiente manera. Cada jugador interactúa solamente con sus jugadores vecinos, y acumula el beneficio de cada interacción jugando el juego J. El juego J(G) tiene muchos jugadores, y en general no es simétrico. Dado que un punto fijo de la aplicación de Nash corresponde a una asignación de estrategias en la cual ningún jugador tiene un incentivo racional para cambiar, la siguiente proposición es auto evidente.

Proposición 3: Todo punto fijo de la aplicación de Nash del juego J en el grafo G es un equilibrio de Nash del juego J(G).

Una pregunta interesante, es si toda configuración de estrategias para la aplicación de Nash en el juego de la coordinación, estabiliza en un punto fijo. Es relativamente sencillo demostrar que no es así, y encontrar órbitas periódicas. Por ejemplo, la figura 2 ilustra una órbita de longitud 3 que estabiliza en una 2-periódica, que no es un equilibrio de Nash: algunos jugadores están condenados a cambiar de decisión indefinidamente en cada ronda.

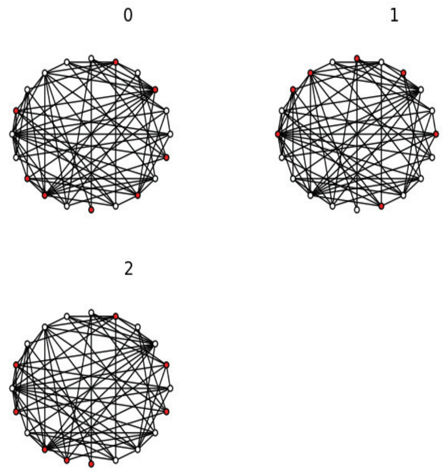


Figura 2: Órbita eventualmente 2-periódica de Nash en grafo Erdos-Renyi

A la hora de iterar la aplicación de Nash del juego de la coordinación, vemos que existen dos posibles límites conceptualmente diferentes. Una de las posibilidades es que nuestra órbita estabilice en uno de los equilibrios de Nash clásicos, donde todos los jugadores eligen I o bien todos eligen D, en tal caso decimos que la red se coordina totalmente. Las otras posibilidades estabilizan o bien en un nuevo equilibrio en el cual la red no está coordinada, o bien en una órbita periódica.

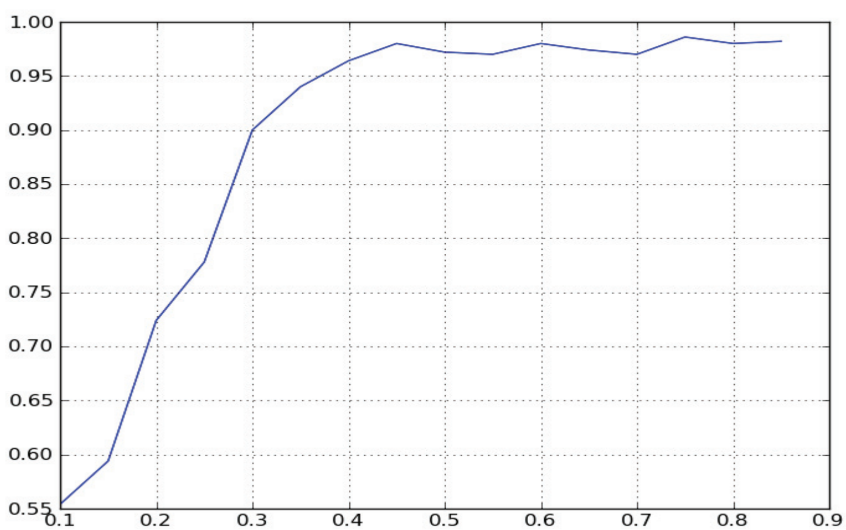


Figura 3: Evolución del tamaño de las cuencas de atracción de los equilibrios de nash clásicos en grafos de watts-strogatz con 200 nodos, abcisas = p.

Podemos estimar computacionalmente el tamaño de las cuencas de atracción de los dos equilibrios de Nash clásicos. En la figura 3, generamos redes según el modelo de Watts-Strogatz con 200 nodos y p variable. Después, partiendo de una configuración de estrategias aleatoria, iteramos la aplicación de Nash hasta que esta estabiliza. En las ordenadas se representa la proporción de experimentos que estabilizan en los equilibrios de Nash clásicos, es decir, cuando la red se coordina totalmente. Es claro que en función del parámetro p, que hace a la red más conectada, el tamaño de las cuencas de atracción de los equilibrios clásicos crece, y hay menor cantidad de nuevos equilibrios de Nash.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a Jesús Hernando Pérez, Luz Myriam Echeverry, Karen Pérez y Daniel Molano por su colaboración en el desarrollo de esta investigación. Igualmente agradecemos el soporte del departamento de investigaciones CIVILIZAR de la Universidad Sergio Arboleda. Los experimentos computacionales han sido realizados utilizando la plataforma SAGE y la librería NETWORKX que son proyectos de Software Libre con licencia GPL.

REFERENCIAS

Barabási, A. & Reka, A. (1999). Emergence of Scaling in Random Networks. *Science, 286*, 509-512.

Borda, Y. (2011). *Dinámica de la coordinación de estrategias en redes sociales,* Tesis de Maestría (no publicada), Universidad Sergio Arboleda, Bogotá [directores: Jesús H. Peréz y David Blázquez-Sanz].

Erdös, P. & Rényi, A. (1959). On Random Graphs. *Publicationes Mathematicae 6,* 290-297.

Erdös, P. & Rényi, A. (1960). The Evolution of Random Graphs. *Publications of the Mathematical Institute Hungarian. Academy of Sciences 5 ,* 17-61.

Monsalve, S & Arévalo, J. (2005). *Un curso de Teoría de Juegos Clásica.* Bogotá: Universidad Externado de Colombia.

Maynard, J. (1982). *Evolution and Theory of Games.* Cambridge.

Newman, M. (2010). *Networks An Introduction*, Oxford University Press.

von Neumann J. & Morgernsten O. (1944). *Theory of Games and Economic Behaviour*, Princeton University Press.

Nowak, M. & May, R. (1992). Evolutionary Games and Spatial Chaos. *Nature, 359*, 826-829.

Poundstone, W. (1992). *El dilema del prisionero.* Madrid: Alianza.

Santos F. & Pacheco J. (2005). Scale-Free Networks Provide a Unifying Framework for the Emergence of Cooperation. *Phys. Rev. Lett. 95,* 98-104.

Schelling, T. (1960). *The Strategy of Conflict.* Cambridge: Harvard University Press.

Strogatz, H. (2001). Exploring Complex Networks. *Nature, 410*, 268-276.

Watts, D. & Strogatz, H. (1998). Collective Dynamics of Small-World Networks. *Nature*, *393*, 440-442.

Volver al índice de Conferencias

El Teorema de Pick:
Un Ejemplo de Matemática "Elemental"

José Luis Ramírez Ramírez
jolura1@gmail.com
Universidad Sergio Arboleda

Resumen. En el presente artículo se dan las ideas generales del fundamento matemático que sustentan el Teorema de Pick, así como algunas extensiones y aplicaciones de éste. Dicho teorema y sus relaciones con algunas áreas de las matemáticas lo convierte en un tema interesante para estudiar y que vale la pena profundizar con los estudiantes a nivel escolar.

Palabras clave: Teorema de Pick, retículos, áreas de polígonos.

1. Introducción

Un tema interesante en el estudio de la matemática elemental[1] es el Teorema de Pick, el cual fue publicado en el año de 1899 en el artículo "Geometrisches zur Zahlenlehre" que traduce *Resultados Geométricos en Teoría de Números,* escrito por el matemático austríaco Georg Alexander Pick (1859 - 1942). Sin embargo, es hasta el año 1969 que este Teorema recibe la atención y admiración de la comunidad matemática por su simplicidad y elegancia, cuando Steinhaus lo incluyó en su famoso libro "Mathematical Snapshots" (Onnor & Robertson, 2005).

El teorema plantea lo siguiente

Teorema 1*[Teorema de Pick]:* El área de todo retículo poligonal, es decir un polígono cuyos vértices tienen coordenadas enteras, es igual a

$$I+\frac{B}{2}-1,$$

donde I es el número de puntos con coordenadas enteras en el interior del polígono y B es el número de puntos con coordenadas enteras en la frontera del polígono.

La estructura de una de las demostraciones es primero probar que la fórmula de Pick es válida para rectángulos y triángulos. Luego, probar que si la fórmula de Pick vale para dos redes poligonales con interiores disyuntos y con un lado en común, entonces vale para la unión y finalmente demostrar que toda red poligonal se puede triangularizar, es decir, descomponer en triángulos disjuntos. Esta demostración detallada, así como otra versión se pueden ver en Ramírez (2010).

[1] Se entiende por matemática elemental a aquella que puede construirse con estudiantes de las escuelas y colegios, sin querer significar esto que sean triviales (Pérez et al., 2005).

Por ejemplo el área poligonal de la figura 1 es 9, ya que hay 8 puntos en la frontera, es decir $B=8$ y hay 6 puntos en el interior de P, luego $I = 6$, por lo tanto al aplicar el Teorema de Pick se obtiene que:

$$Área(P) = 6 + \frac{8}{2} - 1 = 9$$

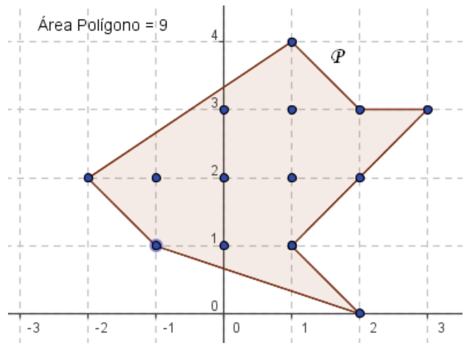


Figura 1: Ejemplo Teorema de Pick

A pesar de que en la actualidad el teorema es bien conocido, no se tiene muy claro por qué fue demostrado por Pick. Se presume que pretendía mostrar las ventajas didácticas que se pueden obtener cuando se relacionan distintos temas matemáticos (es decir, un enfoque interdisciplinario), ya que Pick tenía interés en la educación (Onnor, 2011).

2. Extensiones del Teorema de Pick

En principio el Teorema de Pick es para regiones poligonales, sin embargo este se puede extender para regiones con agujeros.

Definición 1: Sea R una red poligonal, un agujero de R es una red poligonal contenida en R, sin puntos de frontera en común.

En la figura 2 aparece una red poligonal con 3 agujeros.

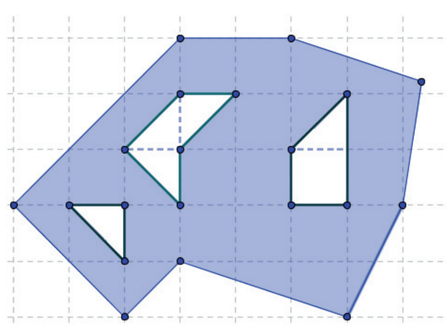


Figura 2: Red Poligonal con Agujeros

Teorema 2: Sea R una red poligonal con n agujeros, entonces

$$A(R) - I + \frac{B}{2} - 1 + n$$

donde I es el número de puntos enteros interiores y B es el número de puntos enteros sobre la frontera del polígono.

Demostración: Sea R' la red poligonal R sin agujeros, entonces por el Teorema de Pick

$$A(R') = I_0 + \frac{B_0}{2} - 1$$

donde I_0 y B_0 son respectivamente el número de puntos interiores y de frontera de R'.

Sean R_i $(i = 1, \ldots, n)$ cada uno de los n agujeros y sean I_i y B_i $(i = 1, \ldots, n)$ el número de puntos interiores y de frontera de R_i. Entonces

$$A(R) = A(R') - \sum_{i=1}^{n} A(R_i).$$

Además, $A(R_i) = I_i + \frac{B_i}{2} - 1$.

Por otra parte,

$$I = I_0 - \sum_{i=1}^{n} I_i - \sum_{i=1}^{n} B_i$$

$$B = B_0 + \sum_{i=1}^{n} B_i$$

donde I y B son los puntos interiores y de frontera de R.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
A(R) &= A(R') - \sum_{i=1}^{n} A(R_i) \\
&= I_0 + \frac{B_0}{2} - 1 - \sum_{i=1}^{n}\left(I_i + \frac{B_i}{2} - 1\right) \\
&= I_0 + \frac{B_0}{2} - 1 - \sum_{i=1}^{n} I_i - \sum_{i=1}^{n}\frac{B_i}{2} + n \\
&= I_0 + \frac{B_0}{2} - 1 - \sum_{i=1}^{n} I_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{B_i}{2} - \sum_{i=1}^{n} B_i + n \\
&= \left(I_0 - \sum_{i=1}^{n} I_i - \sum_{i=1}^{n} B_i\right) + \frac{1}{2}\left(B_0 + \sum_{i=1}^{n} B_i\right) - 1 + n \\
&= I + \frac{B}{2} - 1 + n
\end{aligned}$$

quedando demostrado.

En la figura 3 la red poligonal *ABCDE* tiene dos agujeros, entonces por el teorema anterior:

$$A(ABCDE) = 3 + \frac{15}{2} - 1 + 2 = \frac{23}{2}.$$

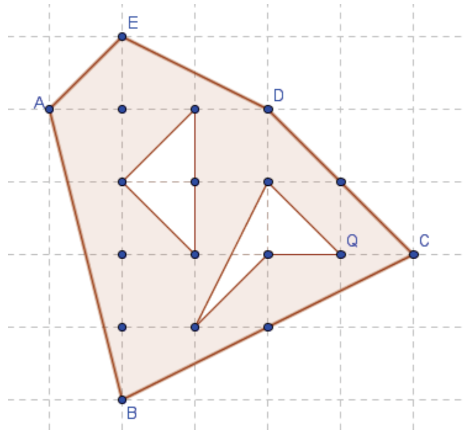


Figura 3: Ejemplo Teorema de Pick con Agujeros

El teorema de Pick se puede modificar para generalizarlo a 3 o más dimensiones (Kolodziejczyka, 2008).

3. Algunas Aplicaciones

A continuación se demostrará, a partir del Teorema de Pick, que no es posible construir un polígono regular de n lados, exceptuando el cuadrado, que tenga vértices enteros, es decir que sus n vértices tengan coordenadas enteras.

Teorema 3: No existen triángulos equiláteros cuyos vértices sean enteros.

Demostración: Supongamos que existe un triángulo equilátero ABC cuyos vértices son enteros. Entonces por el Teorema de Pick se tiene que

$$A(\Delta ABC) = P(\Delta ABC) = I + \frac{B}{2} - 1 \in \mathbb{Q}$$

es decir el área de ΔABC es una cantidad racional. Por otra parte, el área de ΔABC es igual a su base (b) por su altura (h) dividido entre dos, es decir

$$A(\Delta ABC) = \frac{bh}{2}, \quad \text{ver figura 4}$$

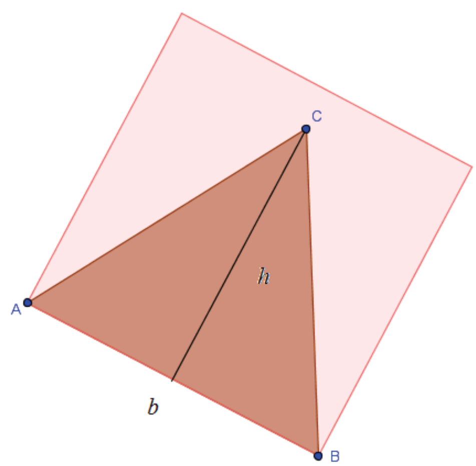


Figura 4: Demostración Teorema 3

Además, por el Teorema de Pitágoras

$$b^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}b}{2}$$

luego

$$A(\Delta ABC) = \frac{\sqrt{3}b^2}{4}.$$

Además, b^2 es el área del cuadrado de lado b, ver figura 4, entonces por el Teorema de Pick b^2 es racional. Así $\sqrt{3}$ sería racional, lo cual es absurdo. Por tanto, no existen triángulos equiláteros con vértices enteros.

El siguiente teorema generalizará el anterior resultado para cualquier polígono regular de n lados n>4, para ello utilizaremos el siguiente lema:

Lema 1: $\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$ con $n \geq 3$ es racional si y sólo si $n = 4$.

Demostración: Para su demostración ver O'Loughlin (2002).

Teorema 4: No existen polígonos regulares de cinco o más lados, cuyos vértices sean enteros.

Demostración: Supongamos que existe un polígono regular P de n lados ($n \geq 5$) cuyos vértices son enteros. Luego por el Teorema de Pick

$$A(P) = P(P) \in \mathbb{Q}$$

es decir, el área de P es una cantidad racional. Por otra parte

$$A(P) = \frac{nal}{2}$$

donde a y l son respectivamente la longitud de la apotema y la longitud de un lado de P.

Además,

$$\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{al}{2} \Rightarrow a = \frac{2}{l}\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$, ver figura 5.

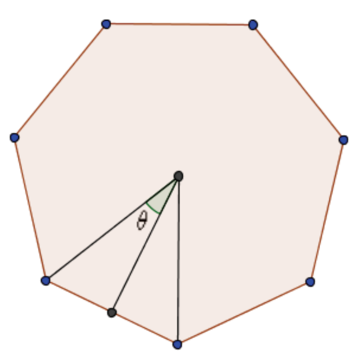


Figura 5: Demostración Teorema 4

Así

$$A(P) = 2n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

como $(n \geq 5)$ entonces $\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$ no es racional, así $A(P)$ no es racional, lo cual es una contracción.

Otras aplicaciones en particular en Teoría de Números las puede encontrar en (Elduque, 2010), (Niven, 1967) y (Ramírez, 2010).

REFERENCIAS

Onnor, J. Robertson, E. (2005). The Mactutor History Of Mathematics Archive. Recuperado el 6 de junio de 2011, en: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pick.html

Elduque, A. (2010) El Teorema De Pick, Departamento de Matemáticas, Universidad De Zaragoza, Recuperado el 6 de junio de 2011, en:: http://www.unizar.es/matematicas/algebra/elduque/more.htm.

Gaskell, R.W., Klamkin, M.S., Watson, P. (1976). Triangulations and Pick's Theorem, *Mathematics Magazine*, Vol. 49, No. 1, pp. 35-37.

Kolodziejczyka, K. Reayb, J. (2008). Polynomials and Spatial Pick-Type Theorems, *Expositiones Mathematicae*, Vol. 26, No.1, pp 41-53.

Niven, I. Zuckerman, H.S. (1967) Lattice Points And Polygonal Area, *The American Mathematical Monthly,* Vol. 74, No. 10, pp. 1195-1200.

O'Loughlin, D. (2002). The Scarcity of Regular Polygons on The Integer Lattice. *Mathematics Magazine*, Vol. 75, No. 1, Pp. 47-51.

Pérez, J, et al., (2005) *Cuatro Propuestas Didácticas en Matemáticas,* Universidad Sergio Arboleda, Bogotá.

Ramírez, J. (2010). El Teorema de Pick y Redes de Puntos. *MATerials MATematics, Publicació Electronica de Divulgacio del Departament de Matematiques de la Universitat Autonoma de Barcelona.* Vol. 2010, No. 5, 41.

Volver al índice de Conferencias

La lógica gráfica de C. S. Peirce

Arnold Oostra
Universidad del Tolima, Ibagué, aaoostra@gmail.com

Resumen. Charles S. Peirce fue un científico, filósofo y lógico estadounidense quien vivió en la segunda mitad del siglo XIX y la primera década del XX. Realizó muchos aportes significativos a la ciencia y la filosofía y además de ello fue uno de los creadores de la teoría de cuantificadores de la Lógica Matemática. Un trabajo más notable aún fue llevar esa teoría a una versión del todo gráfica, cristalizada en el sistema de los gráficos existenciales de los cuales esta conferencia es una presentación panorámica. Se comenzará con el sistema de los gráficos Alfa, que permite demostrar mediante diagramas todas las tautologías y deducciones del cálculo proposicional clásico. Luego se mostrarán las ideas básicas de los sistemas Beta y Gama así como algunos desarrollos investigativos recientes en este tema. El objetivo central de esta exposición es motivar el interés y el estudio de un maravilloso sistema gráfico para la lógica.

Palabras clave: C. S. Peirce, gráficos existenciales, cálculo proposicional, lógica de predicados, lógica modal.

REFERENCIAS

Brady, G. and Trimble, T. H. (2000) A categorical interpretation of C. S. Peirce's propositional logic Alpha. *Journal of Pure and Applied Algebra, 149,* 213-239.

Oostra, A. (Por aparecer) Los gráficos Alfa de Peirce aplicados a la lógica intuicionista. *Cuadernos de Sistemática Peirceana, 2*

Poveda, Y. (2000) Los gráficos existenciales de Peirce en los sistemas Alfa^{0} y Alfa^{00}. *Boletín de Matemáticas, 7,* 5-17.

Roberts, D. (1973) *The Existential Graphs of Charles S. Peirce*. Den Haag: Mouton.

Thibaud, P. (1982) *La Lógica de Charles S. Peirce: Del álgebra a los gráficos*. Madrid: Paraninfo.

Zalamea, F. (1997) *Lógica Topológica: Una introducción a los gráficos existenciales de Peirce*. Memorias del XIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Zalamea, F. (2010) *Los gráficos existenciales peirceanos*. Bogotá: Universidad Nacional.

Zeman, J. (1964) *The Graphical Logic of C. S. Peirce*. Ph.D. dissertation. University of Chicago, Illinois, USA.

Zeman, J. (1997) The Tinctures and Implicit Quantification over Worlds. In: Brunning, J., Fortster, P. (Eds.) *The Rule of Reason. The Philosophy of Charles Sanders Peirce*. Toronto: University of Toronto Press.

Volver al índice de Conferencias

Superficies con estructura de grupos

Carlos Antonio Julio-Arrieta
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Resumen. Será una conferencia que buscará la claridad y simplicidad con ejemplos, pero en general tratará de aquellas superficies regulares de dimensión k (o k-superficies) que tienen una estructura de grupos compatible con su estructura diferenciable proyectando la dirección de de una de las conexiones más importantes de la Geometría y el Álgebra donde el Análisis y la Topología que conviven de manera moderna.

Volver al índice de Conferencias

MODELOS ALGEBRAICOS EN EL CONTROL DE SATÉLITES ARTIFICIALES
Sequoia Space Team

Joaquín Luna Torres

Los satélites pequeños pueden realizar tareas complejas tales como vigilancia y comunicaciones y para ello es necesario controlar sus posiciones relativas (attitude) en el espacio. Para lograrlo es necesario conocer, con un buen grado de exactitud, su posición en el espacio. Debido a su bajo precio y tamaño pequeño, los sistemas de navegación inerciales resultan demasiado grandes, pesados y costosos, por consiguiente se hace necesario establecer controles que dependan de menor información, por ejemplo de las posiciones relativas del sol, la tierra y del campo magnético de la tierra.
En esta charla se presentan los elementos matemáticos necesarios para describir la posición y orientación de un Cubesat una vez que esté en órbita: se trata de la descripción de los sistemas coordenados esenciales, las matrices de rotación de tales sistemas, los ángulos de Euler y los cuaterniones cuyos productos permiten expresar las rotaciones de manera más sencilla y rápida. Nos centraremos en los cuaterniones para, posteriormente, establecer representaciones de rotaciones: miremos antes un problema que apareció en las misiones espaciales "Apollo".

Gimbal lock

Un "gimbals" (cojinete) es un anillo suspendido que puede rotar alrededor de un eje. Típicamente estos cojinetes se anidan uno dentro del otro para producir rotaciones en ejes diferentes. Algunos sistemas coordenados en matemáticas se comportan como cojinetes reales y se usan para medir ángulos, esto sucede, particularmente, con los Ángulos de Euler.
El "Gimbal lock" es la pérdida de un grado de libertad en el espacio tridimensional que ocurre cuando los ejes de dos de los tres cojinetes del sistema ocupan una posición paralela, lo cual da la apariencia de tener rotaciones

en un espacio bidimensional.

En el caso tridimensional, consideremos una plataforma sensora de nivel en una nave espacial que vuela hacia el norte con sus tres ejes mutuamente perpendiculares (es decir la medida de cada uno de los ángulos "roll", "pitch" y "yaw" es cero). Si la nave se lanza hacia arriba, los ejes "roll" y "yaw" de la plataforma aparecen paralelos.
Un incidente de "Gimbal lock" bien conocido sucedió en la misión lunar "Apollo 11" en la cual usaron un conjunto de cojinetes en un "inertial measurement unit (IMU)". Fue necesario mover manualmente la nave para sacarla de la posición "Gimbal lock".

El problema del "Gimbal lock" aparece cuando se utilizan Ángulos de Euler en ciertas aplicaciones de las matemáticas, por ejemplo en los sistemas de navegación aeroespacial. En forma más precisa, un "Gimbal lock" ocurre por que la función que relaciona los Ángulos de Euler con rotaciones (en términos topológicos, la función sobreyectiva con dominio el toro tridimensional T^3 y codominio el espacio real proyectivo RP^3, homeomorfo a $SO(3)$ y con grupo fundamental $\mathbb{Z}/2$) no es un revestimiento, ya que no es un homeomorfismo local en cada uno de sus puntos, y por lo tanto en algunos puntos el rango (grados de libertad) es menor que 3. Como ya hemos visto, los Ángulos de Euler pemiten dar una descripción numérica de las rotaciones en el espacio tridimensional utilizando tres números, pero esta descripción no solamente no es única sino que existen puntos donde no todo cambio en el espacio base (rotaciones) es consecuencia de un cambio en el espacio total (Ángulos de Euler). Esta es una restricción topológica: no existen recubrimientos de T^3 sobre RP^3; se logran revestimientos no triviales cuando el espacio total es la esfera tridimensional S^3, que es el grupo $Spin(3)$ y este se logra usando cuaterniones unitarios. Por esta razón es bien importante utilizar cuaterniones para describir rotaciones en los satélites artificiales.

References

[1] J. Diebel, *Representing Attitude: Euler Angles, Unit Quaternions, and Rotation Vectors*, Stanford University, Stanford, California, 2006.

[2] K.M. Fauske and I. Moerdijk, *NCUBE Attitude Control*, Department of Engineering Cybernetics NTNU, 2002

[3] K. Svartveit, *Attitude determination of the NCUBE satellite*, Master Thesis, Department of Engineering Cybernetics, Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet 2003.

[4] R. Wiśniewski, *Satellite Attitude Control Using Only Electromagnetic Actuation*, Ph. D. Thesis, Department of Control Engineering, Aalborg Universit, Denmark, 1996.

[5] K. Shoemake, *Quaternions*, Department of Computer and Information Science, University of Pennsylvania, 1992.

Volver al índice de Conferencias

Trapped modes in waveguides

Petr Zhevandrov
Universidad de La Sabana, Colombia
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, México

Abstract

We consider an infinite elastic beam (one-dimensional waveguide) in the Timoshenko approximation with a weakly perturbed density. The plane waves of the unperturbed system form the continuous spectrum, which has multiplicity 2 for $0 < \omega^2 < \omega_0^2$ and multiplicity 4 for $\omega^2 > \omega_0^2$ (here ω is the frequency and ω_0 is the cut-off frequency). The first branch of the spectrum (flexural mode) corresponds to the ray $\omega^2 > 0$, and the second (shear mode), to the ray $\omega^2 > \omega_0^2$. The perturbation can give rise to an eigenvalue to the left of ω_0^2. The corresponding eigenfunction has a decreasing component corresponding to the second branch coupled, generally speaking, with a plane wave which corresponds to the first branch of the continuous spectrum. It turns out that for certain perturbations (e.g., a square barrier of certain length), the oscillating component disappears and the decreasing exponential becomes a true eigenfunction (trapped wave) with an eigenvalue embedded in the continuous spectrum. This behaviour resembles some numerical-analytical results concerning the appearance of embedded eigenvalues in waveguides under perturbations described in the literature.

Trapped modes in waveguides have become recently a source of numerous publications in elasticity, hydrodynamics and quantum mechanics (see, e.g., [1], [2], [3], [4] and references given therein). Frequently, their existence is due to a perturbation of a problem whose continuous spectrum has a cut-off, that is, occupies a ray (say, $\omega^2 \geq \omega_0^2$, where ω is the frequency, i.e., the spectral parameter, and ω_0^2 is the cut-off). Certain perturbations give rise to an eigenvalue to the left of the cut-off, which is the case of the Schrödinger equation in one and two dimensions [5], [6], when a shallow potential well possesses bound states (an equivalent term for trapped modes in the quantum mechanical context). On the other hand, many waveguide problems present various cut-offs with the multiplicity of the continuous spectrum growing as ω^2 increases. An example is provided by a plane acoustic waveguide [7] of width $2d$ with a perturbation which is a circle of radius a on the centerline (see Figure 1).

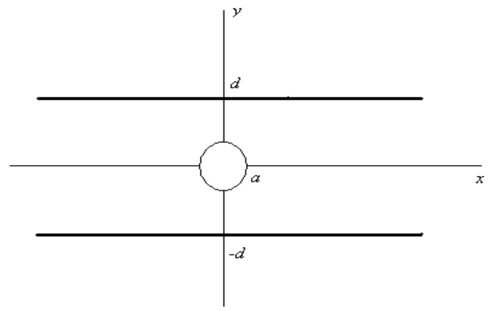


Figure 1: Acoustic waveguide.

The governing equation is the Helmholtz equation $\Delta\phi + \omega^2\phi = 0$ with, say, Neumann conditions on the walls and the circle. For modes antisymmetric with respect to the centerline, the continuous spectrum has cut-offs at $\omega_n = (2n-1)\pi/2d$, $n = 1, 2, \ldots$; the continuous spectrum has multiplicity $2n$ for $\omega_n^2 < \omega^2 < \omega_{n+1}^2$ (in the terminology of [7] the multiplicity here is n since two modes having the x-dependence of the form $\exp(\pm ilx)$ are counted as one; here x is the coordinate along the waveguide). Numerical calculations from [7] show that there always exists a trapped mode with frequency to the left of the first cut-off ω_1^2, and for a certain value of the radius a (that is, for a *specific* perturbation) there exists an embedded eigenvalue to the left of the second cut-off ω_2^2 in the interval $\omega_1^2 < \omega^2 < \omega_2^2$. Naturally, there arises the question whether in general cut-offs embedded in the continuous spectrum can generate eigenvalues also embedded in it, and it is well-known that the answer is not easy to obtain because the proof of their existence is more complicated precisely due to the fact that they are embedded [8]. For example, asymptotic technique in this case does not provide the proof of existence since if one constructs an approximate eigenfunction, one can only guarantee that the distance from the approximate eigenvalue to the spectrum is small; obviously, for embedded eigenvalues it is simply zero. We note that for a slightly deformed quantum waveguide embedded trapped modes were obtained recently in [9].

Our goal in this talk is to present some results concerning the Timoshenko system describing a beam of infinite length with a slightly perturbed, say, density. This model is simpler than the acoustic waveguide described above in that there are only two cut-offs; the continuous spectrum occupies the positive ray with a cutoff at $\omega_0^2 > 0$ (this number is expressed through the physical constants of the model). For $0 < \omega^2 < \omega_0^2$ there are two propagating modes, and for $\omega_0^2 < \omega^2$, there are four. The cut-off $\omega^2 = 0$, obviously, does not produce trapped modes under a perturbation (since the square of the frequency would be negative). On the other hand, the positive cut-off ω_0^2 does produce an eigenvalue to the left of ω_0^2 under a *specific* perturbation, for example, a small change of density on a segment of specific length. Physically, this means that this segment traps the propagating mode of the first branch of the continuous spectrum and the cut-off of the second branch generates an exponentially decreasing solution, just as in the classical Schrödinger problem. We construct *exact* solutions describing trapped modes in the form of convergent series in powers of ϵ (here ϵ is the small parameter characterizing the magnitude of the perturbation). We note that the technique of orthogonal decomposition used, e.g., in [1], [3] (see also [8]), is not straightforward in this example, because one should use a decomposition which involves orthogonality to the eigenfunctions of the continuous spectrum of the first branch. The eigenfunctions of this continuous spectrum in the case when the perturbation is present are *distorted* plane waves in contrast to the constant coefficients case, and are not that easy to construct. Although our problem is quite different from the one considered in [9], the conditions of existence of trapped modes are similar to the ones obtained in that paper. We conclude with numerical results for a beam with piecewise constant density.

References

[1] Evans, D.V., Levitin, M. & Vassiliev, D. 1994 Existence theorems for trapped modes. *J. Fluid Mech.* **261** 21–31.

[2] Londergan, J.T., Carini, J.P. & Murdock, D.P. 1999 *Binding and scattering in two-dimensional systems: applications to quantum wires, waveguides and photonic crystals.* Berlin: Springer.

[3] Cherednichenko, K.D. & Sabina, F.J. 2009 On the existence of waves guided by a cavity in an elastic film. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **62** 221–233.

[4] Romero Rodríguez, M.I. & Zhevandrov, P. 2010 Trapped modes and resonances for water waves over a slightly perturbed bottom. *Russian J. Math. Phys.* **17** 307–327.

[5] Landau, L.D. & Lifshitz, E.M. 1958 *Quantum mechanics: non-relativistic theory,* §45. Oxford: Pergamon Press.

[6] Simon, B. 1976 The bound state of weakly coupled Schrödinger operators in one and two dimensions. *Ann. Phys. (NY)* **97** 279–288.

[7] Evans, D.V. & Porter, R. 1998 Trapped modes embedded in the continuous spectrum. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **51** 263–274.

[8] Linton, C.M. & McIver, P. 2007 Embedded trapped modes in water waves and acoustics. *Wave Motion* **45** 16–29.

[9] Nazarov, S.A. 2011 Asymptotics of eigenvalues in the continuous spectrum of a regularly perturbed quantum waveguide. *Theor. Math. Phys.* **167** 606–627.

Volver al índice de Conferencias

Algunos conceptos de probabilidad y estadística inferencial ilustrados mediante simulaciones utilizando Excel

M.Sc. Luis Alejandro Másmela Caita*
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Abstract

Las nuevas tecnologías computacionales han permitido utilizar métodos alternativos para presentar conceptos matemáticos, variando así el paradigma en cuanto a la relación cognitiva entre el estudiante y el objeto del conocimiento. Se presenta aquí, utilizando la hoja de cálculo Excel, algunas simulaciones que pretenden ilustrar conceptos particulares de la probabilidad y la estadística inferencial como son: el enfoque frecuentista del concepto de probabilidad, el cálculo de probabilidades en modelos distribucionales binomial y normal, además del teorema del límite central y su aplicación en un problema que ilustra la toma de decisiones soportado en el concepto de probabilidad.

Palabras y Frases Claves: Distribución binomial, distribución normal, teorema del límite central, simulación, Excel, Probabilidad, Estadística Inferencial.

*lmasmela@udistrital.edu.co

Fin de esta sección

Ir al Menú

XXIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística

Sede:
Universidad Distrital
Francisco José de Caldas

Cursos

Índice de Cursos

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
Educadora de educadores

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Menú inicio

Índice de Cursos

Menú inicio

Perspectivas teóricas de investigación en Pensamiento Matemático Avanzado

Eliécer Aldana Bermúdez
Universidad del Quindío, Armenia,
eliecerab@uniquindio.edu.co

Resumen. El curso que aquí se presenta tiene como objetivo analizar en el marco de la educación matemática las perspectivas teóricas de investigación más utilizadas en el campo del pensamiento matemático avanzado. En primer lugar se pretende hacer algunas precisiones conceptuales en torno a lo que aquí se entiende por educación matemática y su relación con la didáctica de la matemática, y en segundo lugar se discuten algunos marcos teóricos de investigación en educación matemática que tienen que ver con los procesos cognitivos característicos del pensamiento matemático avanzado.

Palabras clave: Educación matemática, didáctica de la matemática, perspectiva teórica, procesos cognitivos, pensamiento matemático avanzado.

Este estudio tiene una perspectiva teórica de investigación en educación matemática en el campo del pensamiento matemático avanzado (PMA), por tanto se considera necesario en primer lugar hacer algunas precisiones conceptuales en lo relacionado con lo que vamos a entender por educación matemática, y su relación con la didáctica de la matemática.

En este sentido, los educandos y de todas las edades adquieren parte importante de su herencia cultural por medio de un sistema social de formación organizado, llamado sistema educativo. Las matemáticas hacen parte de esa cultura que se transmite a través del sistema educativo y son parte esencial de la formación básica que deben recibir y compartir todos los ciudadanos de un país. Por tanto es pertinente en nuestro contexto hablar de educación matemática. La educación matemática abarca desde las primeras nociones que se le enseñan a un escolar, hasta su culminación en una formación profesional o en estudios superiores.

Al respecto Rico y Sierra (2000), consideran la educación matemática como conjunto de ideas, conocimientos, procesos, actitudes y, en general de actividades implicadas en la construcción, representación, transmisión y valoración del conocimiento matemático que tiene lugar con carácter intencional, y que se propone dar respuesta a los problemas y necesidades derivados de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.

Estos mismos autores plantean que la educación matemática presenta tres ámbitos de actuación:

- **Educación matemática como conjunto de conocimientos:** Conocimiento matemático como objeto de enseñanza aprendizaje, diseño, desarrollo y evaluación del currículo de Matemáticas.
- **Educación matemática como actividad social:** Conocimiento profesional y formación del profesor de Matemáticas.
- **Educación matemática como disciplina científica**: Didáctica de la Matemática.

Es decir que cuando hablamos de educación matemática hacemos referencia a un objeto matemático de estudio, a un profesional dedicado socialmente a la formación matemática y a una ciencia que le ofrece las herramientas necesarias para que el docente resuelva los problemas que se le presentan en el aula de clase.

En este sentido, la didáctica de la matemática es la ciencia que se ocupa de estudiar e investigar los problemas de la educación matemática y proponer marcos explicativos para su resolución.

Indaga metódica y sistemáticamente los procesos de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, y los planes de formación de los educadores matemáticos. Tiene como objeto delimitar y estudiar los problemas que surgen durante los procesos de organización, comunicación, transmisión, construcción y valoración del conocimiento matemático junto con su propia fundamentación teórica.

En segundo lugar, para referimos al PMA, tenemos que comprender los procesos cognitivos que subyacen a este tipo de pensamiento en los estudiantes. A lo largo de este artículo se hará una breve exposición de las principales características del PMA, y de algunos marcos teóricos de investigación que en educación matemática han sido objeto de estudio desde este campo del pensamiento matemático. El PMA tiene que ver con los procesos mentales propios de las matemáticas superiores que se enseñan y se aprenden en los últimos años de bachillerato y en especial en el ámbito universitario (Aldana, 2011, p. 58).

Asimismo Azcárate y Camacho (2003, p. 136-141), ponen de manifiesto que este tipo de pensamiento por su naturaleza posee unos procesos característicos entre los que destaca: el nivel de abstracción, formalización del conocimiento, la representación, definición de los conceptos y la demostración; además afirman que aunque no es posible establecer claramente una distinción entre las matemáticas elementales y las avanzadas, si se pueden indicar algunos rasgos característicos, uno de los cuales es la complejidad de los contenidos y la forma de controlarla; los procesos más potentes son aquellos que permiten este control, en especial la representación y la abstracción, y además establecen “que en las matemáticas elementales los objetos se describen, mientras que en las avanzadas estos objetos matemáticos se definen”.

De otra parte Dreyfus (1991), afirma que "comprender es un proceso que tiene lugar en la mente del estudiante" y es el resultado de "una larga secuencia de actividades de aprendizaje durante las cuales ocurren e interactúan una gran cantidad de procesos mentales". Cuando hacemos referencia a procesos cognitivos implicados en el PMA, pensamos en una serie de procesos matemáticos entre los que se destaca el proceso de abstracción que consiste en la substitución de fenómenos concretos por conceptos organizados en la mente. No se puede decir que la abstracción sea una característica exclusiva de las matemáticas superiores, como tampoco lo son otros procesos cognitivos de componente matemática tales como analizar, categorizar, conjeturar, generalizar, sintetizar, definir, demostrar, formalizar, pero resulta evidente que estos tres últimos adquieren mayor importancia en los cursos superiores. Por otro lado, entre los procesos cognitivos de componente más psicológica, además de abstraer, podemos citar los de representar, conceptualizar, inducir y visualizar.

Las investigaciones de tipo cognitivo están interesadas en estos procesos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos matemáticos, donde es fundamental tener en cuenta que la forma en que se aprende no suele coincidir con la manera lógico-formal de presentar un concepto matemático ante la comunidad matemática; se puede incluso afirmar que es frecuente que ésta presentación lógica ofrezca obstáculos cognitivos al estudiante.

En este sentido, algunos de los modelos cognitivos que se utilizan en la investigación de los procesos involucrados en el aprendizaje de conceptos matemáticos complejos, como son los implicados en el Análisis Matemático; estos modelos son distintas formas teóricas de describir la naturaleza del conocimiento de los estudiantes y los procesos de construcción del mismo.

En relación con estos modelos cognitivos, uno de ellos, es el que tiene que ver con la memoria del estudiante cuando evoca algo que generalmente no es la definición del concepto, sino lo que se denomina *concept image* (imagen del concepto), que consiste en "toda la estructura cognitiva de un sujeto asociada a un concepto matemático y que incluye todas las imágenes mentales, las propiedades y los procesos asociados al concepto. Se construye a lo largo de los años por experiencias de toda clase y va cambiando según el individuo madura y encuentra nuevos estímulos" (Tall y Vinner, 1981, p. 152). Esta imagen del concepto está formada por representaciones visuales, recuerdos de experiencias con el concepto y registro de ejemplos. La imagen del concepto, es entonces, toda la estructura cognitiva asociada a una noción matemática, aunque no sea necesariamente coherente en todo momento ya que los estudiantes pueden evocar imágenes contradictorias en momentos diferentes. Una imagen mental (Azcárate y Camacho, 2003) es el conjunto de todas las imágenes asociadas al concepto en la mente del sujeto, incluyendo cualquier tipo de representación del concepto matemático que puede ser gráfica, numérica, o simbólica entre otras. En cambio, la *definición del concepto*, se refiere a "una definición verbal, a un conjunto de palabras para especificar un concepto" (Tall y Vinner, 1981, p. 152).

Asimismo, cuando un estudiante se enfrenta a una tarea con relación a un concepto matemático, generalmente esperamos que la definición sea activada para que le ayude en la resolución de la tarea, sin embargo, eso no es lo que suele ocurrir. Usualmente el estudiante no utiliza la definición y responde de acuerdo a su imagen del concepto. El carácter, adecuado o no, de las imágenes, propiedades y procesos que integran la imagen del concepto puede llevar a la aparición de errores e inconsistencias. El conflicto entre la imagen del concepto y la definición del concepto significa, en la práctica, la ausencia de una verdadera comprensión del concepto por parte del alumno. En este sentido, Aldana (2011) pone de manifiesto que adquirir un concepto significa tener una imagen conceptual de forma que se asocien ciertos significados a la palabra que designa el concepto: imágenes mentales, propiedades, procedimientos, experiencias, sensaciones, además, de tener un dominio de la complejidad y construcción del concepto, porque muchos alumnos recuerdan de memoria la definición de un concepto producto de la instrucción previa pero cuando tienen que utilizarlo no saben cómo hacerlo o lo hacen de forma errónea.

Otro de los modelos cognitivos es el que tienen que ver con el paso de proceso a objeto cognitivo, que como indican Azcárate y Camacho (2003), la complejidad del conocimiento matemático superior, es que, en su mayoría, los conceptos del PMA, pueden jugar el papel de procesos y de objetos, según la situación planteada o el nivel de conceptualización que tenga el alumno. En este mismo aspecto cognitivo sobre la construcción de los objetos matemáticos, Tall (1991) y Gray y Tall (1994), hacen planteamientos para determinar los procedimientos o procesos de las nociones matemáticas mediante un simbolismo de naturaleza dual que sirva para referirse tanto al procedimiento como al concepto. Además, indican que la ambigüedad simbólica permite la flexibilidad entre el proceso para llevar a cabo una tarea matemática y el concepto que se va a manipular intelectualmente como parte del esquema mental del individuo, que ellos denominan "procepto". El término "procepto" lo definen para referirse a la combinación tanto del proceso y del objeto utilizando el mismo símbolo.

Al respecto, Sfard (1991), señala que los conceptos matemáticos abstractos pueden ser concebidos desde dos perspectivas. Una como concepciones operacionales (procesos, algoritmos y acciones) y otra como concepciones estructurales (conceptos matemáticos considerados objetos abstractos), donde las concepciones operacionales son previas a las concepciones estructurales. El paso de las concepciones operacionales a las estructurales se realiza a través de las tres fases siguientes: Interiorización, Condensación y Reificación.

- **Interiorización**, es la fase en la que el estudiante se familiariza con los procesos que darán lugar al nuevo concepto. Estos procesos son operaciones con objetos matemáticos de nivel elemental y que se van construyendo de forma gradual, en la medida que el sujeto va adquiriendo las habilidades propias de dichos procesos.
- **Condensación,** es un periodo de cambio en el que se concentran largas secuencias de operaciones en unidades más manejables. Aquí, el estudiante se siente capaz de pensar en un proceso dado como un todo, en términos de entrada y salida, sin necesidad de considerar todos los detalles que lo componen. En esta fase se puede dar nombre al concepto que nace, se hace más factible combinar procesos, hacer generalizaciones y aumentar las posibilidades de hacer representaciones del concepto. Este periodo dura mientras la nueva entidad permanece ligada a un cierto proceso.
- **Reificación,** es el momento en que el estudiante es capaz de pensar en la nueva noción como un objeto en sí mismo con sus propias características. La reificación se define en términos más generales como un cambio ontológico, una habilidad repentina para ver algo familiar con una perspectiva totalmente nueva.

En este panorama teórico, otro de los modelos cognitivos de investigación acerca del conocimiento matemático superior, está la teoría de las representaciones semióticas, desarrollada por Duval (1996, 1999). Este investigador indaga sobre si los medios estructuralmente requeridos para que el sujeto pueda acceder a los objetos del conocimiento matemático son diferente, o no, a los medios requeridos para acceder a los otros objetos de conocimiento (por ejemplo en botánica, astronomía, química, historia,…), comprueba lo siguiente:

- Los objetos matemáticos, no son objetos reales, como pueden ser los propios de las disciplinas como la biología o la física que pueden ser manipulables. "De aquí la necesidad de describir y aprender cómo funcionan ciertos sistemas de representación: representaciones de escritura decimal de los números, representaciones gráficas de formas (funciones o no), representaciones de la escritura literal y algebraica, representaciones que son las figuras en geometría".
- La necesidad de no confundir nunca un objeto con su representación semiótica (un número y su escritura, un objeto geométrico y la figura que lo representa).

Duval, considera dos características esenciales de la actividad matemática: el cambio y la coordinación de los registros de representación semiótica. Por ejemplo, si se consideran los registros de representación: lingüísticos (lenguaje natural, escritura algebraica, lenguaje formal) u otros registros (figuras geométricas, gráficos cartesianos, tablas, etc.), se entiende por cambio de registro de representación "a la conversión de la representación de alguna cosa en una representación de esta misma cosa en otro sistema semiótico". Por ejemplo, realizamos un cambio cuando al resolver un problema matemático usamos un gráfico cartesiano para representar una función y en el siguiente paso de la resolución, expresamos con una ecuación algebraica la misma función. Por otro lado, como en el dominio del conocimiento matemático se movilizan diferentes registros de representación, también es necesario coordinarlos

Además de los modelos cognitivos anteriores, existe el de la teoría **APOS** de ***A****ction*, ***P****rocess*, ***O****bject*, ***S****chema.* La teoría APOE, desarrollada por Dubinsky (1991) y un grupo de investigadores de **R**esearch in **U**ndergraduate **M**athematics **E**ducation **C**ommunity (**RUMEC**), está basada en una interpretación del constructivismo a partir de la adaptación de algunas ideas del enfoque cognitivo de Piaget al PMA. Una de estas ideas es la de **"Abstracción Reflexiva"** introducida por Piaget para describir como construyen los individuos las estructuras lógico – matemáticas. Piaget y García

(1982, p. 10) definen la abstracción reflexiva, como “el mecanismo por el cual el individuo se mueve de un nivel a otro”.

Dubinsky (1991) afirma que el concepto de “abstracción reflexiva” constituye una poderosa herramienta que dota a los investigadores de una base teórica sólida para la comprensión del desarrollo del PMA. En este sentido, Dubinsky (1991, 1996) considera que la principal dificultad para aplicar las ideas de Piaget al PMA, ha sido que la teoría de Piaget tiene su origen en la manipulación de objetos físicos, pero a medida que el nivel matemático aumenta, se hace necesario construir nuevos objetos, no físicos sino mentales, y manipularlos para construir las ideas matemáticas. Considera que un problema importante en la Educación Matemática consiste en encontrar sustitutos apropiados para los objetos físicos y cree que los entornos informáticos pueden servir para este propósito. Además piensa, que para explicar las diferencias en las conductas de los estudiantes, es necesario formular hipótesis de tipo mental, ya que para poder explicar y buscar soluciones a estas diferencias, es necesario desarrollar una teoría sobre los procesos mentales, que pueda explicar lo que está ocurriendo en la mente de los estudiantes.

Desde esta perspectiva teórica del conocimiento matemático, Dubinsky (1991, 2000), y Asiala et al. (1996) consideran que los individuos realizan construcciones mentales para obtener significados de los problemas y situaciones matemáticas; estas construcciones mentales son desarrolladas y controladas por unos mecanismos de construcción, y que según DeVries (2001), citado por Aldana (2011), se caracterizan como sigue:

- **Acción,** es la transformación de un objeto percibida por el estudiante como externa. La transformación se produce como una reacción a una indicación que ofrece información sobre los pasos a seguir. Cuando un sujeto sólo puede realizar este tipo de transformaciones en la resolución de una tarea, decimos que está operando a nivel de acción.
- **Proceso**, es la interiorización de una acción. Es una construcción producto de una transformación interna, no necesariamente dirigida por un estímulo externo. En el proceso el sujeto puede describir los pasos involucrados en la transformación e incluso puede invertirlos, es decir, tiene más control de la transformación.
- **Objeto**, es cuando el estudiante reflexiona sobre acciones aplicadas a un proceso concreto, siendo consciente del proceso como una totalidad, aprecia que la transformación (acción o proceso) puede actuar sobre él y es capaz de construir la transformación. Entonces, se dice que el estudiante ha reconstruido este proceso en un objeto cognitivo; es decir que el proceso ha sido “encapsulado” en un objeto.
- **Esquema**, es una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados, consciente o inconscientemente, en una estructura coherente en la mente del individuo y que puede ser evocada para tratar una situación problemática de esa área de la Matemática. Una función importante y característica de la coherencia de un esquema está en poder determinar qué está en el ámbito del esquema y qué no.

La descripción sobre el desarrollo de un esquema, ha sido utilizada en distintas investigaciones a partir de la teoría APOE de Dubinsky (Bodi, 2006; Sánchez – Matamoros, 2004), entre otros. DeVries (2001), también adapta los niveles de desarrollo de un esquema de la siguiente manera:

- **Nivel intra**, se identifica por centrarse en aspectos individuales aislados de acciones, procesos y objetos de naturaleza similar. El individuo no ha construido ninguna relación entre ellos. Así por ejemplo, un sujeto entiende el concepto de Integral Definida a nivel intra, cuando no establece relaciones lógicas entre los elementos matemáticos, porque los recuerda de manera aislada, muestra concepciones erróneas en el uso de algunos elementos y establece sólo un intento de conjunción entre los elementos.

- **Nivel ínter**, se caracteriza por la construcción de relaciones entre acciones, procesos y objetos. En este nivel se comienzan a agrupar las informaciones de naturaleza similar. En el concepto de

Integral Definida, asumimos que el alumno tiene un pensamiento a nivel inter, porque comienza a establecer relaciones lógicas entre los elementos matemáticos especialmente la conjunción lógica entre los elementos cambiando de sistema de representación, establece además de la conjunción lógica la condicional y aparecen los primeros comienzos de síntesis entre los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico.

- **Nivel trans**, se adquiere cuando se tiene construida una estructura subyacente completa en la que las relaciones descubiertas en el nivel inter son comprendidas dando coherencia al esquema. En nuestra investigación concebimos que un alumno manifiesta un nivel trans de desarrollo del esquema de Integral Definida, cuando establece varias relaciones lógicas (conjunción, condicional y contrario de la condicional) entre los elementos matemáticos gráficos, algebraicos y analíticos, utiliza los elementos necesarios en la resolución de las tareas usando los significados implícitos para tomar decisiones, y establece una síntesis en los sistemas de representación gráfico, algebraico y analítico.

Las abstracciones reflexivas utilizadas para realizar las construcciones mentales se denominan mecanismos y han sido caracterizados por el grupo de investigadores RUMEC de la siguiente forma:

- **Interiorización**, es la construcción mental de un proceso que tiene que ver con una serie de acciones sobre objetos cognitivos. Las acciones se interiorizan en procesos.
- **Coordinación,** es el acto cognitivo de coger dos o más procesos y usarlos para construir un nuevo proceso. Piaget (1978), (citado por Dubinsky, 1991) usa “coordinaciones de acciones” para referirse a todas las formas de usar una o más acciones para construir nuevas acciones u objetos.
- **Inversión**, una vez que el proceso existe internamente, al sujeto le es posible invertirlo, en el sentido de deshacerlo, para construir un nuevo proceso original. Piaget (1978), (según Dubinsky, 1991) no lo trata en el contexto de la abstracción reflexiva, lo incluye como una forma de construcción adicional.
- **Encapsulación,** es la transformación mental de un proceso dinámico en un objeto cognitivo estático. Este objeto puede ser visto como una entidad total y puede ser transformado mentalmente por otras acciones o procesos. En este caso decimos que el proceso ha sido encapsulado en un objeto cognitivo.
- **Desencapsulación,** es el proceso mental de volverse desde un objeto al proceso desde el cual fue encapsulado el objeto o tuvo su origen.
- **Tematización**, es la reflexión sobre comprensión de un esquema, viéndolo como "un todo", y es capaz de realizar acciones sobre el esquema, entonces se dice que el esquema ha sido tematizado en un objeto, Asiala et al. (1996). En relación con este mecanismo, Piaget y García (1982, p. 103), definen la tematización como: “el paso del uso o aplicación implícita, a la utilización consciente, a la conceptualización”.

El resultado de éste análisis teórico es lo que se denomina la *descomposición genética del concepto* (Asiala et al., 1996). El análisis se basa principalmente en:

- La comprensión que tienen los investigadores sobre el concepto en cuestión y en sus experiencias como aprendices y profesores del mismo.
- Investigaciones previas sobre el concepto.
- Observaciones de los estudiantes en el proceso de aprendizaje del concepto estudiado.

Una descomposición genética está definida como un modelo cognitivo donde se describen las posibles construcciones mentales que un estudiante realiza para entender un concepto a partir de ciertas habilidades cognitivas previas, y que son descritas en el marco de la teoría APOE de Dubinsky (1996) y Asiala et al. (1996), donde se trata de explicar el entendimiento de un concepto mediante las construcciones mentales y los mecanismos de construcción.

La descomposición genética es una vía para aprender conscientemente un concepto matemático por parte del alumno, pensando que la descomposición genética de un concepto no es única; y que "pueden coexistir varias descomposiciones genéticas del mismo concepto en estudio" (Trigueros, 2005, p. 8).

REFERENCIAS

Aldana, E. (2011). Comprensión del concepto de Integral Definida en el marco de la teoría "APOE". Tesis Doctoral. Universidad de Salamanca, España.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Development in Ungraduate Mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education, 2,* 1 – 32**.**

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Development in Ungraduate Mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education, 2,* 1 – 32**.**

Azcárate, C. y Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10*, 2, 135-149.

Bodí, S.D. (2006*) Análisis de la Comprensión de Divisibilidad en el Conjunto de los Números Naturales*. Tesis Doctoral. Universitat d` Alacant.

DeVries, D. J. (2001). RUMEC / APOS Theory *Glossary. Georgia Collage & State University. Milledgeville.http://www.cs.gsu.edu/~rumec/Papers/glossary.html*. [Disponible el 18 de agosto de 2008]

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, En D. Tall. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la Perspectiva Piagetana a la Educación Matemática Universitaria. *Educación Matemática, 8, 3,* 24-41.

Dubinsky, E. (2000). De la Investigación en Matemática Teórica a la Investigación en Matemática Educativa: un viaje personal. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa., 3, 1,* 47 – 70.

Dreyfus, T. (1991). Advanced in Mathematical Thinking Processes. En D. Tall. (Ed.). *Advanced in Mathematical Thinking* (pp.25–41). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1996). ¿Quel cognitive retenir en didactique des mathemátique? *Recherches en Didáctique des mathemátique, 6,* 3,349-382.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking, basic issues for learning. Actas for PME 23, 3-326.

Gray, E. y Tall, D. (1994). Duality, Ambiguity, and Flexibility: A perceptual view of simple Arithmetic's, *Journal for Research in Mathematics Education*, *26, 2,* 115– 141.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1978). Psicología del Niño. Madrid, 8ª Edición: Ediciones Morata.

Piaget, J.; García, R. (1982). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. México, España, Argentina, Colombia. (Madrid): Siglo XXI.

Rico, L. y Sierra, M. (2000).Didáctica de las matemáticas e investigación. En J. Carrillo y L. C. Contreras (eds.). Matmática española en los albores del siglo XXI (p. 77-131). Huelva: Hergué.

Sánchez-Matamoros, G. M. (2004). *Análisis de la Comprensión en los Alumnos de Bachillerato y Primer año de Universidad sobre la Noción de Derivada (desarrollo del concepto).* Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflexions on Processes and Objects as Different sides of the same coin*, Educational Studies in Mathematics, 22,* 1 – 36.
Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12,* 151-169.
Tall, D. (1991). Reflections on APOS theory in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the XXIII Conference for the Psychology of Mathematics Education,* 1, (pp. 111 – 118). Haifa.
Trigueros, M. (2005). La Noción de Esquema en la Investigación en Matemática Educativa a Nivel Superior. *Educación matemática, 17, 1,* 5-31.

Volver al índice de Cursos

El origen de los Números y de los Sistemas de Numeración

Clara Helena Sánchez Botero
Universidad Nacional de Colombia, chsanchezb@unal.edu.co

Resumen. El propósito de este cursillo es aproximar a los asistentes a la historia de la matemática como un recurso didáctico importante para tener en cuenta. Haremos un recorrido del surgimiento y desarrollo de uno de los conceptos fundamentales de la matemática, el concepto de número. Su historia es fascinante

Palabras clave: historia, número, sistemas de numeración.

1. Introducción

El propósito de este cursillo es aproximar a los asistentes a la historia de la matemática como un recurso didáctico importante para tener en cuenta. Los libros de historia como los de Boyer, Kline, Collete, Katz, para solo mencionar algunos[1], nos presentan un panorama de la historia por épocas y culturas, desde los orígenes de la civilización hasta prácticamente nuestros días. Los especializados se dedican a profundizar en un tema específico y pueden hacer una historia panorámica o detenerse en un momento histórico relevante. Es el caso de los libros de la historia del álgebra, o del cálculo o la historia del número pi. El docente que quiera usar la historia debe saber usar los unos y los otros, y artículos relevantes, con el fin de sacarles el provecho requerido para la práctica docente. Los beneficios del conocimiento de la historia son destacados por autores tan importantes como Miguel De Guzmán reconocido por sus valiosas reflexiones sobre educación matemática en primaria y secundaria.[2]

Usar la historia no consiste en hacer un relato, en contar un cuento, en contar anécdotas o hacer biografías breves de los principales matemáticos de todos los tiempos; es necesario detenerse en los puntos que nos muestran las dificultades en el nacimiento y desarrollo de los conceptos para entender mejor el porqué de las dificultades de nuestros estudiantes. Los conceptos matemáticos nacen en un contexto científico y social determinado y se van ajustando con el tiempo: son dinámicos y no estáticos como usualmente cree la mayoría de la gente. Son creaciones de los seres

[1] Véase la Bibliografía.
[2] Miguel de Guzmán, http://www.oei.es/edumat.htm

humanos y no son eternos, ni perfectos, como consideraba Platón, así su filosofía nos siga permeando de manera significativa.

Para comenzar haremos un recorrido del surgimiento y desarrollo de uno de los conceptos fundamentales de la matemática, el concepto de número. Su historia es fascinante, comencemos.

2. Números y Numerales

Es relativamente reciente la diferenciación que hacemos entre un número y su representación en algún sistema: sea en un lenguaje ordinario, con palabras como *uno*, *menos tres*, *tres cuartos*, *un millón, raíz cuadrada de dos*, etc., o sea en un lenguaje simbólico. Llamamos ***número*** a una entidad abstracta y ***numeral*** a su representación en algún sistema. Los numerales 1, 2, 3 , 4, 5, 6, 7, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 2/3, 4/5, 7/8, -3/4, -9/26, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-5}$, 2 + 3i, ℵo, π, Φ, i, e, son ejemplos de la representación más usual hoy en día, en el lenguaje simbólico de la matemática, de los diferentes tipos de números que aceptamos actualmente. Por otro lado es el *sistema decimal* el sistema de representación más comúnmente aceptado prácticamente por todo el mundo hasta donde sé. La representación en el sistema decimal de los números naturales y de los enteros coincide plenamente con la usada anteriormente y que llamaré *estándar*, pero para los demás, racionales, irracionales y complejos no. Vale la pena preguntarse por qué y una de las razones para que un sistema de representación sea lo suficientemente bueno para representar cualquier número de cada uno de los tipos mencionados es que debe dar cuenta siempre de conjuntos infinitamente grandes por medio de un número finito de símbolos. Esa característica la tiene justamente el sistema decimal: con diez símbolos se puede representar, "teóricamente" cualquier número real, el sistema estándar no la tiene. Por ejemplo con frecuencia un estudiante pregunta ¿cuánto es $\sqrt{2}+\sqrt{3}$? y la respuesta es $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, pues no tenemos una palabra ni un símbolo diferente de la expresión dada para representar el número real que resultaría de hacer la suma. Sabemos que existe pero no tenemos una representación para él, salvo una buena aproximación en el sistema decimal.

Hoy en día reconocemos los siguientes tipos de números con su representación estándar:

Nombre del Conjunto		Ejemplos de numerales	Forma general de representación estándar
$\mathbb{N}$	Naturales	$0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$	La del sistema decimal
$\mathbb{Z}$	Enteros	$\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots,$	$-a$ siendo a un números natural
$\mathbb{Q}$	Racionales	½, $-3/5, 25/103, \ldots$	a/b donde a, y b son enteros, $b \neq 0$
I	Irracionales	$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{p}$ p primo, π, Φ, e	No hay
$\mathbb{R}$	Reales	Racionales+Irracionales	No hay
$\mathbb{C}$	Complejos	$2+3i,\quad \sqrt{2}-4i,$	$a+ib$ con a y b reales, $i=\sqrt{-1}$

Obsérvese como en el caso de los enteros, los racionales y los complejos pudimos dar una forma general de representación de este tipo de números, no es el caso de los reales. Vale la pena preguntarse ¿por qué? La respuesta es que su forma está dada por la definición usual de este tipo de números, en cambio no es fácil responder a la pregunta ¿Qué es un número natural? ni tampoco ¿qué es un número real? Respuestas que apenas fueron satisfactoriamente dadas en el siglo xix; sin embargo, el origen de los números y de los múltiples sistemas de representación que existen y han existido a través de la historia de la humanidad se remontan a varios miles de años antes de Cristo.

Los diferentes conjuntos de números están relacionados como se puede ver en el siguiente cuadro:

$$\mathbb{C}\ \text{Complejos}\begin{cases}\mathbb{R}\quad \text{Reales}\begin{cases}\mathbb{Q}\quad \text{Racionales}\begin{cases}\mathbb{Z}\quad \text{Enteros}\begin{cases}\mathbb{N}\quad \text{Naturales}\\ \text{Enteros negativos}\end{cases}\\ \text{Fraccionarios}\end{cases}\\ \text{Irracionales}\end{cases}\\ \text{Imaginarios}\end{cases}$$

2.1 La cantidad

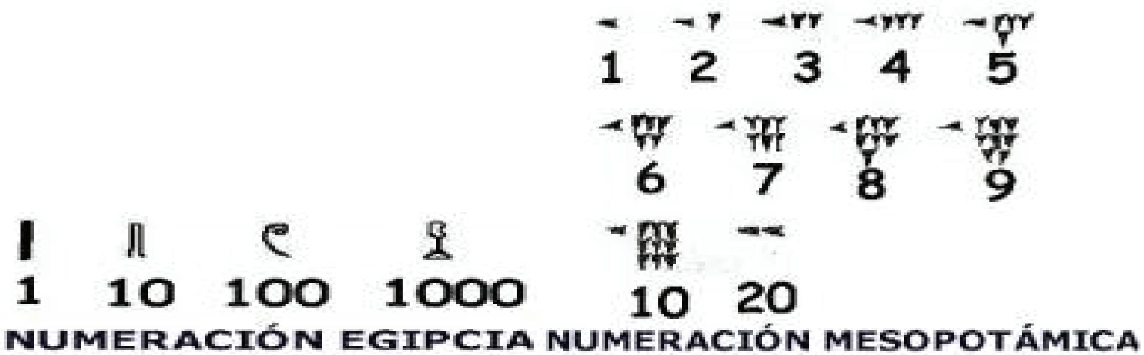
Una de las primeras preguntas que se hizo el hombre fue *¿Cuántos hay?*(1)¿Cuántas ovejas hay en el establo?(2) ¿Cuántos hijos tengo?(3)¿Cuánta leche produjo la vaca hoy?(4) ¿Cuánto trigo se recolectó en la semana?(5) ¿Cuánto debo pagar de impuestos?(6) ¿Cuántas tajadas de ponqué te comiste?(7) ¿Cuánto ponqué quedó? Todas ellas se responden con algún número; para responder las preguntas 3, 4 y 7 se requiere tener una unidad de medida y un sistema métrico asociado a algún sistema de representación numérica. Obsérvese además que en estas preguntas se hace la pregunta en singular ¿Cuánto? Desde la antigüedad se diferenció la cantidad en dos grandes tipos: *magnitudes discretas* y *magnitudes continuas*. Las magnitudes continuas son aquellas que pueden dividirse indefinidamente sin que pierdan su carácter; es el caso de las longitudes, las áreas, el volumen, el tiempo, por ejemplo. La cantidad de leche es una magnitud continua ya que se puede dividir cuántas veces se quiera (por lo menos teóricamente) y seguirá siendo cantidad de leche. Son magnitudes discretas las que no son continuas, las que al dividirlas pierden su "esencia" en un número finitos de pasos, es el caso de los números naturales.

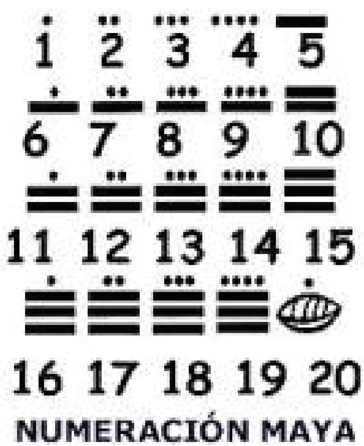
2.2 ¿Cuántos hay? Los números naturales y su representación

La referencia más antigua que se tiene de un sistema que permita guardar información sobre **cuántos hay** se encuentra en el **hueso de Ishango** descubierto por el belga Jean de Heinzelin de Braucourt en 1960 mientras hacía una exploración en Ishango, África, en el antiguo Congo Belga, hoy República Democrática del Congo. Algunos historiadores datan el hueso cerca de 35.000 años a.c.[3] otros 20.000 años a.c.[4] y otros *apenas* 8.000.[5] El hueso, como se puede observar en la figura contiene unas marcas, realizadas por grupos lo que hace suponer que la población allí establecida pudo haber sido una de las primeras sociedades en realizar conteos para guardar alguna información relevante. Esta sociedad tan sólo sobrevivió unos pocos cientos de años antes de quedar sepultada por una erupción volcánica.

[3] Es la fecha que se da en Wikipedia, página en la cual encontramos una foto del hueso que se conserva en el Real Instituto Belga de Ciencias Naturales y de donde hemos tomado la gráfica presentada.
[4]Katz, 1998, p.5.
[5]Eves, 1990, p.10.

Esas marcas en el hueso de Ishango son las más naturales para guardar información, una rayita *por cada elemento del conjunto* que se está contando. Todas las civilizaciones tienen palabras para los primeros números y las más avanzadas algún sistema de numeración. Es el caso de las civilizaciones babilónica, egipcia, griega, hindú, china, maya, para sólo mencionar unas pocas. Algunos ejemplos a continuación.

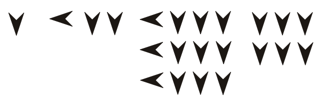




2.3 Los numerales de los naturales

De los sistemas mencionados el más avanzado fue el babilónico; es un sistema mixto entre un *sistema acumulativo* como el romano y un sistema posicional como el decimal. El **sistema de numeración babilónico** quedó registrado en tablas de arcilla en las cuales las marcas se hacían usando una aguja de lámina inclinada, escritura conocida con el nombre de cuneiforme. Los primeros sesenta numerales se realizan por medio de la repetición de dos símbolos básicos el clavo y la cuña; a partir del sesenta el lugar que ocupa el dígito(símbolo) cambia de valor según su posición. Por ello, siempre ha sido considerado un **sistema sexagesimal**. Este sistema apareció por vez primera alrededor de 1900-1800 a. C. y tiene sus vestigios hoy en día. Veamos algunos ejemplos:[6]

1 2 3 9 10 11 39 40 41 59



261.546

En cambio el **sistema romano** es acumulativo y está realizado con los símbolos I, V, X, L, C, M para los números 1, 5, 10, 50, 100 y 1000. Se usa aún, para fechas, prólogos de libros, por ejemplo.

2.4 El sistema decimal

El sistema decimal, que hoy tan naturalmente usamos, tiene origen en India y debe su *sobrevivencia* a dos razones: el uso de una notación posicional y el uso del cero. No fue la creación de un genio sino el trabajo a lo largo del tiempo por medio de intentos con ensayo y error, la reflexión y el ingenio de personas apasionadas por los números, números para dar respuesta a *cuántos hay* en grandes colecciones de cosas.Conocido por los árabes, fue introducido a Europa en la Edad Media y se fue transformando y acercando a los símbolos que hoy usamos, los cuales estaban ya definidos en el siglo XV.[7]Como bien sabemos el **sistema de numeración decimal**, o simplemente **sistema decimal**, es un sistema de numeración posicional de base diez en el que los números se representan por medio de las cifras cero (0); uno (1); dos (2); tres (3); cuatro (4); cinco (5); seis (6); siete (7); ocho (8) y nueve (9). El valor de la cifra depende del lugar que ocupa en la representación. Esto es el número de unidades que se toman de la potencia de 10 respectiva.
Un **sistema de numeración** o de representación numérica es, pues, un conjunto de símbolos y reglas de generación que permiten construir todos los números de un determinado sistema numérico.

3. Sistemas numéricos

Entendemos por un ***sistema numérico*** un conjunto de números dotado de algunas operaciones y relaciones que cumplen ciertas propiedades. En esta sección veremos algunos aspectos de los

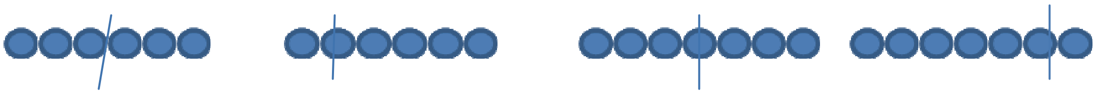
[6] Tomados de OscarRamírez, 2011, Aprendizaje del Valor Posicional en Estudiantes de Grado Sexto. Trabajo Final, Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.
[7] Sobre la historia de los sistemas de numeración nada mejor que el libro deIfrah, 1985. En particular el capítulo 29 está dedicado al origen de los numerales hindu-arábigos.

orígenes de los distintos tipos de números y sus propiedades, destacando algunas de las dificultades epistemológicas que aparecen en la construcción de esos sistemas.

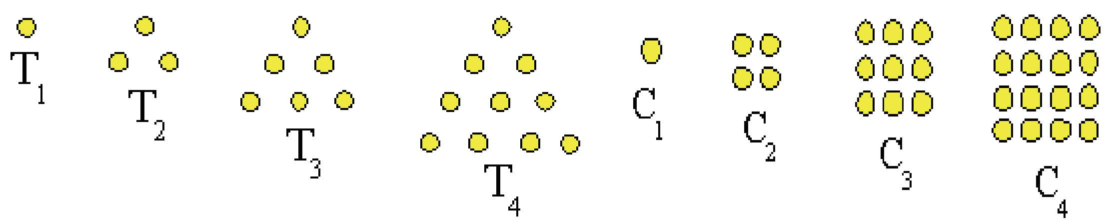
3.1 Los números naturales

Los primeros en estudiar los números sin necesidad utilitaria fueron los pitagóricos en el siglo V a.c. En la escuela pitagórica encontramos la primera definición de número conocida: *Un número es una multiplicidad de unidades*.[8]Así que los números para los pitagóricos son los que hoy llamamos naturales a partir del dos (2). Para ellos el uno (1) es el origen de los números y por lo tanto no es uno de ellos. Los números fueron usados en el comercio pero también fueron estudiados en sí mismos, y encontraron muchas de sus propiedades: par, impar, primo, perfecto, triangular, oblongo, cuadrado, etc. Como para ellos son el principio de explicación de la naturaleza, *Todo es número o una relación entre números*, era necesario conocer sus propiedades. Con los pitagóricos comienza lo que se suele llamar “matemática pura”: el estudio de la matemática independientemente de sus aplicaciones. Este trabajo era dejado para los intelectuales, para los nobles, las aplicaciones correspondían a los esclavos.

Con el objetivo de estudiar las propiedades de los números los pitagóricos los representaron por medio de puntos y según la forma geométrica obtenida al distribuirlos se les asignaba una determinada propiedad. *Par* cuando era posible dividir el “conjunto” de puntos en dos partes iguales o en dos desiguales e *impa*r cuando solo era posible dividirlo en partes desiguales. Así, dos, cuatro o seis son pares mientras tres, cinco o siete son impares. Damos el ejemplo de seis y siete.

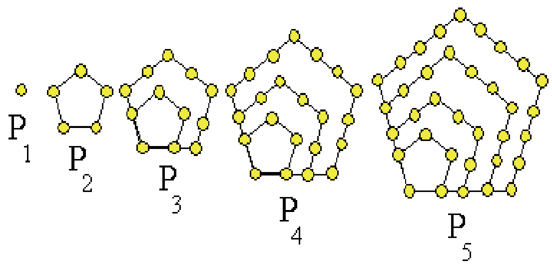


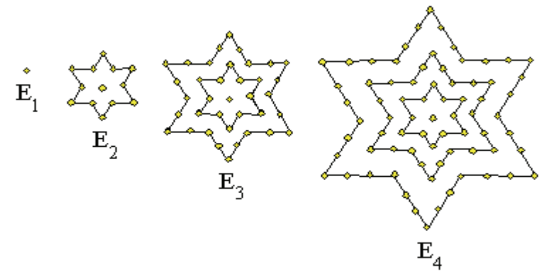
Cuando al representarlos se encontraba alguna figura geométrica conocida recibían el nombre de esa figura, de ahí el nombre de *números figurados*. Veamos algunos ejemplos:



Triangulares **Cuadrados**

[8] Es la definición que se encuentra en Libro VII de los *Elementos* de Euclides como varias de las definiciones de las propiedades mencionadas.

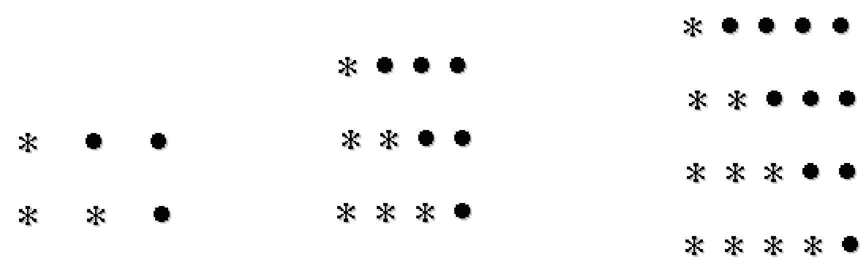




Oblongos o rectangulares **Estrellados**

3.2 Los orígenes de la demostración matemática

A los matemáticos nos han enseñado que para validar una afirmación es necesario demostrarla. Y demostrar es justificar cada paso que damos en una cadena de afirmaciones por medio de definiciones o proposiciones ya conocidas, aceptadas, demostradas. Poco énfasis se nos hace en el descubrimiento de conjeturas, en la observación de regularidades. Para ser más explícita veamos el caso de los números triangulares y su manejo por parte de la escuela pitagórica. Como señalamos, a través de puntos distribuían los números y razonaban con ellos.



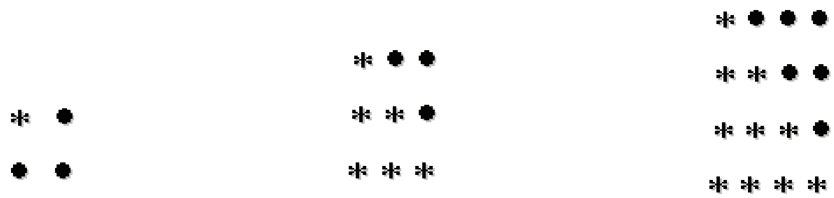
$$1+2=\frac{2x3}{2} \qquad 1+2+3=\frac{3x4}{2} \qquad 1+2+3+4=\frac{4x5}{2}$$

Al observar los gráficos anteriores es claro que los números triangulares se obtienen al sumar los primeros números en su orden y que al duplicarlos y ponerlos como se observa en las figuras se obtiene siempre un rectángulo. Las afirmaciones anteriores, generalizaciones de los tres casos observados, expresadas en el lenguaje algebraico que hoy manejamos serían simplemente (1) $T_n = 1+2+3+2+\cdots+n$ y (2) $2T_n = n(n+1)$ de donde resulta la expresión bien conocida $1+2+3+2+\cdots+n = n(n+1)/2$, primer ejercicio de **inducción matemática**.

Quisiera resaltar dos aspectos con el ejemplo anterior, el tipo de lenguaje usado: la representación gráfica en un caso y en el otro el lenguaje algebraico completamente simbólico. Por otro lado el tipo de demostración empírica de la época al aceptar la generalización con la evidencia de unos pocos casos particulares. Las demostraciones rigurosas por inducción matemática son recientes en la historia de las matemáticas. [9] El trabajo con los números figurados es un excelente recurso

[9]Para ver la diferencia entre razonamiento inductivo e inducción matemática véase: Clara H. Sánchez, 2002, pp.197-206.

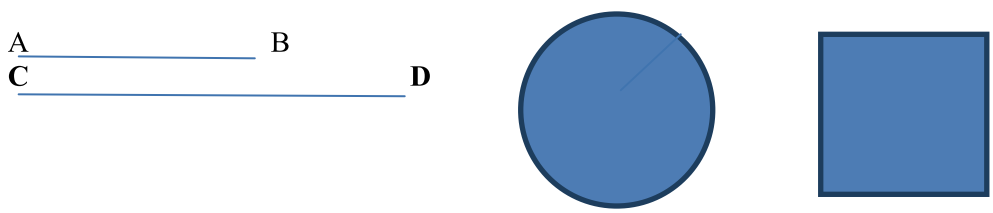
didáctico. Dejo sólo un ejemplo como ejercicio. Observar las figuras que siguen a continuación, hallar una generalización y expresarla en el lenguaje algebraico.



En la escuela pitagórica encontramos los primeros ejemplos de demostración matemática "rigurosa"; a ellos debemos la primera prueba de la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado con su lado (irracionalidad de raíz de dos) y el famosísimo Teorema de Pitágoras. Son ejemplos de demostraciones de **generalizaciones** de evidencias empíricas que se tenían desde civilizaciones anteriores.

3.3 Las magnitudes conmensurables y los números racionales.

Para medir se requiere comparar dos magnitudes, una de ellas se escoge como unidad y para los pitagóricos la unidad debía caber un número exacto de veces en cada una de las magnitudes que se estaban comparando. A esa relación se asignaba la relación, *razón*, entre los números encontrados. Así, se denominan *magnitudes conmensurables* aquellas para las cuales existe una medida común (unidad de medida), en caso contrario se llamaban *inconmensurables*. Por ejemplo a la relación entre los segmentos AB y CD o a la relación entre el lado del cuadrado y la del radio de la circunferencia debían asociarse razones entre números.



El origen de los números racionales está en la razón entre números que se debe asignar a las magnitudes conmensurables; los antiguos nunca le dieron a esas razones el estatus de números pero si los usaron como tales en sus aplicaciones.

El primero en trabajar sobre la definición de número racional y el estudio de sus propiedades fue Martin Ohm en un trabajo de 1822. Hacia 1860 Weierstrass definió los racionales como parejas de naturales y los negativos como otro tipo de parejas de naturales. Pero Weierstrass no consideró necesario aclarar la naturaleza de los naturales. Como veremos en otra sección fueron esencialmente Peano, Frege y Russell quienes se dieron a la tarea de aclarar este concepto.

3.4 Magnitudes inconmensurables y números irracionales

Los pitagóricos intentaron encontrar una medida común entre la diagonal de un cuadro y su lado, y nunca la encontraron, por eso decidieron razonar por reducción al absurdo y encontrar una contradicción al suponer que si eran conmensurables. Con ello demostraron que la diagonal de un cuadrado y su lado son inconmensurables. También supieron que la diagonal de un pentágono regular y su lado son inconmensurables. Este es el origen de los números irracionales. A la razón entre números que debía corresponder a la razón entre este tipo de pares de magnitudes se le dio el nombre de *ilógica* o *irracional*.

La existencia de este tipo de magnitudes afectó profundamente la matemática griega. Una de las consecuencias fue el divorcio entre aritmética y geometría, el impulso al desarrollo de la geometría y una de las causas posibles del estancamiento entre los griegos de la aritmética y del álgebra. En cambio otras culturas como las de los hindúes o los árabes, trataron los números irracionales por medio de aproximaciones y para 1500 en Europa se usaban libremente por Pacioli, Stifel, Stevin y Cardano reconocidos en la historia por sus aportes al desarrollo del álgebra y la solución de ecuaciones. John Wallis en 1685 en su *Álgebra* los reconocía como números en su pleno sentido. Sin embargo fue apenas en el siglo xix que los matemáticos se dieron a la tarea de encontrar una definición de ellos independiente de cualquier sistema de numeración. Las definiciones más conocidas son las de Cantor y Dedekind, publicadas en 1872.[10]

3.5 Los números negativos

Cabe a Diofanto, siglo II, aceptar los números negativos en su tratado de **Aritmética**. Con ellos obtiene un sistema cerrado para las cuatro operaciones del álgebra, para lo cual establece las leyes de los signos. En sus palabras *deficiencia por deficiencia permite disponibilidad.* Esto es, $(-)\,x\,(-) \;=\; +$.Establece igualmente las reglas de que hay que cambiar de signo cuando se cambia de lado de la igualdad y la de que hay que reunir términos semejantes. Otras civilizaciones como los hindúes o los chinos los introdujeron para representar deudas. Con rojo los haberes, con negro las deudas, uso contrario al de la contabilidad de hace unos años. Saldo en rojo significaba estar en deuda. Brahmagupta hacia el año 628 también estableció las reglas para las cuatro operaciones con números negativos y Bhaskara señaló que la raíz cuadrada de un número positivo es doble, positiva y negativa. Sin embargo no aceptaban la raíz cuadrada de un número negativo. Todos ellos tenían sus restricciones con respecto a ellos, no les reconocían completamente su calidad de números. En el caso de una solución negativa de una ecuación, la desechaban por inconveniente. A pesar de haber entrado los números negativos a Europa a través de los textos árabes, la mayoría de los matemáticos de los siglos XVI y XVII no los aceptaron como números, y si los aceptaban como tales los rechazaban como soluciones de ecuaciones.

3.6 Los números imaginarios

Los números imaginarios surgieron de la necesidad de encontrar soluciones a las ecuaciones algebraicas. El álgebra tal como la entendemos hoy en día comenzó apenas en el siglo XVI con los trabajos de François Viète cuando propuso representar una cantidad desconocida por una vocal y una cantidad conocida por una consonante. Descartes hará una mejora sustancial al simbolismo algebraico en el XVII y fue uno de los primeros en pensar que toda ecuación debe tener solución;

[10] Clara H. Sánchez, 1997.

llamó *números imaginarios* a las raíces de números negativos de las ecuaciones. En su *Geometría* afirmaba "Ni las raíces verdaderas ni las falsas (negativas) son siempre reales; algunas veces son imaginarias." Se consideraban *elementos ideales* que resolvían el problema. Tanto Newton como Leibniz trabajaron formalmente con ellos pero no tenían clara su naturaleza. Para 1700 los números naturales, enteros, fraccionarios, racionales y complejos eran conocidos, pero aún había rechazo hacia los negativos y los complejos. Euler, por ejemplo pensaba hacia finales del siglo que los números negativos eran mayores que el infinito. Cardano pensaba al encontrarse con los complejos que entre más progresaba la aritmética se obtenían resultado inútiles como las raíces de números negativos.[11]

3.7 Los números Complejos

Con el tiempo los números imaginarios adquirieron el estatus de número y pasaron a constituirse en los números complejos. Su historia está ligada al desarrollo de la geometría analítica, el álgebra y el análisis. A comienzos del siglo XIX se hizo manifiesta la importancia de estos números en muchas ramas de las matemáticas. Casi simultáneamente un agrimensor Wessel, un librero Argand y el gran matemático Gauss les dieron una interpretación geométrica la cual permitió que las operaciones entre números complejos fueran naturales desde un punto de vista intuitivo[12]. Desde entonces estos números han sido de la mayor importancia tanto para la matemática como para la física.

La interpretación de Gauss consiste en considerar un número complejo de la forma $a + bi$ como un punto (a, b) en el plano cartesiano, donde a es la parte real y b la parte imaginaria del complejo. Igualmente se puede considerar como un vector cuyo origen está en $(0,0)$ y su punto final en (a,b). Desde entonces se abandonó la idea de que fueran imaginarios y adquirieron su estatus pleno de números aunque conservaron su nombre.

4. Números "distinguidos"

Algunos números tienen historias particulares, se destacan seis: 0, π, $\sqrt{-1}$, e, Φ o el número áureo, y $\sqrt{-1}$. Sobre cada uno de ellos se da una referencia bibliográfica, lo que prueba su importancia. Como bien sabemos hay infinitos números y ellos tienen alguna característica especial; de manera muy breve nos referimos a ellos.

$\sqrt{2}$ aparece al relacionar la diagonal con el lado de un cuadrado.[13] Su historia consiste en hallar métodos para hacer cálculos cada vez más aproximados a su valor. El númeroπ establece la relación entre una circunferencia y su diámetro; es el número que más ha inquietado a los seres humanos. Matemáticos y aficionados a la matemática dedicaron muchos esfuerzos en tratar de calcularlo *exactamente*. Apenas en 1766 Lambert probó que era irracional y Lindemann en 1882 que era trascendente, lo que lo hace aún más particular.[14]

EL escocés John Napier publicó en 1614 el libro titulado *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*en el cual introduce el método de cálculo mediante logaritmos para facilitar las

[11] Gómez http://www.uv.es/gomezb/4Lajustificaciondeladeregla.pdf
[12] Eves, p.479
[13]Flannery, 2006.
[14]Bergreen, 1997.

operaciones aritméticas con números grandes. La base de los logaritmos que utilizó Napier es un número muy cercano al número *e* cuyo valor es aproximadamente 2,718.281.828. Pero se adjudica a Jacob Bernouilli, el descubrimiento de la constante cuando estudiaba un problema particular del llamado *interés compuesto, e* es un número trascendente.[15] El número Φligado a la proporción aurea, es un número mítico que se encuentra en la naturaleza, en la arquitectura en diferentes civilizaciones, en el arte y por ello se asocia con cierto ideal de belleza. [16]

El número 0 que hoy nos parece tan natural en nuestro sistema de numeración no fue aceptado fácilmente como número. Aparece inicialmente como un espacio en el sistema de numeración de los babilonios. Ptolomeo en el Almagesto usó el símbolo 0 para indicar que había un vacío entre las cifras. El cero fue introducido en Europa por los árabes quienes los conocían de los indios. Fue Fibonacci en el siglo XII quien lo utilizó por primera vez en su libro *LiberAbaci*. Los mayas lo conocieron y usaron el símbolo  en su sistema de numeración.[17] Por último √-1 surge de la necesidad de encontrar un simbolismo para las raíces negativas. [18]

5. ¿Qué es un número?

Para 1800 ya se conocían y trabajaba en matemáticas con todos los tipos de números a los que nos hemos referido hasta ahora. Se tenía un criterio para diferenciar entre racionales e irracionales: racionales eran aquellos que tenían una expansión decimal con período fijo, irracionales para los cuales no existía tal período. Pero la definición dependía de un sistema de numeración; los matemáticos decidieron buscar una definición independiente de cualquier sistema de numeración en aras del rigor que estaban buscando para la matemática.
La aparición de las geometrías no euclidianas, los problemas de rigor que presentaba el uso de los infinitesimales en análisis, y el desarrollo del álgebra generaron lo que se llamó el movimiento de aritmetización del análisis liderado por Weierstrass. El fundamento de la matemática estaría en la aritmética. Era entonces necesario responder a la pregunta qué es un número real.

Las respuestas encontradas por Dedekind, Cantor y el propio Weierstrass definían número irracional en función de los números racionales. Estos por su lado eran los números de la forma a/b donde a y b son enteros y b≠0.[19]
Lo anterior generaba entonces la pregunta sobre qué es un entero, más particularmente la pregunta sobre qué es un número natural. La respuesta la encontramos a finales del siglo xix y comienzos del xx con los trabajos de Frege y Russell.

Definición de número natural

En matemáticas encontramos dos tipos de definiciones para un concepto matemático: explícitas o implícitas a través de un sistema axiomático. A continuación daré algunas de las más conocidas para número natural:

Explícitas

- Número es una multiplicidad de unidades. (Pitágoras)

[15] Maor, 2009.
[16] Olsen, 2004.
[17] Kaplan, 1999.
[18] Nahin, 1998.
[19] Sánchez, 1997.

- Número es una clase formada por todas las clases equivalentes a una clase dada. (Frege, siglo XIX)

- Número es cualquier cosa que sea el número de una clase. (Russell, siglo XX)

Implícitas

- Axiomas de Peano (siglo XIX)

  Términos indefinidos: cero, número, sucesor
  A1 Cero es un número
  A2 El sucesor de un número es un número
  A3 Dos números diferentes tienen sucesores diferentes
  A4 Cero no es sucesor de ningún número
  A5 Principio de Inducción matemática

Visión de número

Leo Cory ha acuñado la expresión *image of* para mostrar la visión que una comunidad matemática tenía sobre algún concepto en un momento dado de la historia. Esta visión da al concepto matemático, a la teoría matemática, en estudio, un lugar dentro de ese momento.

- Todo es número o relaciones entre números. (Pitágoras, siglo V a.c.)

- Dios nos dio los números naturales el resto es obra del hombre. (Kronecker, siglo XIX)

- Los números son creaciones libres de la mente humana. (Dedekind, siglo XIX)

Con las cuales podemos apreciar el significado del concepto de número a través de la historia.

Bibliografía

Berggren L., Borwein J., Borwein P. (1991)Pi: A source Book. Spinger.

Boyer Carl B. (1994), Historia de la Matemática, Alianza Universidad.

Collette jean Paul, 1986, Historia de las matemáticas. 2 Vol., Siglo XXI Editores, México.

Cory Leo (1996) Paradigms and Images in the History of Mathematics en E. Ausejo and M. Hormigon (eds). *Paradigms and Mathematics*, Madrid, Siglo XXI pp. 169-192.

De Guzmán Miguel, Tendencias Innovadoras en Educación Matemática. OEI. http://www.oei.es/edumat.htm

Eves Howard, (1990), An Introduction to the History of Mathematics. Saunders College Publishing.
Flannery D., 2006, The Square Root of 2. Praxis Publishing Ttd.

Gómez Bernardo, La justificación de la regla de los signos en los libros de texto:¿Por qué menos por menos da más? http://www.uv.es/gomezb/4Lajustificaciondeladeregla.pdf

Katz Victor J. (1998), A History of Mathematics, Addison-Wesley.

Maor Eli (1994) e: The Story of a Number. Princeton University Press.

Nahin Paul J. (1998) An Imaginary Tale. The Story of √-1. Princeton University Press.

Olsen S. (2004) The Golden Section. Walker and Compañy. New York.

Sánchez Clara H. (1997) La construcción de los números reales. Cuadernillo, 22 páginas, XIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, Bogotá.

Sánchez Clara H. (2002) Inducción filosófica, inducción matemática. En *Memorias del XIII Encuentro de Geometría y I de Aritmética*, pp.197-206.

Volver al índice de Cursos

Enseñar definiciones o aprovecharlas para construir conceptos en geometría

Leonor Camargo
Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, lcamargo@pedagogica.edu.co

Carmen Samper
Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, csamper@pedagogica.edu.co

Patricia Perry
Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, pperryc@yahoo.com.mx

Óscar Molina
Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, ojmolina@pedagogica.edu.co

Resumen. El Cursillo *Enseñar definiciones o aprovecharlas para construir conceptos en geometría* pretende suscitar la discusión entre los asistentes sobre el papel de las definiciones en el aprendizaje de la geometría y sugerir un enfoque para orientar el diseño de actividades para el aula (de primaria y secundaria) que busquen favorecer procesos de conceptualización de objetos geométricos aprovechando su definición.

Palabras clave: Conceptos, definiciones, circunferencia, ejemplos y contraejemplos, geometría.

1. Introducción

Uno de los procesos ligados al aprendizaje de la geometría es la construcción de conceptos. Este proceso está en estrecha relación con la visualización, el razonamiento, la representación, la justificación y la resolución de problemas y por ello debe ser tenido en cuenta para diseñar ambientes de aprendizaje de la geometría a nivel escolar. En este Cursillo vamos a ilustrar y discutir tres aproximaciones a la conceptualización de objetos geométricos elementales en las que el papel de la definición no es el que usualmente juega en el tratamiento teórico de éstos. Más que proponer un acercamiento original, queremos divulgar propuestas surgidas en la década de 1980 y 1990 que posiblemente no se conocen o no se han aprovechado lo suficiente en el diseño curricular.

El primer acercamiento tiene que ver con la construcción de definiciones a partir de la identificación de propiedades relevantes e irrelevantes en representaciones gráficas que son ejemplos y contraejemplos del objeto que se quiere definir. Es una vía muy fructífera principalmente para el caso de objetos geométricos con los que no se tiene mucha familiaridad. Esta propuesta fue desarrollada por Hershkowitz y Vinner (1982). Además de distinguir entre el concepto imagen y el concepto definición, estos investigadores se dieron a la tarea de identificar Caminos Cognitivos Comunes que sirven para identificar qué atributos son más difíciles de identificar por parte de los estudiantes.

El segundo acercamiento se basa en la construcción de figuras representantes de los objetos que se quieren conceptualizar, usando diversos instrumentos de construcción. Es una vía de trabajo útil cuando se tiene cierta familiaridad con los objetos pero no se ha hecho un estudio cuidadoso de su definición o de sus propiedades. Es una propuesta, sugerida entre otros por Chassapis (1999), que puso en práctica supuestos socioculturales sobre el aprendizaje, como aquel que afirma que el conocimiento está mediado por los instrumentos que se tienen a disposición para acceder a él. La propuesta ha cobrado vigencia hoy en día porque existe la posibilidad de poner a disposición de los estudiantes diversos artefactos que hacen ostensivas propiedades diferentes de los objetos involucrados.

El tercer acercamiento es propuesto por el grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría de la Universidad Pedagógica Nacional, para el caso en el que los estudiantes tienen acceso a un conjunto de definiciones, no necesariamente correctas, pero en alguna medida usuales, de un objeto geométrico. Se trata de aprovechar el análisis detallado de la definición para estudiar porqué cada propiedad incluida en ésta es necesaria, y de esta forma proveer elementos para crear conjuntos de ejemplos y no ejemplos de lo que se quiere definir. Este acercamiento puede darse aprovechando el uso de geometría dinámica, el cuál se puede explotar para ilustrar que las definiciones son arbitrarias y que ellas dependen del contexto teórico en el que se esté trabajando.

1.1 SESIÓN 1

El objetivo de la primera sesión del Cursillo es presentar y discutir el acercamiento conceptual a los objetos geométricos, vía el estudio de representaciones gráficas del objeto que son ejemplos y contraejemplos. A partir de un ejercicio inicial de representación de un objeto geométrico y la escritura de la definición, se motivará la reflexión sobre la validez de la definición y la distinción entre concepto y definición. Después se aclararán algunos conceptos como concepto-imagen, concepto-definición y camino cognitivo común. Se presentarán y discutirán algunos supuestos comunes sobre el papel y las características de las definiciones en el ámbito educativo y se presentarán algunos resultados investigativos sobre el papel que juegan las definiciones en la resolución de problemas y algunos caminos cognitivos usuales. La sesión culminará con un ejercicio diseñado para la formación de maestros por Hershkowitz, Bruckheimer y Vinner (1987) en el que se hace evidente el papel que juegan los ejemplos y los contraejemplos en la conceptualización de un objeto geométrico.

1.2 SESIÓN 2

El objetivo de la segunda sesión del Cursillo es problematizar la conceptualización de la circunferencia identificando cuáles de sus propiedades se ponen en juego cuando ésta se construye con diferentes materiales y qué definición debería ligarse de manera directa con la construcción hecha. Para ello se propondrán a los asistentes tres actividades tomadas de Artigue y Robinet (1982) que permiten explicitar diferentes concepciones de circunferencia y la relación de éstas con la definición que se institucionaliza. Para finalizar la sesión se presenta a los asistentes un conjunto de actividades para conceptualizar un objeto geométrico en el que se combinan los acercamientos sugeridos en ambas sesiones (Samper, Camargo y Leguizamón, 2003).

1.3 SESIÓN 3

El objetivo de la tercera sesión del Cursillo es problematizar el supuesto de que sólo existe una definición para los objetos geométricos mostrando que la conceptualización se enriquece si se tiene un amplio espacio de ejemplos (Zaskis y Leikin, 2008) y se establecen relaciones entre las propiedades que se explicitan en una definición o en otra. Se propondrá un análisis detallado de varias definiciones de circunferencia y de cuadrado mostrando de qué manera las definiciones se formulan en el marco de una teoría específica, proponiendo la mínima cantidad de atributos, pues los demás se derivan de éstos, y teniendo en cuenta las dependencias mismas que se quieran resaltar (ya sea por factores didácticos o matemáticos), en el marco de dicha teoría.

Referencias

Artigue, M. y Robinet, J. (1982). Conceptions du cercle chez des enfants de l'ecole élementaire. *Recherches en Didactique des Mathématique, 3*(1), 5-64.

Chassapis, D. (1999). The mediation of tools in the development of formal mathematical concepts: The compass and the circle as an example. *Educational Studies in Mathematics, 37,* 275-293

Hershkowitz, R., Bruckheimer, M. y Vinner, S. (1987). Activities with teachers based on cognitive research. En M. Montgomery y A. Shulte (Eds). *Learning and teaching geometry.* Yearbook, NCTM (pp. 222-235).

Hershkowitz, R. y Vinner, S. (1982). Basic geometric concepts – Definitions and images. *Proceedings of the 6th PME International Conferencia,* 18- 23.

Samper, C., Camargo, L. y Leguizamón, C. (2010). *Como promover el razonamiento en el aula por medio de la geometría.* Bogotá: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.

Zazkis, R. y Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics, 69,*131-148.

Volver al índice de Cursos

Aspectos matemáticos de los objetos lógicos

Carlos Julio Luque Arias

Universidad Pedagógica Nacional, luque.ca@gmail.com

Juan Carlos Ávila Mahecha

Universidad Pedagógica Nacional

Resumen. Estudiaremos desde un punto de vista matemático los objetos y relaciones que aparecen en los razonamientos deductivos, haciendo un estudio algebraico de ellos mediante funciones y operaciones, generalizando el tratamiento estoico-megárico.

Como nuestro interés está dedicado a la actividad matemática en el aula de clase, proponemos una línea de trabajo donde el estudiante asume el rol de matemático para observar objetos lógicos y encontrar relaciones entre ellos. Para ello precisaremos qué entendemos por observar desde un punto de vista matemático, mirando la matemática como una actitud, una forma de ser; de abstraer, de pensar, de contemplar y adivinar; o en un mejor lenguaje, conjeturar, razonar, demostrar, etc.

Iniciamos con el conjunto {0, 1} definiendo la negación como operación unaria o con varias alternativas como operación binaria, concluyendo en la barra de Sheffer. En cada caso estudiamos sus propiedades algebraicas de una lista de 39 de ellas, usando el software Algebra finita, diseñado por el grupo de Álgebra de la Universidad Pedagógica y programado por Leonardo Ángel, para facilitar los cálculos.

De las propiedades que cumple cada operación elegimos algunas que nos sirvan de axiomas para demostrar las demás. Con este estudio logramos caracterizar 10 estructuras algebraicas con dos elementos.

Aprovechando la no asociatividad de la barra generamos otras operaciones como la implicación, y con la no conmutatividad de ésta, la implicación recíproca, la disyunción, etc., haciendo énfasis en los procesos de construcción.

Seguidamente estudiamos relaciones entre los conectivos, como expresar todos en términos de unos básicos, pasando por relaciones de distributividad, absorción, modularidad y otras formas análogas que también se pueden calcular con el programa álgebra finita, para concluir con estructuras reticulares y álgebras de Boole.

Finalmente damos una mirada al anillo formado por los conectivos lógicos vistos como matrices 2x2 con entradas en el campo (Z_2, +, *).

REFERENCIAS

Bell, E. T. (2002). *Historia de las matemáticas* (Sexta ed.). Fondo de Cultura Económica.

Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática.* Madrid: Editorial Alianza Universidad.

Caicedo, X., (1990). *Elementos de lógica y calculabilidad*. Bogotá: Una empresa docente, Universidad de los Andes.

Campos, A. (2006). *Introducción a la historia y a la filosofía de la matemática*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas.
Deaño, A. (1978). *Introducción a la lógica formal.* Madrid: Alianza.
Devlin, K. (2002). *El Lenguaje de las Matemáticas*. Mannon Troppo.
Enderton, H. E., (1972). *A mathematical Introduction to Logic.* Boston: Academic Press.
Font, J. M. Verdu, V. (1991). *Algebraic Logic for Classical Conjunction and Disjunction*, Studia Logica 50, 391–419.
Kneale, W. & Kneale. M. (1972). *El desarrollo de la lógica*. Madrid: Tecnos.
Layman, C.S. (2000). *The power of logic.* Boston: McGraw Hill.
Luque, C., Jiménez, H., Angel, J. (2009). *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: representar estructuras algebraicas finitas y enumerables*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
Margaris A. (1990). *First Order Mathematical Logic.* New York: Dover.
Nidditch, P. (1983). *El desarrollo de la lógica matemática.* Madrid: Cátedra (C. García, Trad.).
Ojeda, M., *Lógica, Matemática, Deducción Automática.* Universidad de Málaga
Orayen, R. (2005). *Lógica modal*. En: Enciclopedia latinoamericana de filosofía, Madrid: Trotta.

Volver al índice de Cursos

El Profesor de Estadística en Escena[1]

Lucía Zapata
Universidad de Antioquia, luzapata@ayura.udea.edu.co

Resumen. En este curso se revisan aspectos relacionados con el conocimiento pedagógico disciplinar del profesor de estadística puesto en escena. Se parte de episodios reales de una clase de estadística para orientar la reflexión en torno conocimiento disciplinar y al conocimiento pedagógico disciplinar del profesor de estadística y se revisan opciones de intervención didáctica que ayuden a los profesores a rediseñar sus clases.

Palabras clave: Conocimiento disciplinar, educación estadística, profesor de estadística

1. INTRODUCCIÓN

La sociedad actual se caracteriza por recientes desarrollos en ciencia y tecnología y por la abundancia de información en temas variados que demandan un estudiante altamente calificado que razone críticamente, interprete información estadística, interprete los juicios de los demás y tome decisiones basado en evidencia objetiva (Batanero, 2000). Estas características de los estudiantes suponen profesores entrenados apropiadamente para atender las demandas de la nueva sociedad y ello implica un profesor con un conocimiento disciplinar y un conocimiento pedagógico disciplinar desarrollado e integrado. Es decir, un profesor que sea capaz de transformar el conocimiento estadístico en formas accesibles a los estudiantes y adaptarlo al contexto específico de aprendizaje.

Varios estudios en el campo de la educación matemática han reportado la relación entre el conocimiento matemático del profesor y el desempeño de los estudiantes (Charalambos, 2010; Powell y Hanna, 2006). Esta relación parece cumplirse también en el campo de la educación estadística. Es claro que el profesor de estadística no solo requiere de un conocimiento específico sino también un conocimiento especializado para la enseñanza. De esta manera, el conocimiento disciplinar de los profesores, competencia pedagógica y reflexiones profundas en el razonamiento y desarrollo de las ideas de los estudiantes son claves para mejorar el desempeño de sus aprendices.

Actualmente en Colombia, el profesor que tiene bajo su responsabilidad la enseñanza de la estadística enfrenta ciertas tensiones con relación al conocimiento disciplinar que en algunos casos no se hacen conscientes pero están presentes en el aula de clase. En nuestro país, la inclusión de la estadística en el currículo de básica y media es relativamente reciente. La promulgación de los estándares de calidad por del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998; MEN, 2003) ha hecho oficial esta inclusión. Lo particular de este asunto es que a pesar de la inclusión en el currículo, los profesores actuales siguen enfrentando tensiones de cómo atender estas demandas en la clase de estadística. Esto ha ocurrido esencialmente porque se ha pensado que para mejorar la calidad de la educación basta con transformar el currículo, pero poco se puede mejorar si no se dirige la atención a la práctica del profesor. Ningún currículo enseña por sí mismo, y los estándares no operan independientemente de la interpretación profesional que se haga de ellos (Ball, 2003).

[1] Trabajo auspiciado por el Instituto colombiano para el desarrollo de la ciencia y la tecnología−Colciencias− bajo el contrato 782 de 2009 Código 1115-489-25309

Trabajar responsablemente con los estándares depende del entendimiento que se tenga de la disciplina. El conocimiento disciplinar de los profesores es fundamental para usar materiales de instrucción exitosamente, evaluar el progreso de los estudiantes, y tomar decisiones con respecto a la presentación, énfasis y secuencia del currículo. Varios estudios han mostrado que hay una fuerte relación entre conocimiento matemático para la enseñanza y la selección de tareas, la presentación y la acción en el aula (Charalambos, 2010). Mejorar el aprendizaje de las matemáticas de cada estudiante está profundamente asociado con enfatizar las oportunidades de aprendizaje de los profesores. No se puede esperar que los profesores sepan o hagan lo que ellos no han tenido oportunidades de aprender. El presente curso revela las tensiones de algunos profesores de estadística que pretenden seguir las directrices curriculares pero su conocimiento disciplinar los limita.

Este curso corto surge en el marco de un proyecto macro en el que se estudia el conocimiento pedagógico disciplinar del profesor de estadística. En dicho proyecto se tiene una vasta información en video de clases de estadística de profesores en ejercicio en diferentes niveles y en diferentes tópicos. Se ha hecho una selección intencionada de algunos episodios de estas clases que puedan ilustrar ciertas tensiones del profesor de estadística en acción y que puedan orientar la reflexión en torno al conocimiento disciplinar del profesor. Estos episodios brindan oportunidades prácticas para pensar profundamente en las implicaciones del conocimiento disciplinar y del conocimiento pedagógico disciplinar del profesor de estadística y ofrecen elementos para pensar críticamente en el diseño de intervenciones didácticas. Se presenta un episodio, algunas reflexiones en torno al conocimiento del profesor y algunas ideas para tener en cuenta en el rediseño de la instrucción.

2. EPISODIOS

a. EPISODIO 1: RECOLECCIÓN Y REPRESENTACIÓN DE DATOS

La profesora Carmen presentó a sus estudiantes de grado quinto de básica primaria el objetivo de la lección escribiendo en el tablero el logro esperado: "Recolectar datos, ubicarlos en gráficas e interpretarlos". Luego, escribió el título *Actividad* y seguidamente hizo que los estudiantes escribieran en sus cuadernos el siguiente enunciado: "Pregunto a mis compañeros cuanto calza y ubico los datos en el *cuadro*." Carmen dibujó entonces en el tablero un cuadro como el mostrado en la Tabla 1 y explicó a los estudiantes que debían pasar por los puestos de cada compañero, preguntar la talla del calzado y registrar el valor en la columna *compañero* con una marca vertical. Carmen insistió que el número 30 en el cuadro significaba que eran 30 compañeros y que cuando llegaran a 30 marcas debían parar de preguntar. Carmen anunció a los estudiantes que tendrían alrededor de quince minutos para recoger los datos. Con este anuncio los estudiantes empezaron su acción, recolectando la información de sus compañeros.

Tabla1: Cuadro dibujado por Carmen en el tablero

Talla	Compañero	Total
33		
34		
35		
36		
37		
38		
		30

Una vez los estudiantes terminaron la recolección de datos y los ubicaron en el cuadro sugerido, Carmen anunció que los ubicarían en un gráfico. Carmen dibujó en el tablero una línea horizontal y una línea vertical que se cortaban como formando el primer cuadrante de un plano cartesiano, e indicó que en el eje horizontal se ubicaría la *talla* y en el eje vertical la *cantidad de alumnos*. Carmen pretendía hacer las marcas para el eje de la frecuencia y preguntó a los estudiantes "¿cuál fue el máximo número que les dio?". La pregunta generó múltiples respuestas: 30, 8, 6, 7, 9, y 10. Carmen sistemáticamente ignoró las respuestas incorrectas y solo admitió las que parecían responder cercanamente a su pregunta.

b. DISCUSIÓN EPISODIO 1

La descripción de la clase de Carmen es un buen ejemplo de lo que comúnmente se encuentra en una clase de estadística de básica primaria. Sin embargo, hay algunos detalles que parecen problemáticos de la clase en términos del conocimiento disciplinar del profesor. Primero, aunque la actividad fue de interés para los estudiantes, la forma en que esta fue propuesta redujo el potencial en la construcción de conocimiento. El solo hecho de sugerir el cuadro para organizar los datos condicionó a los estudiantes quienes no tuvieron ninguna posibilidad de proponer estrategias diferentes de organización de la información.

Segundo, la clase no inició con una pregunta estadística y esto disminuyó la posibilidad que los estudiantes siguieran la ruta de razonamiento estadístico que siguen los estadísticos de profesión y que es sugerida por varios educadores estadísticos en: (1) La GAISE: guía para la instrucción y la evaluación en educación estadística (Franklin et al., 2007; Aliaga et al.,2007) y (2) El ciclo investigativo PPDAC: Problema, Plan, Datos, Análisis y Conclusiones (Wild y Pfannkuch, 1999; Pfannkuch y Wild, 1998; Pfannkuch y Wild, 2000). Tercero, hubo varios aspectos que Carmen no predijo en el diseño de la clase y que se tornaron complejos en la gestión. Por ejemplo, Carmen no predijo que la forma de orientar la actividad podía generar diferentes conjuntos de datos en los estudiantes que sería un potencial problema a la hora de socializar.

Reflexiones en torno al episodio de Carmen se discutieron con estudiantes de último semestre de un programa de formación de profesores de matemáticas. Estas discusiones terminaron en varias propuestas de diseño instruccional que son congnitivamente desafiantes para los estudiantes y que parecen responder a las tensiones enfrentadas por Carmen.

c. EPISODIO 2: INDEPENDENCIA VERSUS EXCLUSIÓN MUTUA

La profesora Sonia inició su clase de grado once con la siguiente pregunta "¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados comunes se presenten valores tal que la suma de sus puntos sea tres o tal que su suma sea cuatro?" Después de plantear la pregunta, Sonia sugirió a los estudiantes encontrar el espacio muestral de este experimento. Una estudiante construyó en el tablero las treinta y seis parejas que forman el espacio muestal al tirar dos dados. Una vez construido el espacio muestral, Sonia orientó a los estudiantes a que observaran esas parejas que cumplían la característica que la suma de los puntos fuera tres y los estudiantes señalaron las parejas (1,2) y (2,1). Sonia preguntó a los estudiantes si estas parejas eran diferentes. Ante esta pregunta un estudiante respondió que en efecto las parejas eran diferentes. Aunque la respuesta del estudiante fue correcta, no se le animó a justificar su razonamiento. A continuación, Sonia alentó a los estudiantes a que encontraron las parejas del espacio muestral cuya suma de puntos fuera cuatro y los estudiantes señalaron las parejas (2,2), (1,3) y (3,1). Se finalizó sumando estas tres parejas con las dos encontradas previamente para concluir que la probabilidad por la cual se indagaba en la pregunta propuesta por la profesora era 5/36. Es decir, cinco pares cumplían las condiciones dadas de un total de treinta y seis posibles parejas. Una vez encontrado este valor, la profesora Sonia sugirió una pregunta adicional con respecto al experimento de lanzar los dados. “¿Son los eventos de lanzar los dados excluyentes o no excluyentes? Es decir, ¿un evento depende del otro?” Un estudiante respondió “no” pero no se le alentó a que expusiera su razonamiento. Sonia quedó satisfecha con la respuesta del estudiante y agregó “No depende del otro. O sea que efectivamente son excluyentes […] Cuando los eventos son excluyentes, es decir, que lanzo un dado y no tiene nada que ver que lance este [otro]. O sea que al lanzar un dado no interfiera en nada [en el resultado del otro]”

d. DISCUSIÓN EPISODIO 2

Esta es una situación comúnmente evidenciada en la clase de estadística. Se han confundido los conceptos de Independencia y de exclusión mutua. Sonia ha tratado los conceptos de independencia y de exclusión mutua como sinónimos cuando en realidad son de naturaleza diferente. La literatura en educación estadística ha mostrado que este es un error mucho más común de lo que parece. Los conceptos de *independencia* y *exclusión mutua* han sido objeto de estudio de varios autores debido a la recurrente confusión que se ha reportado en los estudiantes de probabilidad de todos los niveles educativos (Gibbons, 1968; Manage y Scariano, 2010; Durbach y Barr, 2008). Estos conceptos aparecen en los currículos de secundaria y cursos introductorios de nivel universitario pero parece que las ideas básicas que tienen los estudiantes sobre independencia y exclusión mutua no son suficientes para garantizar una clara comprensión de la relación entre dichos conceptos.

La pregunta que nos compete a partir del análisis de este episodio es ¿cómo abordar estos conceptos en el aula de clase de matemáticas para garantizar que se comprendan los conceptos y la relación entre ellos? Este episodio fue estudiado en un grupo colaborativo en el que participó la profesora Sonia, dos educadores matemáticos y un estudiante de último semestre de un programa de formación de profesores de matemáticas. El producto de este grupo fue el rediseño de la clase de estadística y la escritura de un artículo en el que se exponen algunas ideas para abordar la enseñanza de los conceptos de independencia y exclusión mutua.

e. EPISODIO 3: LA MEDIANA

El profesor Manuel dijo a sus estudiantes del grado octavo que en la clase trabajarían algunos conceptos claves en estadística como el promedio, la mediana y la moda. Se refirió al procedimiento para encontrar la mediana diciendo que hay dos casos: uno cuando se tiene un número impar y otro cuando se tiene un número par de datos. Explicó que cuando se tiene un número impar basta con organizar los datos de menor a mayor y tomar el número del centro. Manuel, para ilustrar con un ejemplo, escribió en el tablero los números 5, 9, 12, 15 y 13 y tal cual estaban los números (sin organizar ascendentemente) explicó que el valor exactamente en el medio era el correspondiente a la mediana. Manuel encerró en un círculo el número 12 indicando que esa era la mediana de ese conjunto de datos. Para ilustrar el caso de datos pares, Manuel escribió en el tablero los números 5, 6, 7, y 8 y dijo que los organizaría de menor a mayor y tomaría los dos de la mitad. No fue claro si el profesor presentó las cantidades organizadas a propósito o si el orden fue producto de como la mente genera ciertos números (él no tenía estas cantidades escritas en su planeador sino que surgían a medida que los iba escribiendo en el tablero). El profesor Manuel indicó que en este caso se sumaba el 6 y el 7 y se dividía por 2 para encontrar el valor correspondiente a la mediana que era 6,5.

Después de esta breve explicación, Manuel propuso a los estudiantes tres listas de números que escribió en el tablero para que los estudiantes encontraran la mediana. La primera lista de datos fueron los números: 5, 10, 2, 3, 1, 4, 7, 8, 9, 12, 13. Un estudiante manifestó no entender. Ante esta declaración del estudiante, Manuel dijo que pondría esos números en la "vida real" (se refería a dar un contexto específico para esos datos). Dijo "¿cuántos hijos tuvieron mis abuelitos?". A continuación Manuel explicó que cada número representaba los hijos que tuvieron los abuelitos en cada una de esas familias y que el número cinco significaba que en esa familia los abuelitos tuvieron cinco hijos. Luego, Manuel organizó las cantidades en el tablero de menor a mayor, escribió la siguiente lista: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10,12, 13, y dijo que la mediana era el número exactamente en la mitad. A continuación pidió a una estudiante que saliera a señalar el valor correspondiente a la mediana. La estudiante se dirigió al tablero y encerró en un círculo el número siete. Otro estudiante preguntó "¿eso es todo profesor?" a lo que el profesor afirmó: "si eso es todo".

f. DISCUSIÓN EPISODIO 3

Hay varios aspectos de la clase del profesor Manuel que merecen ser discutidos. Primero, las cantidades presentadas a los estudiantes para ilustrar el cálculo de la mediana no tuvieron un contexto mediante el cual los estudiantes pudieran dar sentido a esa medida de tendencia central. Manuel sólo dio a la situación el contexto de *número de hijos de las familias* cuando un estudiante manifestó no comprender; sin embargo, el contexto asociado fue bastante artificial. Ningún dato de los 11 que fueron dados se repitió y se sabe que la distribución de la variable discreta *número de hijos* sigue una distribución cercana a lo simétrico, lo que implica valores repetidos. Segundo, las explicaciones del profesor Manuel se caracterizaron por ser de carácter procedimental y no hubo evidencias que la interpretación de la mediana en el contexto particular tuviera importancia en la clase. Es posible que el estudiante que manifestó sorpresa al encontrar que eso era todo lo que el profesor esperaba que hicieran estuviera esperando algo más profundo como la interpretación de la mediana o por lo menos hablar de las diferencias prácticas de las medidas de tendencia central. Tercero, cuando el estudiante manifestó no entender, el profesor interpretó esa apelación como un llamado para que el profesor hiciera el ejercicio. Actuando de esa forma el profesor razonó por el estudiante reduciendo así el nivel cognitivo de la tarea que de hecho era una tarea simple. Cuarto, el nivel cognitivo de las tareas fue muy básico. Las tareas propuestas fueron demasiado simples como para ser consideradas cognitivamente desafiantes. Quinto, en estadística muchos autores expresan que el razonamiento estadístico inicia con una pregunta que debe ser respondida mediante la recolección de datos (Franklin, y otros, 2007). En este caso los datos sucedieron primero que la pregunta y se desperdició toda oportunidad de llevar a los estudiantes a razonar estadísticamente.

Las discusiones con un grupo de seminario de estudiantes de último semestre de un programa de preparación de profesores de matemáticas a partir del episodio del profesor Manuel han generado importantes resultados. Se propusieron algunas reflexiones en torno al conocimiento disciplinar y al conocimiento pedagógico disciplinar del profesor y se establecieron algunos principios para el diseño de la instrucción en estadística descriptiva. Además se ha conseguido una conclusión importante con respecto a la acción de enseñar estadística. Enseñar estadística requiere habilidades adicionales al conocimiento disciplinar. Enseñar estadística requiere justificar, analizar errores, generalizar, definir e interpretar. Requiere conocer procedimientos en detalle y conocerlos suficientemente bien para estar en condiciones de representarlos y explicarlos hábilmente en más de una forma.

3. CONCLUSIONES

Los episodios presentados en este curso son casos reales de profesores de estadística que comparten las mismas tensiones de muchos profesores de estadística en torno al currículo y a cómo llevar esas exigencias curriculares al aula de clase. Estos casos han funcionado como dispositivos para estimular la reflexión en varios espacios académicos y pueden funcionar como dispositivos para estimular la reflexión del profesor acerca del conocimiento disciplinar y del conocimiento pedagógico disciplinar. Adicionalmente, el estudio de estos episodios se puede convertir en aporte importante a la hora de diseñar intervenciones didácticas.

REFERENCIAS

Aliaga, M., Cobb, G., Cuff, C., & Garfield, J. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE): College report.* (R. Gould, L. Robin, T. Moore, A. Rossman, B. Stephenson, J. Utts, y otros, Edits.) Alexandria, VA: American Statistical Association.

Ball, D. (2003). What mathematical knowledge is needed for teaching mathematics. *Paper presented at the U.S. Department of Education, Secretary's Mathematics Summit.* Washington, DC.

Batanero, C. (2000). ¿Hacia dónde va la educación estadística? *Blaix , 15*, 2–13.

Charalambos, Y. (2010). Mathematical knowledge for teaching and task unfolding: An exploratory study. *The Elementary School Journal , 110* (3), 247–278.

Durbach, I., & Barr, G. (2008). Illustrating dependence between random variables using slot machines. *Teaching Statistics , 30* (3), 89-92.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., y otros. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A pre-K-12 curriculum framework.* Alexandria, VA: American Statistical Association.

Gibbons, J. D. (1968). Mutually exclusive events, independence and zero correlation. *The American Statistician, 22*, 31-32.

Manage, A. B., & Scariano, S. M. (2010). A classroom note on: Student misconceptions regarding probabilistic independence vs. mutual exclusivity. *Mathematics and Computer Education* .

MEN. (2003). *Estándares básicos de matemáticas.* Santa Fe de Bogotá: Centro de Pedagogía Participativa.

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas.* Santa Fe de Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Pfannkuch, M., & Wild, C. (1998). Investigating the nature of statistical thinking. *Fifth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 5).* Singapure: IASE.

Pfannkuch, M., & Wild, C. (2000). Statistical thinking and statistical practice: Themes gleaned from professional statisticians. *Statistical Science, 15*, 132–152.

Powell, A. B., & Hanna, E. (2006). Researching teachers' knowledge for teaching mathematics. En S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Ed.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North America chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 2*, págs. 377–383. Mérida: México: Universidad Pedagógica Nacional.

Wild, C., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (with discussion). *International Statistical Review, 6*, 223–265.

Volver al índice de Cursos

ALGUNOS ELEMENTOS DE LÓGICA, CONJUNTOS Y TOPOLOGÍA DIFUSAS

CARLOS ORLANDO OCHOA C.

Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas

Resumen. Se consideran elementos del álgebra presentes en lógicas multivaluadas, discutiendo previamente las nociones de valor de verdad, modelos y funciones conectivos; se introduce la noción de conjuntos y topologías difusos.

PRESENTACIÓN

Hacia el año 1965, Lotfi A. Zadeh introdujo las primeras ideas de una teoría de conjuntos difusos con el objeto inicial de encontrar en las matemáticas modelos apropiados para el estudio de problemas complejos de control que se presentan en la teoría de la información; estas ideas permitieron superar la rigidez de la teoría clásica de conjuntos y en consecuencia, clasificar objetos de un universo conocido que responden a una determinada propiedad de manera que no solo la verifican o no, sino que la pueden verificar parcialmente.

En un lenguaje más técnico, la teoría clásica de conjuntos se construye con funciones características que toman valores en un conjunto con dos elementos dotado de una estructura de retículo, dichos elementos se suelen interpretar con los apelativos de *verdad* (la pertenencia) y *falsedad* (la no pertenencia); en las teorías de conjuntos difusos, las funciones características se reemplazan por otras que toman valores en retículos más generales, lo que da lugar a contar con varios grados posibles de pertenencia.

Así, desde los albores de los conjuntos difusos, fue clara la estrecha relación entre la teoría de los conjuntos difusos y la lógica multi-valuada; en verdad, el advenimiento de la teoría de conjuntos difusos, demandó cambiar la lógica a algo más que un espectro de varios valores de verdad.

1. HACIA ALGUNOS CONCEPTOS CATEGÓRICOS

Es sorprendente, en principio, encontrar métodos y procesos similares en ramas de la Matemática que por su naturaleza son esencialmente distintas; pero a la luz de una reflexión muy juiciosa, se encuentra que los fundamentos de un gran número de teorías matemáticas se construyen a partir de unos principios generales. El estudio de esos principios corresponde a la teoría de

Key words and phrases. Retículo, Conectivos, Adjunción, Par adjunto, GL-monoide.

Categorías. En esta fase centramos nuestra atención en estructuras definidas sobre conjuntos.

1.1. De los Conjuntos. El propósito de esta sección es estudiar conjuntos con estructura e inherente a ello, las funciones que respetan esas estructuras. De manera muy cándida, se usa aquí el término conjunto, es decir, no se exhibe la axiomática de la teoría de conjuntos Zermelo-Fraenkel, pero se asume que el lector tiene alguna familiaridad con este concepto, para un estudio riguroso de esta teoría en un primer intento puede consultarse [7] y para un tratamiento formal a [6]. Estableciendo un punto de partida, cada conjunto está determinado por sus elementos; así, el conjunto vacío que se nota con $\emptyset$ no posee elementos, el conjunto $\{x\}$ tiene solamente al elemento x y se dice que es un conjunto unitario. Se usan las operaciones usuales entre conjuntos (unión, intersección, complemento, producto cartesiano), el conjunto potencia $\wp(X)$, notaciones estándar para los conjuntos numéricos así: $\mathbb{N}$ para los números naturales ($\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{Z}$ para los números enteros, $\mathbb{R}$ para los números reales. Tal vez sea ocioso decir que los conjuntos X e Y son iguales si cada elemento de X es un elemento de Y y viceversa, a veces se describe un conjunto empleando índices por ejemplo $X = \{x_j \mid j \in I\}$, en tal caso, se dice que X está indexado por el conjunto I o que X es una familia o colección con conjunto de índices I.

1.1.1. De las funciones. Una función es[1] una terna que consiste en un conjunto X (el dominio), un conjunto Y y una relación $f \subseteq X \times Y$ tal que para cada $x \in X$ existe un único $y \in Y$ tal que $f(x) = y$ i. e. $(x, y) \in f$; a esta terna la notamos con $f : X \to Y$; se dice que f es una función de X en Y.

El conjunto de las funciones de X en Y se nota con Y^X, es decir,

$$Y^X = \{f \mid f : X \to Y\};$$

si $X = \emptyset$, la relación $\emptyset \subseteq \emptyset \times Y$ es una función pues el enunciado *para cada* $x \in \emptyset \ldots$ se satisface siempre, es la *función nula*; así para cada conjunto X tenemos que $X^\emptyset = \{\text{función nula}\}$, note que $\emptyset^X = \emptyset$ si $X \neq \emptyset$.

Para cada conjunto X, se tiene la función idéntica $1_X : X \to X$ definida por $1_X(x) = x$ para todo $x \in X$; ahora dadas las funciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$, la composición de f con g es la función $g \circ f : X \to Z$ definida por $g \circ f(x) = g(f(x))$ para cada $x \in X$. Observe que para $f : X \to Y$ se

[1] Hay discusión en torno al concepto de función, para algunos como en este caso, una función *es*, para otros una función *hace*.

tiene que $f \circ 1_X = f = 1_Y \circ f$, en otras palabras, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "1_X"] \arrow[dr, "f\circ 1_X"'] & X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "1_Y\circ f"] & \\
& Y \arrow[r, "1_Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

1.1.2. Clases. Algunas familias son grandes para formar conjuntos, por ejemplo, no podemos formar el *conjunto de todos los conjuntos*; pues si admitimos esta situación la paradoja de Russell aparece, transcribimos parte del problema correspondiente propuesto en [24] :

> ”...Comenzaremos por observar que un conjunto puede fácilmente tener elementos que son, ellos mismos, conjuntos, por ejemplo $\{1, \{2, 3\}, 4\}$. Esto da la posibilidad de que un conjunto pueda contenerse a sí mismo como uno de sus elementos. Llamamos a tal conjunto, *conjunto Anormal* y a cualquier conjunto que no se contiene a sí mismo como elemento, lo llamamos *conjunto Normal*. La mayoría de los conjuntos son normales y si sospechamos que los conjuntos anormales son, de alguna forma, poco deseables, deberíamos tratar de centrar nuestra atención en el conjunto N de todos los conjuntos normales. Alguien podría preguntarse, ¿Es N normal o anormal? Este es uno u otro y no puede ser ambos. Se puede mostrar que si N es normal entonces es Anormal, y que si N es anormal entonces es normal. Vemos de esta forma que cada una de estas alternativas es autocontradictoria y parece ser la suposición de la existencia de N como conjunto, lo que nos ha traído tal impasse...”

Considerando que en Matemáticas se debe laborar con familias como la de *todos* los espacios topológicos, *todos* los espacios vectoriales..., es necesario un concepto más amplio que el de conjunto, es la *clase*. Así, las clases son familias que generalizan los conjuntos como sigue:

1. Cada Conjunto es una clase,
2. Cada propiedad P de conjuntos determina la clase $\{X \mid X \text{ satisface} P \}$.

Las operaciones de la teoría de conjuntos pueden ser extendidas a clases, de manera similar se pueden definir funciones de clase. En algunas circunstancias, se usa el axioma de elección para clases, esto es, si $\sim$ es una relación de equivalencia en una clase X, entonces existe una subclase de elección, es decir, $Y \subseteq X$ tal que para cada $x \in X$ existe $y \in Y$ con $y \sim x$.

1.2. Constructos. Antes de exhibir la definición, se presenta una motivación desde la teoría de grupos; esta teoría descansa sobre dos conceptos fundamentales: grupos y homomorfismos. Un grupo (cf. [10]) es un conjunto G junto con una operación $* : G \times G \to G$ que satisface los siguientes axiomas:

Gr1. $*$ es asociativa, es decir, para $a, b, c \in G$ cualesquiera, se tiene que $a * (b * c) = (a * b) * c$,

Gr2. Existe un elemento neutro (bilateral) $e \in G$ tal que $a * e = e * a = a$ para todo $a \in G$.

Gr3. Para todo $a \in G$ existe un elemento inverso (bilateral) $a^{-1} \in G$ tal que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Al grupo se le nota $(G, *)$, pero cuando no hay lugar a confusión se escribe G por sencillez. Cuando la operación $*$ es conmutativa, es decir, satisface

Gr4. $a * b = b * a$ para $a, b \in G$ arbitrarios,

se dice que $(G, *)$ es un *grupo abeliano* o conmutativo.

Dados $(G, *)$ y $(\hat{G}, \hat{*})$ grupos, una función $f : G \to \hat{G}$ es un homomorfismo de grupos si *respeta la estructura*, es decir, para $a, b \in G$ es

$$f(a * b) = f(a) \hat{*} f(b),$$

cuando f es un homomorfismo, escribimos $f : (G, *) \to (\hat{G}, \hat{*})$. Los homomorfismos tienen las siguientes propiedades:

- Si $f : (G, *) \to (\hat{G}, \hat{*})$ y $g : (\hat{G}, \hat{*}) \to (H, \overline{*})$ son homomorfismos, entonces $g \circ f : (G, *) \to (H, \overline{*})$ es un homomorfismo.
- Para cada grupo $(G, *)$, la función idéntica $1_G : (G, *) \to (G, *)$ es un homomorfismo.

Estas propiedades de funciones que respetan estructura se encuentran en diversos ambientes de las Matemáticas; así, inspiran la siguiente definición.

Definición 1.1. *Un constructo (cf.* [2], [3]*) o una categoría concreta de conjuntos con estructura* $\mathfrak{S}$*, está dada por los siguientes datos y axiomas:*

Cons1. *Para cada conjunto* X*, está definida una clase* $\mathfrak{S}[X]$*, sus elementos son llamados las* $\mathfrak{S}$*-estructuras sobre* X*, una* $\mathfrak{S}$*-estructura es entonces un par* $\mathbb{X} = (X, \alpha)$ *donde* X *es un conjunto y* α *es una estructura sobre* X*, es decir,* α *está en* $\mathfrak{S}[X]$*. Estos pares son los* **objetos** *de* $\mathfrak{S}$*.*

Cons2. *Para cada par de objetos* $\mathbb{X} = (X, \alpha)$*,* $\mathbb{Y} = (Y, \beta)$ *existe un conjunto* $Mor_{\mathfrak{S}}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \subseteq Y^X$*; a los elementos de* $Mor_{\mathfrak{S}}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *se les denomina* **Morfismos** *de* $\mathbb{X}$ *en* $\mathbb{Y}$*. Si* $f : X \to Y$ *es un elemento de* $Mor_{\mathfrak{S}}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$*, se escribe* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$*. Los conjuntos de morfismos satisfacen:*

Mor1. *Axioma de la Composición, si* $f \in Mor_{\mathfrak{S}}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *y* $g \in Mor_{\mathfrak{S}}(\mathbb{Y}, \mathbb{Z})$*, entonces* $g \circ f \in Mor_{\mathfrak{S}}(\mathbb{X}, \mathbb{Z})$*,*

Mor2. *Para cada objeto* $\mathbb{X} = (X, \alpha)$*, la función idéntica* 1_X *es un morfismo.*

Volviendo al ejemplo con que se inició este apartado, el constructo **Gr** se describe como sigue: Para cada conjunto X, **Gr**$[X]$ es el conjunto de todas las operaciones $*$ que definen estructura de grupo sobre X. Ahora, si $\mathbb{G} = (G, *)$ y $\hat{\mathbb{G}} = (\hat{G}, \hat{*})$ son objetos de **Gr**, entonces $Mor(\mathbb{G}, \hat{\mathbb{G}}) \subseteq \hat{G}^G$, el conjunto de los homomorfismos.

1.3. Ejemplos de Constructos.

1.3.1. El constructo **Pos**. Un conjunto parcialmente ordenado[2] es un par $(X, \leq)$ donde X es un conjunto y $\leq$ es una ordenación sobre X (cf. [5]); es decir, $\leq$ es una relación binaria que satisface para todo $x, y, z \in X$ las siguientes condiciones:

Pos1. Reflexiva, para todo x, $x \leq x$,
Pos2. Antisimétrica, si $x \leq y$ e $y \leq x$ entonces $x = y$,
Pos3. Transitiva, si $x \leq y$ e $y \leq z$ entonces $x \leq z$,

Dados $(X, \leq)$ e $(Y, \preceq)$ conjuntos parcialmente ordenados, se dice que $f \in Y^X$ *preserva el orden* o que es *isótona* si para $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \leq x_2$ implica $f(x_1) \preceq f(x_2)$.

Así, los objetos del constructo **Pos** son los conjuntos parcialmente ordenados y los morfismos son las funciones que preservan orden. Veamos que estas funciones en verdad satisfacen Mor1. y Mor2. En efecto, sean

$$f : (X, \leq) \to (Y, \preceq) \quad \text{y} \quad g : (Y, \preceq) \to (Z, \sqsubseteq)$$

que preservan orden, entonces $g \circ f : (X, \leq) \to (Z, \sqsubseteq)$ tambien satisface esta propiedad, pues dados $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \leq x_2$ implica $f(x_1) \preceq f(x_2)$, a su vez, $f(x_1) \preceq f(x_2)$ implica $g(f(x_1)) \sqsubseteq g(f(x_2))$ como se había anunciado; por otro lado, $1_X : (X, \leq) \to (X, \leq)$ preserva orden ya que $x_1 \leq x_2$ implica $x_1 \leq x_2$.

1.3.2. El constructo **SET**. Corresponde a los conjuntos y las funciones, esto es, los objetos son conjuntos no estructurados y los morfismos son las funciones entre conjuntos, es decir, $\mathrm{Mor}(A, B) = B^A$; ver que se satisfacen los axiomas Mor1. y Mor2. es un ejercicio de rutina. Note que para cada conjunto X, la clase de las estructuras $\mathbf{SET}[X]$ es unitaria.

1.3.3. El constructo **Digraph**. Un grafo dirigido o digrafo (cf. [4], [1]) es un par (D, α) donde D es un conjunto y α es una relación binaria, es decir, $\alpha \subseteq D \times D$. Ahora, dados (D_1, α_1) y (D_2, α_2) grafos dirigidos, $f \in D_2^{D_1}$ es compatible si para $x, y \in D_1$ con $x \alpha_1 y$ se tiene que $f(x) \alpha_2 f(y)$. Los grafos dirigidos son los objetos del constructo **Digraph**, los morfismos son las funciones compatibles. Obsérvese que para todo conjunto X, la clase de las estructuras es $\mathbf{Digraph}[X] = \wp(X \times X)$.

[2] Partially Ordered Set.

1.3.4. El constructo **Vect**. En este ambiente, para cada conjunto X, $\mathbf{Vect}[X]$ corresponde al conjunto de todos los pares $(+,\cdot)$ que definen la estructura de espacio vectorial sobre X. Dados dos objetos i. e. dos espacios vectoriales $\mathbb{V}=(V,(+,\cdot))$ y $\mathbb{W}=(W,(\hat{+},\hat{\cdot}))$, entonces

$$\mathrm{Mor}(\mathbb{V},\mathbb{W})=\{f:V\to W \mid f \text{ es transformación lineal}\}\subseteq W^V.$$

1.4. Subconstructos. Un subconstructo (cf. [1], [3]) de un constructo $\mathfrak{S}$ es un constructo $\mathfrak{T}$ tal que

1. Todo objeto de $\mathfrak{T}$ es un objeto de $\mathfrak{S}$, es decir, $\mathfrak{T}[X]\subseteq\mathfrak{S}[X]$ para todo conjunto X,
2. Todo morfismo de $\mathfrak{T}$ es un morfismo de $\mathfrak{S}$; es decir, para objetos arbitrarios $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ de $\mathfrak{T}$ se tiene que
$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{T}}(\mathbb{X},\mathbb{Y})\subseteq\mathrm{Mor}_{\mathfrak{S}}(\mathbb{X},\mathbb{Y}).$$

Se dice que $\mathfrak{T}$ es un *subconstructo pleno* si para $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ objetos arbitrarios de $\mathfrak{T}$ es

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{T}}(\mathbb{X},\mathbb{Y})=\mathrm{Mor}_{\mathfrak{S}}(\mathbb{X},\mathbb{Y}).$$

Ilustramos ahora esta situación:

1.5. Los constructos Pos y Digraph. Cada conjunto ordenado es un grafo dirigido, pues si $\mathbb{X}=(X,\leq)$, la relación $\leq$ es un subconjunto de $X\times X$. Por otro lado, para $\mathbb{X}=(X,\leq)$ y $\mathbb{Y}=(Y,\preceq)$, $f:X\to Y$ preserva orden si y solamente si f es compatible, por consiguiente,

$$\mathrm{Mor}_{\mathbf{Pos}}(\mathbb{X},\mathbb{Y})=\mathrm{Mor}_{\mathbf{Digraph}}(\mathbb{X},\mathbb{Y}),$$

así, **Pos** es un subconstructo pleno de **Digraph**.

Question 1.2. *Dado X un conjunto con n elementos, de acuerdo con lo anterior es fácil determinar el número de grafos dirigidos en X y esta es una cota superior para el número de relaciones de orden en X, discutir una manera de contar el número de estas relaciones en X.*

1.6. El Constructo Lat. Dados $(X,\leq)$ un objeto de **Pos** y $A\subseteq X$, se dice que $s\in X$ es una *cota superior* de A si $a\leq s$ para todo $a\in A$; un elemento $t\in X$ es la *mínima cota superior* de A, si t es cota superior para A y $t\leq s$ para toda cota superior s de A; de acuerdo con la propiedad Pos2. de conjuntos ordenados (cf. [5]), la cota superior de A es única cuando existe y se escribe $\sup A$. Dualmente, se define *cota inferior* de A e $\inf A$ la *máxima cota inferior* de A.

Un retículo[3] es un conjunto parcialmente ordenado $(L,\leq)$ en el cual cada par de elementos a,b posee mínima cota superior que se nota con $a\vee b$ y máxima cota inferior que se nota con $a\wedge b$. El elemento $a\vee b$ es el más pequeño de todos los $x\in L$ que satisfacen $a\leq x$ y $b\leq x$; el elemento $a\wedge b$ es el más grande de todos los $y\in L$ que satisfacen $y\leq a$ e $y\leq b$. Por brevedad, a $a\vee b$ se le dice *extremo superior* de a y b, y a $a\wedge b$ se le dice

[3]En lengua inglesa: *Lattice*.

extremo inferior de a y b.
En [15] se exhiben los siguientes objetos de **Pos** que son retículos:

- $(\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, \leq)$, donde $\mathbb{Z}^+$ es el conjunto de los números enteros positivos y $\leq$ es el *orden usual*; $\leq$ proviene de la adición pues se define como sigue para $a, b \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$:
$$a \leq b \quad \text{sii existe} \quad k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, \quad \text{tal que} \quad a + k = b,$$
en este contexto, para $a, b \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$,
$$a \vee b = \text{máx}\{a, b\} \quad \text{y} \quad a \wedge b = \text{mín}\{a, b\}.$$
- $(\mathbb{Z}^+, \preceq)$, donde $\preceq$ es el *orden de la divisibilidad*; $\preceq$ se origina en el producto pues para $a, b \in \mathbb{Z}^+$:
$$a \preceq b \quad \text{sii existe} \quad k \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{tal que} \quad ak = b,$$
en este ambiente, para $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $a \vee b$ es el mínimo común múltiplo de a y b, y $a \wedge b$ es el máximo común divisor de a y b.

Si $(L, \leq)$ y $(M, \preceq)$ son retículos, una función $f : L \to M$ que respete estructura ha de comportarse con los extremos superiores e inferiores como sigue para $x, y \in L$ arbitrarios:
$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) \quad \text{y} \quad f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y),$$
así, se tiene el constructo **Lat** cuyos objetos son los retículos y los morfismos son las funciones que respetan extremos superiores y extremos inferiores.
Obsérvese que **Lat** es un subconstructo de **Pos**; en primer lugar, cada retículo es un conjunto parcialmente ordenado, ahora si $f : (L, \leq) \to (M, \preceq)$ es un morfismo en **Lat** es entonces un morfismo en **Pos**, en efecto, si $x, y \in L$ y se tiene que $x \leq y$, entonces $x \vee y = y$ por tanto
$$f(x) \preceq f(x) \vee f(y) = f(x \vee y) = f(y);$$
sin embargo, **Lat** no es un subconstructo pleno de **Pos** pues la inclución $i : (\mathbb{Z}^+, \preceq) \to (\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, \leq)$ es un morfismo en **Pos** pero no lo es en **Lat**.

1.7. El Constructo Clat. Un conjunto parcialmente ordenado $(L, \leq)$ es un *retículo completo* (cf. [5]) si para todo subconjunto A de L existe extremo superior $\bigvee A$ y extremo inferior $\bigwedge A$. El elemento $\bigvee A$ es el menor de todos los elementos $x \in L$ que satisfacen $a \leq x$ para todo $a \in A$, y el elemento $\bigwedge A$ es el mayor de todos los elementos $y \in L$ que satisfacen $y \leq a$ para todo $a \in A$. Dados $(L, \leq), (M, \preceq)$ retículos completos, $f : L \to M$ respeta estructura si conmuta[4] con extremos superiores e inferiores, es decir,
$$f(\vee A) = \bigvee \overrightarrow{f}(A) \quad \text{y} \quad f(\wedge A) = \bigwedge \overrightarrow{f}(A)$$
donde $\overrightarrow{f}(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$ la *imagen directa* de A por f. Los objetos del constructo **Clat** son los retículos completos y los morfismos las funciones arriba descritas.

[4]Decir *conmuta* es realmente una exageración ya que $\bigvee A$ y $\bigwedge A$ son elementos de L mientras que $\bigvee \overrightarrow{f}(A)$ y $\bigwedge \overrightarrow{f}(A)$ pertenecen a M.

Un ejemplo lo constituye la clase $\wp X$ de todos los subconjuntos de un conjunto X dado, el par $(\wp X, \subseteq)$ donde $\subseteq$ es la contenencia, es un retículo completo ya que si $\mathcal{A} \subset \wp X$ entonces,

$$\bigwedge \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \quad \text{y} \quad \bigvee \mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A,$$

el retículo $(\mathbb{Z}^+, \preceq)$ donde $\preceq$ es el orden de la divisibilidad, no es completo, pues $\bigvee \mathbb{Z}^+$ no existe. Cabe anotar además que la condición impuesta a f de conmutar con extremos superiores e inferiores es bastante exigente, es para quedarse hablando solo, pues en los ambientes de los conjuntos no siempre se tiene $\overrightarrow{f}(A \cap B) = \overrightarrow{f}(A) \cap \overrightarrow{f}(B)$. Por esta razón en [5] se da elegir una de las dos condiciones, o bien que f conmuta con $\bigvee$ o bien que f conmuta con $\bigwedge$.

De todas maneras, se obtiene que **Clat** es un subconstructo no pleno de **Lat**, para ver esto, se considera el retículo de los números reales extendidos $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, la función $f : \hat{\mathbb{R}} \to \hat{\mathbb{R}}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}, \\ -\infty & \text{si} \quad x = -\infty, \\ +\infty & \text{si} \quad x = +\infty \end{cases}$$

es un morfismo en **Lat** pero no en **Clat** pues $f(\bigvee \mathbb{R}) = f(+\infty) = +\infty$ pero $\bigvee f(\mathbb{R}) = 0$.

1.8. Isomorfismos. Cuando se estudian los objetos de un cierto constructo, es importante determinar cuando dos de ellos son esencialmente el mismo; por ejemplo, en el constructo **Vect** dos espacios vectoriales se consideran el mismo objeto si tienen la misma dimensión. Para precisar estas consideraciones es necesario incluir la noción de isomorfismo; con esta intención se recuerda que una función $f : A \to B$ es biyectiva si es uno a uno y sobreyectiva, o lo que es lo mismo si existe una función $f^{-1} : B \to A$ que satisface

$$f^{-1} \circ f = 1_A \quad \text{y} \quad f \circ f^{-1} = 1_B,$$

es fácil probar que f^{-1} es única cuando existe, en tal caso se le denomina la *inversa* de f.

Dado $\mathfrak{S}$ un constructo, un morfismo $f : (X, \alpha) \to (Y, \beta)$ es un *isomorfismo* si f es una biyección y su inversa f^{-1} se constituye en un morfismo de $\mathfrak{S}$. Se dice que dos objetos $(X, \alpha), (Y, \beta)$ de $\mathfrak{S}$ son *isomorfos* si existe un isomorfismo $f : (X, \alpha) \to (Y, \beta)$; cuando $(X, \alpha), (Y, \beta)$ son isomorfos se escribe $(X, \alpha) \cong (Y, \beta)$. Note que un morfismo biyectivo no siempre es un isomorfismo; por ejemplo $1_{\mathbb{Z}^+} : (\mathbb{Z}^+, \preceq) \to (\mathbb{Z}^+, \leq)$ en **Pos** es biyectictiva pero no es isomorfismo porque f^{-1} no preserva el orden.

1.8.1. Algunos Ejemplos de Isomorfismos. En el constructo **Pos**, los isomorfismos son morfismos $f : (X, \preceq) \to (Y, \leq)$ donde f es una biyección que transporta la relación $\preceq$ sobre la relación $\leq$ de tal modo que si $x_1, x_2 \in X$,

$$x_1 \preceq x_2 \quad \text{si y solo si} \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$

En el constructo **Met** los objetos son los espacios métricos (M, d), los isomorfismos son las biyecciones contínuas con inversa contínua (*Isometrías*).

2. Categorías, una Generalización

En la década de los cuarenta del siglo pasado, Samuel Eilemberg y Saunders Mac Lane publican el artículo *General Theory of Natural Equivalence* en *Transactions of the American Mathematical Society*, allí exhiben un instrumento para relacionar sistemas de estructuras algebraicas y sistemas de estructuras topológicas (cf. [18]); la amplia gama de aplicaciones llevó a una teoría general, y lo que había sido una herramienta para relacionar estructuras, se tornó en un medio eficiente para definirlas. Ejemplos de uso y resultados son los obtenidos por Grothendieck y sus estudiantes cuando se ocuparon de problemas clásicos de Geometría y teoría de números en donde se crearon y usaron nuevas estructuras incluidos los topoi. En los años sesenta Lawvere dio inicio a una labor encaminada a dar definiciones consistentes de nuevas y viejas estructuras generando nuevas aplicaciones en lógica y ciencias de la computación. A pesar de la potencia de esta teoría, esta tiene como todo en la vida, críticos de la talla del ilustre René Thom, el padre de la teoría de catástrofes, quien en [25] manifiesta *no sentir mayor simpatía por la teoría de las categorías que por la teoría de conjuntos*, claro está, el contexto allí es una discusión en torno a la visión de la matemática y en general de la ciencia y una aproximación al problema de los fundamentos; la vigencia y posibilidades de esta teoría es palpable cuando se atiende a Roger Penrose quien en [21], despues de decir que se trata de un *formalismo o (armazón) algebraico basado en nociones abstractas muy primitivas (aunque confusas)...* concluye reconociendo *...no me extrañaría que estas nociones llegasen a tener un papel importante para reemplazar los nociones espaciotemporales convencionales en la física del siglo XXI*. La persona interesada en esta teoría puede consultar además al mismo Lawvere quien en [17] inicia la discusión desde un nivel muy elemental y en un ambiente similar al del aula de clase para tratar los temas sin sacrificar su complejidad y exigencia.

Definición 2.1. *Una categoría (cf.* [2] *y* [18]*) consiste en una cuarteta* $\boldsymbol{A} = (Obj, mor, 1, \circ)$ *en donde:*

Cat1. *Una clase* Obj *cuyos miembros son los objetos de* $\boldsymbol{A}$*, tambien se les denomina* $\boldsymbol{A}$*-objetos. Con frecuencia a la clase* Obj *se le nota con* $Obj\boldsymbol{A}$*.*

Cat2. *Para cada par de objetos* (A, B) *de* $\boldsymbol{A}$*, existe un conjunto* $Mor(A, B)$*; a los elementos de* $Mor(A, B)$ *se les denomina* $\boldsymbol{A}$*-Morfismos de* A *en* B*. Si* $f \in Mor(A, B)$*, se escribe* $f : A \to B$*.*

Cat3. *Para cada objeto* A *de* $\boldsymbol{A}$*, existe un morfismo* $1_A : A \to A$*, es la* $\boldsymbol{A}$*-identidad sobre* A*.*

Cat4. *Hay una ley de composición que relaciona los* $\boldsymbol{A}$*-Morfismos* $f \in Mor(A, B)$ *y* $g \in Mor(B, C)$ *dados, un* $\boldsymbol{A}$*-Morfismo* $g \circ f \in Mor(A, C)$*; es la* composición *de* f *y* g*. Esta composición está sujeta a las siguientes condiciones:*

Mor1. *La composición es asociativa, i. e. si* $f \in Mor(A, B)$*,* $g \in Mor(B, C)$ *y* $h \in Mor(C, D)$*, se satisface la ecuación*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f. \tag{2.1.1}$$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "h\circ g"] \arrow[dr, "g"] & D \\
A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g\circ f"'] & C \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

Mor2. *Las* $\boldsymbol{A}$*-identidades actúan como identidades con respecto a la composición; es decir, para un* $\boldsymbol{A}$*-morfismo* $f : A \to B$ *se verifica:*

$$1_B \circ f = f \quad y \quad f \circ 1_A = f. \tag{2.1.2}$$

$$\begin{tikzcd}
 & B \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "1_A"'] & A \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "1_B"] & B \\
A \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Mor3. *Dos conjuntos* $Mor(A, B)$ *son siempre disjuntos.*

Ejemplos de categorías que no son constructos son los siguientes:

1. Cualquier monoide $(M, *, e)$ es una categoría con un solo objeto, es decir, $(M, *, e) = (\mathrm{Obj}, \mathrm{Mor}, 1, \circ)$ donde
$$\mathrm{Obj} = M, \qquad \mathrm{Mor}(M, M) = \{M\}, \qquad 1_M = e \quad \text{ y } \quad a \circ b = a * b.$$
2. La categoría **Mat** donde los objetos son los números naturales; para $m, n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Mor}(m, n)$ es el conjunto de todas las matrices reales de tamaño $m \times n$, 1_n es la matriz idéntica $n \times n$ y la composición de matrices se define por $A \circ B = BA$, donde BA es el producto usual de matrices.

Es posible ahora, considerar las categorías como objetos estructurados y establecer relaciones entre las mismas; esos ”morfismos” por lo menos han de preservar sus estructuras, se denominan *functores.*

Definición 2.2. *Sean* $\boldsymbol{A}$ *y* $\boldsymbol{B}$ *categorías, un functor* F *de* $\boldsymbol{A}$ *a* $\boldsymbol{B}$ *es una función que asigna a cada* $\boldsymbol{A}$*-objeto* A *un* $\boldsymbol{B}$*-objeto* $F(A)$ *y a cada* $\boldsymbol{A}$*-morfismo* $f : A \to \hat{A}$ *un* $\boldsymbol{B}$*-morfimo* $F(f) : F(A) \to F(\hat{A})$ *de tal modo que:*

1. F *preserva la composición; i. e.* $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$*,*
2. F *preserva los morfismos identidad; i. e.* $F(1_A) = 1_{F(A)}$ *para cada* $\boldsymbol{A}$*-objeto* A*.*

Cuando se tiene un funtor F de $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$, se nota $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$; obsérvese que un functor $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es realmente una gran familia de funciones: una función de $\mathrm{Obj}\mathbf{A}$ en $\mathrm{Obj}\mathbf{B}$, otra de $\mathrm{Mor}(A, \hat{A})$ en $\mathrm{Mor}(FA, F\hat{A})$ para cada par $(A, \hat{A})$ de $\mathbf{A}$-objetos.

Como los functores preservan identidades y hay una identificación entre los objetos y los morfismos identidad, la parte de la definición 2.2 que hace referencia a los objetos, depende, es decir, está determinada por la parte que hace referencia a los morfismos.

2.1. Algunos Ejemplos de Functores.

1. *El Functor Identidad*: Sea $\mathbf{A}$ una categoría arbitraria, el functor identidad $1_{\mathbf{A}}$ se define por

$$1_{\mathbf{A}} : (f : A \to B) = f : A \to B.$$

2. *El Functor Constante*: Sean las categorías $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ y B un objeto cualquiera de $\mathbf{B}$, el functor constante de valor B es $C_B : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ definido por

$$C_B : (f : A \to \hat{A}) = 1_B.$$

3. *El Functor de Olvido*: Para cada constructo $\mathbf{A}$ de los estudiados en la sección anterior, existe el functor de olvido $\mathcal{O} : \mathbf{A} \to \mathbf{SET}$ en donde para cada objeto A de $\mathbf{A}$ $\mathcal{O}(A)$ es el conjunto subyacente y

$\mathcal{O}(f)$ es la función (conjuntista) subyacente de un morfismo f.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[d, "\mathcal{O}"'] & (X,*) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & (Y,\hat{*}) \arrow[d] \\ \mathbf{SET} & X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

4. Si $\mathbf{M} = (M,*,e)$ y $\hat{\mathbf{M}} = (\hat{M},\hat{*},\hat{e})$ son monoides y son considerados como categorías entonces un functor de $\mathbf{M}$ en $\hat{\mathbf{M}}$ es un homomorfismo de monoides de $\mathbf{M}$ en $\hat{\mathbf{M}}$.

Definición 2.3. *Sea $F : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ un functor, se dice que*

1. *F es un functor fiel si para objetos A y $\hat{A}$ de la categoría $\boldsymbol{A}$, la restricción, $F : Mor(A,\hat{A}) \to Mor(FA,F\hat{A})$ es uno a uno.*
2. *F es un functor pleno si F es sobre en el conjunto de los morfismos.*

Complementando el ejemplo del functor de olvido, es importante observar que se trata de un functor fiel, además, el codominio o meta del funtor no siempre es $\mathbf{SET}$, por ejemplo si se toma la categoría $\mathbf{GrTOP}$ de los grupos topológicos se obtienen los siguientes tres functores que olvidan estructura:

1. El functor $\mathcal{O}_1 : \mathbf{GrTOP} \to \mathbf{TOP}$ donde se concibe $\mathbf{GrTOP}$ como estructuras algebraicas sobre $\mathbf{TOP}$,
2. El functor $\mathcal{O}_2 : \mathbf{GrTOP} \to \mathbf{Gr}$ donde el codominio es la categoría de los grupos y se piensa $\mathbf{GrTOP}$ como estructuras topológicas sobre $\mathbf{Gr}$, y
3. El functor $\mathcal{O}_3 : \mathbf{GrTOP} \to \mathbf{SET}$ donde se toma $\mathbf{GrTOP}$ como estructuras algebraicas y topológicas sobre $\mathbf{SET}$.

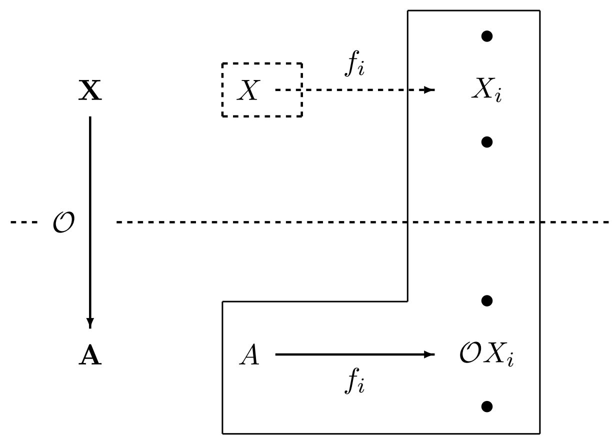
Es la naturaleza del functor de olvido quien determina la estructura, se hace necesario traer de [2] y presentar la siguiente

Definición 2.4. *Sea $\boldsymbol{X}$ una categoría; una categoría concreta sobre $\boldsymbol{X}$ es un par $(\boldsymbol{X},\mathcal{O})$ donde $\boldsymbol{A}$ es una categoría y $\mathcal{O} : A \to X$ es un functor fiel; con frecuencia a $\mathcal{O}$ se le llama functor de olvido de la categoría concreta y a $\boldsymbol{X}$ la categoría base de $(\boldsymbol{X},\mathcal{O})$.*

De la sección 1.2 se tiene que una categoría concreta sobre $\mathbf{SET}$ es un constructo.

2.2. Categorías Topológicas. Una categoría es topológica si presenta las bondades de $(\mathbf{TOP}, \mathcal{O})$ vista como categoría concreta sobre $\mathbf{SET}$, es decir, una categoría concreta $(\mathbf{X}, \mathcal{O})$ sobre $\mathbf{A}$ es topológica (cf. [2]) si presenta la siguiente fenomenología:

1. Hay solución para problemas iniciales: Si $(f_i : A \to \mathcal{O}X_i)_{i\in I}$ es una fuente estructurada en $\mathbf{A}$, esta tiene un único levantamiento inicial $(f_i : X \to X_i)_{i\in I}$ en $\mathbf{X}$,



2. Hay solución para problemas finales: Si $(f_i : \mathcal{O}X_i \to A)_{i\in I}$ es una meta estructurada en $\mathbf{A}$, existe un único $(f_i : X_i \to A)_{i\in I}$, levantamiento final en $\mathbf{X}$,
3. $(\mathbf{X}, \mathcal{O})$ es completo por fibras, es decir, para cada objeto A de $\mathbf{A}$, la clase de los objetos X de $\mathbf{X}$ para los cuales $\mathcal{O}X = A$ es un retículo completo.

La equivalencia de las primeras dos condiciones se prueba en [2] mediante el *Teorema de la Dualidad Topológica*, lo mismo que la completez del retículo que trata la tercera condición; en esta última se discute la existencia de elementos mínimos, máximos, minimales y maximales, conceptos valiosos y de gran interés pero que escapan al el propósito de este trabajo.

3. Elementos de Lógica

Los sistemas lógicos están basados en general por un lenguaje formal que incluye una noción de fórmula bien formada, y en consecuencia están determinados bien sea semántica o sintácticamente.

Se dice que un sistema lógico está semánticamente determinado si cada fórmula bien formada tiene un valor de verdad o representa una función en el conjunto de los valores de verdad.

Se dice que un sistema lógico está sintácticamente determinado si hay una noción de prueba y de fórmula probable, esto es, de teorema (formal) como derivación de un conjunto de premisas.

Desde un punto de vista epistemológico, el aspecto semántico de la lógica clásica precede al sintáctico pues tal como se presenta en [8] *un teorema o una consecuencia formal de ciertas premisas es una propiedad que depende solamente de la forma y las relaciones estructurales entre fómulas.*

El la lógica clásica se tienen dos principios fundamentales: Bivalencia y Composición. Por el principio de *Bivalencia* se tiene que cada proposición tiene exáctamente uno de los dos valores de verdad: $\bot$ (falso) o $\top$ (verdadero) que usualmente se codifican con 0 y 1 respectivamente; por el principio de *Composición*, el valor de verdad de cada fórmula bien formada compuesta es función del valor de verdad de sus componentes.

Considerando las funciones de valor de verdad que caracterizan los conectivos, nos lleva a estudiar la estructura algebraica con el conjunto de valores de verdad como soporte; por otro lado, sabiendo que todos los conectivos clásicos son definidos a partir de la conjunción, disyunción y negación, significa que se debe considerar el conjunto de valores de verdad $\{0, 1\}$ junto con las funciones mín, máx y $1 - \ldots$ obteniéndose un *Álgebra Booleana* particular. La noción semántica de validez de una fórmula bien formada H con respecto a una interpretación, significa que H tiene valor de verdad 1 en esa interpretación particular.

Las nociones de valor de verdad, interpretación y validez se generalizan de tal manera que la estructura de valores de verdad puede ser un álgebra Booleana $\mathcal{B} = \{B, \wedge, \vee, ^c, 0, 1\}$, una interpretación es una función del conjunto de todas las variables proposicionales en B, que las funciones de verdad para conjunción, disjunción y negación son escogidos de acuerdo a $\wedge, \vee, ^c$ respectivamente y que validez de una fórmula bien formada H con respecto a una interpretación dada significa que H tiene el valor 1 de B en esa interpretación.

La lógica multi-valuada solamente[5] cambia el principio de bivalencia; así, se trata de un sistema S y un lenguaje formal $\mathcal{L}_S$ que comprende (cf.[9]):

- Una familia (no vacía) de conectivos proposicionales,
- Una familia (posiblemente vacía) de constantes de grados de verdad,
- Un conjunto de cuantificadores,

y la adopción usual de definir la clase de las fórmulas bien formadas con respecto a esas premisas sintácticas y paralelo a esto el correspondiente enfoque semántico:

- Un conjunto (no vacío) de grados de verdad,
- Una familia de funciones de grados de verdad en correspondencia con los conectivos proposicionales del lenguaje formal,
- Una familia (posiblemente vacía) de operaciones anulativas, i. e. elementos de los grados de verdad con una correspondencia uno a uno entre los miembros de esta familia y los grados de verdad constantes del lenguaje formal.

[5] Esta afirmación se hace literalmente, casi ingenua.

- Un conjunto de funciones que interpretan cuantificadores de $\wp(\mathcal{W}^S)$ en $\mathcal{W}^S$ junto con una correspondencia uno a uno entre esas funciones y los cuantificadores del lenguaje formal.

Usualmente se asume que los valores de verdad clásicos están incluidos en los grados de verdad de un sistema S de lógica multi-valuada, es decir,

$$\{0,1\} \subseteq \mathcal{W}^S. \tag{3.0.1}$$

3.1. De los Grados de Verdad. En general, para un sistema S de lógica multi-valuada, no hay restricciones para el conjunto $\mathcal{W}^S$ de grados de verdad de S; sin embargo la elección de $\mathcal{W}^S$ como conjunto de números es ampliamente aceptada, por lo menos cuando no se está interesado en considerar un orden en los valores de verdad donde se puedan presentar situaciones no comparables. En tal sentido es usual tener además de (3.0.1) la estructura

$$\mathcal{W}^S \subseteq [0,1] \subseteq \mathbb{R}, \tag{3.0.2}$$

en este ambiente, es común usar para los conjuntos infinitos de valores de verdad enumerables o no enumerables los siguientes conjuntos respectivamente:

$$\mathcal{W}_0 =: \{\, x \in \mathbb{Q} \mid 0 \le x \le 1\} \quad \text{o} \quad \mathcal{W}_\infty =: \{\, x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 1\}, \tag{3.0.3}$$

ahora, si se trata de caso finito, se asume que los valores de verdad forman un conjunto de puntos equidistantes del intervalo $[0,1]$, esto es, para algún entero $n \geq 2$ es

$$\mathcal{W}_n =: \{\, \frac{k}{n-1} \mid 0 \le k \le n-1\}, \tag{3.0.4}$$

3.2. Designando Valores de Verdad. En la lógica clásica se cuenta con los valores de verdad $\top$ y $\perp$, dada una fórmula bien formada, estamos interesados en aquellas interpretaciones para el sistema de lógica multi-valuada en que la fórmula bien formada es verdadera.

El conjunto de valores de verdad $\mathcal{W}^S$ de un sistema S de lógica multi-valuada incluye valores de verdad equivalentes a $\top$ y $\perp$ respectivamente; teniendo en cuenta (3.0.1) se puede pensar que 1 es equivalente a $\top$ pero tal idea no siempre se satisface. Surge entonces la cuestion de determinar qué valores de verdad corresponden a $\top$; esto es en cada sistema S de valores de verdad multi-valuado se tiene un conjunto $\mathcal{D}^S$ de valores de verdad designados en donde se asume que

$$1 \in \mathcal{D}^S \subseteq \mathcal{W}^S, \quad \text{y} \quad 0 \notin \mathcal{D}^S. \tag{3.0.5}$$

Un paso posterior, es generalizar considerando los valores de verdad correspondientes a $\perp$ obteniéndose los valores de verdad designados positivos y los valores de verdad designados negativos determinando dos conjuntos disjuntos $\mathcal{D}^{S_+}$ y $\mathcal{D}^{S_-}$ tales que

$$\mathcal{D}^{S_+} \cup \mathcal{D}^{S_-} \subseteq \mathcal{W}^S, \quad \text{y} \quad \mathcal{D}^{S_+} \cap \mathcal{D}^{S_-} = \emptyset,$$

con frecuencia se asume que $1 \in \mathcal{D}^{S_+}$ y $0 \in \mathcal{D}^{S_-}$.

3.3. Validez y Consecuencia Lógica. Por una proposición entendemos una fórmula bien formada en el caso de un lenguaje proposicional $\mathcal{L}_S$ o bien, una fórmula bien formada sin variables individuales libres de un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}_S$; una proposición P es válida en una interpretación si tiene un grado de verdad designado en esa interpretación, y una proposición P es lógicamente válida si es válida en cada interpretación posible.

En esta dirección, una fórmula P de un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}_S$ es válida en una interpretación $\mathfrak{A}$ si tiene designado un grado de verdad con respecto a una valuación de las variables individuales del lenguage. Por otro lado; una interpretación $\mathfrak{A}$ es un modelo de una fórmula bien formada P, si esta fórmula es válida en $\mathfrak{A}$, esta situación se nota con $\mathfrak{A} \models P$; y $\mathfrak{A}$ es un modelo para un conjunto Σ de fórmulas bien formadas si es un modelo para cada $P \in \Sigma$, este hecho se nota $\mathfrak{A} \models \Sigma$. Esta noción se generaliza en lógica multi-valuada como sigue: Dados un valor de verdad α y una proposición P, una interpretación $\mathfrak{A}$ es un α-modelo de P si el valor de verdad de P en la interpretación $\mathfrak{A}$ es igual a α o es mayor o igual que α, en verdad ambas variantes se usan, se debe prestar atención al contexto. A veces cuando se trata del último caso que se menciona, se prefiere decir que es un $(\geq \alpha)$-modelo. De esta forma, se extiende la noción de $(\geq \alpha)$-modelo a un conjunto de proposiciones, es decir, una interpretación $\mathfrak{A}$ es un $\geq \alpha$-modelo para un conjunto de proposiciones Σ si $\mathfrak{A}$ es un $(\geq \alpha)$-modelo para cada $P \in \Sigma$.

Basados en estos preliminares, la noción de consecuencia lógica proviene de nuevo de dos intuiciones básicas ligeramente diferentes; se dice que una proposición P es una consecuencia lógica de un conjunto Σ de proposiciones y se escribe $\Sigma \models P$ si

- *Versión 1* Cada modelo de Σ es también un modelo para P,
- *Versión 2* Cada $(\geq \alpha)$-modelo de Σ es también un $(\geq \alpha)$-modelo para P.

3.4. De los Conectivos. Siguiendo un paralelo con el procedimimiento clásico, en el ambiente de la lógica multi-valuada se tienen los conectivos que se describen a continuación:

3.4.1. Conectivos Conjunción. Un ejemplo bien conocido de estos conectivos proviene de Lukasiewicz y Gödel, es la operación binaria

$$et_1(u,v) =: \text{mín}\{u,v\}, \tag{3.0.6}$$

la tabla de verdad correspondiente para $\mathcal{W}_4$ es

et_1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
0	0	0	0	0
$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

otro ejemplo procedente de Lukasiewicz es

$$et_2(u,v) =: \text{máx}\{0, u+v-1\}, \tag{3.0.7}$$

y la la tabla de verdad correspondiente para $\mathcal{W}_4$ es

et_2	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
0	0	0	0	0
$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$
$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

Nótese que en ambos casos, la definición es independiente del número de valores de verdad. En tiempos recientes se ha considerado la conjunción

$$et_3(u,v) =: u \cdot v, \tag{3.0.8}$$

esto con inspiración en el comportamiento de la conjunción clásica y $\mathcal{W}_2$; en otra situación, para que et_3 sea cerrada es necesario que el conjunto de valores de verdad sea infinito. Además de estos tres ejemplos, existe un gran número de estos conectivos, estas funciones son las t-normas.

Definición 3.1. *Una Operación binaria t en el intervalo unitario $[0,1]$ es una t-norma (cf.[9] y [14]) si*

T1 *t es asociativa y conmutativa,*
T2 *t es no creciente en cada uno de sus argumentos,*
T3 *1 es elemento neutro para t, es decir, $t(x,1) = x$ para todo $x \in [0,1]$.*

Es inmediato que para todo $x \in [0,1]$, $t(x,0) = 0$ pues

$$t(x,0) = t(0,x) \leq t(0,1) = 0.$$

Desde el punto de vista algebraico, el intervalo $[0,1]$ con la operación t se constituye en un monoide.

3.4.2. Conectivos Negación. Desde el punto de vista histórico (cf.[9]), Gödel y Lukasiewicz proponen las negaciones non_0 y non_1 para el conjunto $[0,1]$:

$$non_0(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \\ 0 \text{ si } x \neq 0, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad non_1(x) = 1 - x; \tag{3.1.1}$$

Post propone non_2 para $\mathcal{W}_m$:

$$non_2(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \\ x - \frac{1}{m-1} \text{ si } x \neq 0 \end{cases} \tag{3.1.2}$$

esta última es considerada hoy en día algo extraña y se tiende a excluir de consideraciones generales. En la actualidad prevalece la siguiente definición:

Definición 3.2. *Una función $\mathbf{n} : [0,1] \to [0,1]$ es una negación si es no creciente y satisface $\mathbf{n}(0) = 1$ y $\mathbf{n}(1) = 0$. Una negación es etricta si es estrictamente decreciente y continua, es fuerte si es estricta y es una involución, es decir, satisface $\mathbf{n}(\mathbf{n}(x)) = x$ para todo $x \in [0,1]$.*

Así, non_2 no es una negación para $m > 2$, non_0 es una negación y non_1 es una negación fuerte. Otro ejemplo de negación no estricta es

$$non^*(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } \ x < 1 \\ 0 \text{ si } x = 1, \end{cases} \tag{3.2.1}$$

toda función negación n satisface $non_0 \leq n \leq non^*$. Un ejemplo de una negación estricta que no es fuerte es

$$non_3(x) = 1 - x^2, \tag{3.2.2}$$

un surtidor de negaciones fuertes lo constituye la familia de funciones

$$n_\lambda(x) = \frac{1-x}{1+\lambda x} \tag{3.2.3}$$

donde $\lambda > -1$. Esta familia fue introducida por M. Sugeno (cf.[9]); a n_λ se le denomina λ-complemento. Para caracterizar las negaciones fuertes se exhibe el siguiente resultado

Teorema 3.3. *Sea* $\mathbf{n} : [0,1] \to [0,1]$ *entonces,*

1. $\mathbf{n}$ *es una negación fuerte si y solamente si existe un automorfismo* ϕ *del intervalo* $[0,1]$ *tal que para todo* $x \in [0,1]$ *es*

$$\mathbf{n}(x) = \phi^{-1}(1 - \phi(x)), \tag{3.3.1}$$

2. $\mathbf{n}$ *es una negación estricta si y solamente si existen automorfismos* ϕ, ψ *del intervalo* $[0,1]$ *tales que para todo* $x \in [0,1]$ *se tiene que*

$$\mathbf{n}(x) = \psi(1 - \phi(x)). \tag{3.3.2}$$

Un resultado (cf.[9]) que relaciona las t-normas con las negaciones es,

Teorema 3.4. *Sean* t *una* t*-norma continua y* $\mathbf{n}$ *una negación estricta, para todo* $x \in [0,1]$ *se tiene que* $t(x, \mathbf{n}(x)) = 0$ *si y solo si existe un automorfismo* ϕ *del intervalo* $[0,1]$ *tal que para todo* $x, y \in [0,1]$ *es*

$$t(x,y) = \phi^{-1}(et_2(\phi(x), \phi(y))) \quad y \quad \mathbf{n}(x) \leq \phi^{-1}(1 - \phi(x)). \tag{3.4.1}$$

Una situación típica la presentan et_2 y non_1.

3.4.3. Conectivos Disyunción. Hay dos maneras de entrar a estudiar estos conectivos, una de ellas es reflexionar en torno a las propiedades que deben ser satisfechas para establecer un paralelo con los conectivos conjunción y la otra, desde la consideración de una conjunción y una negación, incluyendo desde luego reglas análogas a las leyes de De Morgan; se presentarán ambas perspectivas. Las propiedades satisfechas por los conectivos disyunción corresponden a las de las *t-conormas* como funciones de grado de verdad.

Definición 3.5. *Una operación binaria* $\mathbf{s}$ *en el intervalo* $[0,1]$ *es una t-conorma si*

- S1 *Es asociativa y conmutativa,*
- S2 *Es no decreciente en cada argumento,*
- S3 0 *es elememto neutro, es decir;* $\mathbf{s}(x,0) = x$ *para todo* $x \in [0,1]$.

Es claro que para todo $x \in [0,1]$, $\mathbf{s}(x,1) = 1$ pues

$$\mathbf{s}(x,1) = \mathbf{s}(1,x) \geq \mathbf{s}(0,1) = 1.$$

Desde el punto de vista algebraico, el intervalo $[0,1]$ con la operación $\mathbf{s}$ se constituye en un monoide.

Ahora, en conección con las leyes de DeMorgan, se introduce una función $\mathbf{s} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ a partir de una negación $\mathbf{n}$ y de alguna t-norma $\mathbf{t}$ así:

$$\mathbf{s}(x,y) = \mathbf{n}(\mathbf{t}(\mathbf{n}(x),\mathbf{n}(y))), \qquad \forall x,y \in [0,1]. \tag{3.5.1}$$

o definiendo,

$$\mathbf{s}(x,y) = \mathbf{n}^{-1}(\mathbf{t}(\mathbf{n}(x),\mathbf{n}(y))), \qquad \forall x,y \in [0,1]. \tag{3.5.2}$$

Ambas visiones coinciden en el siguiente resultado (cf.[9]):

Teorema 3.6. *Si* $\mathbf{n}$ *es una negación fuerte y* $\mathbf{s}$ *y* $\mathbf{t}$ *son dos operaciones binarias relacionadas por*

$$\mathbf{s}(x,y) = \mathbf{n}(\mathbf{t}(\mathbf{n}(x),\mathbf{n}(y))), \qquad \forall x,y \in [0,1],$$

entonces $\mathbf{t}$ *es una t-norma y* $\mathbf{s}$ *es una t-conorma.*

Es usual que se considere la negación fuerte non_1; así, para una t-norma $\mathbf{t}$ se tiene la t-conorma:

$$\mathbf{s_t}(x,y) = 1 - \mathbf{t}(1-x, 1-y), \qquad \forall x,y \in [0,1], \tag{3.6.1}$$

para obtener las t-conormas más populares

$$vel_1(x,y) = \max\{x,y\}, \tag{3.6.2}$$

$$vel_2(x,y) = \min\{1, x+y\} \text{ y} \tag{3.6.3}$$

$$vel_3(x,y) = x + y - x \cdot y \tag{3.6.4}$$

en correspondencia con las t-normas definidas en (3.0.6), (3.0.7) y (3.0.8) quedando para el lector la discusión y elaboración de las tablas de verdad en el ambiente $\mathcal{W}_4$.

3.4.4. Conectivos Implicación. De los primeros ejemplos que aparecen de este tipo de conectivos es la implicación de Lukasiewicz definida por

$$seq_2(x,y) = \min\{1, 1-x+y\}, \tag{3.6.5}$$

otro ejemplo importante fue introducido por Gödel, que se define

$$seq_1(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \le y, \\ y & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{3.6.6}$$

Como es de esperarse, uno tiende a escribir las implicaciones en términos de otros conectivos, uno de los caminos usuales es hacerlo con disyunción y negación o con conjunción y negación, así en el caso de (3.6.5) es

$$seq_2(x,y) = vel_2(non_1(x), y) = non_1(et_2(x, non_1(y))), \tag{3.6.7}$$

esta conección es la que motiva que a vel_2 se le llame la disyunción (aritmética) de Lukasiewicz y et_2 la conjunción (aritmética) de Lukasiewicz; pero en lo que concierne a seq_1 el intento es infructuoso, ante esto, existe otro tipo de reducción, es

$$seq_1(x,y) = \sup\{w \mid et_1(x,w) \le y\} \tag{3.6.8}$$

introducida por Gödel (cf.[9]) cuando relaciona la lógica multi-valuada y la lógica intucionista en donde la implicación es interpretada como pseudocomplemento, la situación expuesta en (3.6.8) es equivalente a

$$w \leq seq_1(x,y) \Leftrightarrow et_1(x,w) \leq y, \tag{3.6.9}$$

de donde se dice que et_1, seq_1 forman un par adjunto, nótese que et_2, seq_2 presentan el mismo comportamiento.

3.5. Hacia Una Generalización. Cuando se observa por ejemplo

$$([0,1], et_1, vel_1),$$

surge de inmediato la estructura de un retículo enriquecido con el par adjunto (et_1, seq_1) y se tiene la tendencia feliz y exitosa de considerar la estructuras algebraicas que generalizan esta fenomenología; así, se estudia la lógica monoidal en [12] y la estructura de $GL-$monoide que ahora va a centrar nuestra atención.

Sea $(L, \leqslant)$ un retículo infinitamente distributivo y completo, esto es, $(L, \leqslant)$ es un conjunto parcialmente ordenado tal que para todo $A \subset L$ el extremo superior $\bigvee A$ y el extremo inferior $\bigwedge A$ están definidos y para todo $\alpha \in L$ se satisface

$$\left(\bigvee A\right) \wedge \alpha = \bigvee\{a \wedge \alpha \mid a \in A\} \quad \text{y} \tag{3.6.10}$$

$$\left(\bigwedge A\right) \vee \alpha = \bigwedge\{a \vee \alpha \mid a \in A\}. \tag{3.6.11}$$

En particular, $\top := \bigvee L$ y $\bot := \bigwedge L$ son el máximo y el mínimo de L respectivamente. Se asume además que $\bot \neq \top$ lo que significa que L tiene por lo menos dos elementos. Un $GL-$monoide (ver [23]) es un retículo completo enriquecido con una operación binaria $\otimes$ constituyéndose en una tripleta $(L, \leqslant, \otimes)$ tal que:

(1) $\otimes$ es monótona, es decir, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in L$ $\alpha \leqslant \beta$ implica $\alpha \otimes \gamma \leqslant \beta \otimes \gamma$;
(2) $\otimes$ es conmutativa, i.e. $\forall \alpha, \beta \in L$, $\alpha \otimes \beta = \beta \otimes \alpha$,
(3) $\otimes$ es asociativa, esto es $\alpha \otimes (\beta \otimes \gamma) = (\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma$, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in L$;
(4) $(L, \leqslant, \otimes)$ es entero, i.e. $\top$ actúa como elemento unidad: $\alpha \otimes \top = \alpha$, $\forall \alpha \in L$;
(5) $\bot$ actúa como elemento cero en $(L, \leqslant, \otimes)$, es decir $\alpha \otimes \bot = \bot$, $\forall \alpha \in L$;
(6) $\otimes$ se distribuye sobre extremos superiores arbitrarios, esto significa que $\alpha \otimes (\bigvee_j \beta_j) = \bigvee_j (\alpha \otimes \beta_j)$, $\forall \alpha \in L, \forall \{\beta_j : j \in J\} \subset L$;
(7) $(L, \leqslant, \otimes)$ is divisible, i.e. $\alpha \leqslant \beta$ implica la existencia de $\gamma \in L$ tal que $\alpha = \beta \otimes \gamma$.

Por otro lado, todo $GL-$monoide es residuado, i.e. existe una operación binaria adicional $\longmapsto$ (implicación) en L que satisface la condición:

$$\alpha \otimes \beta \leqslant \gamma \Longleftrightarrow \alpha \leqslant (\beta \longmapsto \gamma) \qquad \forall \alpha, \beta, \gamma \in L. \tag{3.6.12}$$

La implicación está dada por:

$$\alpha \longmapsto \beta = \bigvee\{\lambda \in L \mid \alpha \otimes \lambda \leqslant \beta\}, \tag{3.6.13}$$

en este punto, Usted puede comparar (3.6.8) y (3.6.9) con (3.6.12) y (3.6.13) respectivamente[6], note además que $\beta \leq (\alpha \longmapsto \beta)$.

Las propiedades más usuales de los $GL-$monoides, exhibidas en [23], son

(i) $\alpha \longmapsto \beta = \top \iff \alpha \leqslant \beta$;
(ii) $\alpha \longmapsto (\bigwedge_i \beta_i) = \bigwedge_i(\alpha \longmapsto \beta_i)$;
(iii) $(\bigvee_i \alpha_i) \longmapsto \beta = \bigwedge_i(\alpha_i \longmapsto \beta)$;
(v) $\alpha \otimes (\bigwedge_i \beta_i) = \bigwedge_i(\alpha \otimes \beta_i)$;
(vi) $(\alpha \longmapsto \gamma) \otimes (\gamma \longmapsto \beta) \leqslant \alpha \longmapsto \beta$;
(vii) $\alpha \otimes \beta \leqslant (\alpha \otimes \alpha) \vee (\beta \otimes \beta)$.

Ejemplos importantes de GL-monoides son las álgebras de Heyting y las MV-álgebras. En verdad (ver [19] y [13]), un *álgebra de Heyting* es un GL-monoide del tipo $(L, \leqslant, \wedge, \vee, \wedge)$, es decir, en un álgebra de Heyting $\wedge = \otimes$; además allí se define la negación de x (cf. [19]) como $\mathbf{n}(x) = (x \longmapsto \bot)$, con base en la definición de $\longmapsto$ en (3.6.12) es,

$$\beta \leq \mathbf{n}(\alpha) \quad \text{sí y solamente sí} \quad \beta \wedge \alpha = \bot,$$

en un álgebra de Heyting, $\mathbf{n}$ satisface entre otras las siguientes propiedades:

1. $\alpha \leq \mathbf{n}(\mathbf{n}(\alpha))$
2. Si $\alpha \leq \beta$ entonces $\mathbf{n}(\beta) \leq \mathbf{n}(\alpha)$
3. $\mathbf{n}(\alpha) = \mathbf{n}(\mathbf{n}(\mathbf{n}(\alpha)))$

Por otro lado (ver [23]), un GL-monoide es una *MV-algebra* si

$$(\alpha \longmapsto \bot) \longmapsto \bot = \alpha \quad \forall \alpha \in L. \tag{3.6.14}$$

Así, en una MV-algebra existe una involución $\mathbf{n} : L \to L$ que invierte el orden y que se define de manera natural como

$$\mathbf{n}(\alpha) := \alpha \longmapsto \bot \quad \forall \alpha \in L. \tag{3.6.15}$$

3.6. Debilitando el Retículo L. El trabajo con GL-monoides se hace bastante agradable gracias a su gran abanico de propiedades, entre ellas la de incluir la implicación (o exponencial), pero para quien estudia esta fenomenología, es imperativo tratar de disminuir el número de condiciones; es así que en [11], el soporte de las teorías son los *retículos cuasi-monoidales completos*; en ese contexto, un retículo cuasi-monoidal completo o *cqm-lattice* es una tripleta $(L, \leqslant, \otimes)$ que satisface:

1. $(L, \leqslant)$ es un retículo completo donde $\top$ denota la cota superior universal y $\bot$ denota la cota inferior universal.

[6] En un álgebra de Boole, se tiene que para todo x, y y z, es

$$z \leq (\mathbf{n}(x) \vee y) \quad \text{sí y solamente sí} \quad z \wedge x \leq y,$$

por tanto, $(x \longmapsto y) = \mathbf{n}(x) \vee y$. En lógica clásica, cuando p y q son proposiciones, $p \longmapsto q$ es $\mathbf{n}(p) \vee q$.

2. $(L, \leqslant, \otimes)$ es un grupoide parcialmente ordenado, i. e. $\otimes$ es una operación binaria sobre L que satisface el axioma de isotonía
$$a \leqslant b \text{ and } c \leqslant d \quad \text{implica} \quad a \otimes c \leqslant b \otimes d.$$
3. $\alpha \leqslant \alpha \otimes \top$, $\alpha \leqslant \top \otimes \alpha$, para todo $\alpha \in L$.

Dados los retículos cuasi-monoidales completos $(L_1, \leqslant_1, \otimes_1)$ y $(L_2, \leqslant_2, \otimes_2)$, un morfismo ϕ entre $(L_1, \leqslant_1, \otimes_1)$ and $(L_2, \leqslant_2, \otimes_2)$ es una función $\phi : L_1 \to L_2$ que satisface:

m1. ϕ conmuta con extremos superiores arbitrarios.
m2. $\phi(\alpha \otimes_1 \beta) = \phi(\alpha) \otimes_2 \phi(\beta)$.
m3. ϕ preserva cotas superiores universales, i. e. $\phi(\top) = \top$.

Tenemos la categoría **CQML** donde los objetos son los retículos cuasi-monoidales completos (cqm-lattices) y los morfismos son los morfismos entre los retículos cuasi-monoidales completos.

Un grupoide parcialmente ordenado $(L, \leqslant, \otimes)$ es un *cl*-grupoide si $\otimes$ se distribuye sobre extremos superiores arbitrarios no vacíos, i. e.

4. Para $J \neq \emptyset$,
$$\left(\bigvee_{j \in J} \alpha_j\right) \otimes \beta = \bigvee_{j \in J} (\alpha_j \otimes \beta) \quad \text{y} \quad \beta \otimes \bigvee_{j \in J} \alpha_j = \bigvee_{j \in J} (\beta \otimes \alpha_j).$$

4. De los Conjuntos Difusos

Se asume la familiaridad con la teoría de conjuntos usual tal como se trata de plantear en la sección 1.1, allí los subconjuntos de un conjunto dado X constituyen el conjunto potencia $\wp X$; es fácil ver que $(\wp X, \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, X, ^c)$ es un álgebra Booleana y que sus elementos pueden ser identificados con las funciones características, esto es, existe un isomorfismo de conjuntos ordenados entre las estructuras $(\wp X, \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, X, ^c)$ y $(\{0,1\}^X, \leq, \wedge, \vee, 0, 1, ^c)$. Se pretende ahora extender estas nociones a las funciones con codominio un GL-monoide.

4.1. L-Partes. Si X es un conjunto no vacío y L es un GL-monoide, el conjunto de L-partes de X es

$$L^X := \{f \mid f : X \to L\} \tag{4.0.16}$$

L^X hereda la estructura de GL-monoide; esto es, la estructura de orden y todas las operaciones algebraicas de L pueden ser extendidas puntualmente a L^X como sigue: Para todo $f, g \in L^X$,

1. $f \leq g$ si y solo si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$,
2. $(f \otimes g)(x) = f(x) \otimes g(x)$,

en particular, los L-conjuntos 1_X y 0_X definidos por
$$1_X(x) := \top \quad \text{y} \quad 0_X(x) := \bot$$

para todo $x \in X$ son el máximo y el mínimo en L^X respectivamente. La relación $f \leq g$ es una copia estándar de lo que sucede en $\wp X$ i. e. cuando el conjunto subyacente de L es $\{0,1\}$, pero L puede ser usado como lo hacen Klir y Yuan en [14] para establecer grados en que f está contenido en g. En primer lugar se considera el GL-monoide $([0,1], \leq, et_1, vel_1, 0, 1, non_1)$, es claro que para este caso muy particular,

1. $(f \wedge g)(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}$,
2. $(f \vee g)(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\}$,
3. ${}^c f(x) = 1 - f(x)$, el complemento de f en x,

además, si X es finito, el *cardinal* de f es

$$|f| = \sum_{x \in X} f(x) \tag{4.0.17}$$

y el *grado de contenencia* de f en g es

$$S(f,g) = \frac{1}{|f|}\big(|f| - \sum_{x \in X} \text{máx}\{0, f(x) - g(x)\big) \tag{4.0.18}$$

nótese que la suma da una medida de aquellos elementos x en donde la relación $f(x) \leq g(x)$ no se satisface; también se tiene $S(g,f)$, se puede pensar en el grado de coincidencia en $[0,1]$-partes, tiene el problema de evocar la estructura $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, esto es, $[0,1]$ es visto como subconjunto de los números reales.

4.2. Operadores Potencia. Ahora, dada $\psi : X \to Y$, ψ produce los operadores $\overrightarrow{\psi_L} : L^X \to L^Y$ y $\overleftarrow{\psi_L} : L^Y \to L^X$ definidos por

$$\overrightarrow{\psi_L}(f)(y) = \bigvee_{x \in \overleftarrow{\psi}(\{y\})} f(x) \quad \text{y} \quad \overleftarrow{\psi_L}(g) = g \circ \psi$$

donde $\overleftarrow{\psi} : \wp Y \to \wp X$ es el operador imagen recíproca usual. Estas ideas y método de trabajo pueden ser extendidas como

1. El operador $\overrightarrow{\psi_{LL}} : L^{(L^X)} \to L^{(L^Y)}$ que se nota por comodidad con $\overrightarrow{\overrightarrow{\psi}}_1$ y actúa como sigue: Para todo $\mathcal{U} \in L^{(L^X)}$ y para todo $g \in L^Y$, es
$$\overrightarrow{\overrightarrow{\psi}}_1(\mathcal{U})(g) = \overrightarrow{\psi_{LL}}(\mathcal{U})(g) = \bigvee_{g = \overrightarrow{\psi_L}(f)} \mathcal{U}(f).$$
2. El operador $\overleftarrow{\psi_{LL}} : L^{(L^X)} \to L^{(L^Y)}$ que se nota por comodidad con $\overrightarrow{\overrightarrow{\psi}}_2$ y actúa como sigue: Para todo $\mathcal{U} \in L^{(L^X)}$ y para todo $g \in L^Y$, es
$$\overrightarrow{\overrightarrow{\psi}}_2(\mathcal{U})(g) = \overleftarrow{\psi_{LL}}(\mathcal{U})(g) = \mathcal{U} \circ \overleftarrow{\psi_L}(g).$$

3. El operador $\overleftrightarrow{\psi}_{LL} : L^{(L^Y)} \to L^{(L^X)}$ que se nota por comodidad con $\overset{\leftleftarrows}{\psi}_1$ y está definido así: Para todo $\mathcal{V} \in L^{(L^Y)}$ y para todo $f \in L^X$, es
$$\overset{\leftleftarrows}{\psi}_1(\mathcal{V})(f) = \overleftrightarrow{\psi}_{LL}(\mathcal{V})(f) = \bigvee_{f=\overleftarrow{\psi}_L(g)} \mathcal{V}(g).$$

4. El operador $\overleftarrow{\overrightarrow{\psi}}_{LL} : L^{(L^Y)} \to L^{(L^X)}$ que se nota con $\overset{\leftleftarrows}{\psi}_2$ y se define así: Para todo $\mathcal{V} \in L^{(L^Y)}$ y para todo $f \in L^X$, es
$$\overset{\leftleftarrows}{\psi}_2(\mathcal{V})(f) = \overleftarrow{\overrightarrow{\psi}}_{LL}(\mathcal{V})(f) = \mathcal{V} \circ \overrightarrow{\psi}_L(f).$$

Teorema 4.1. *Los parejas de operadores* $(\overset{\rightrightarrows}{\psi}_1, \overset{\leftleftarrows}{\psi}_2)$, *y* $(\overset{\leftleftarrows}{\psi}_1, \overset{\rightrightarrows}{\psi}_2)$ *son pares adjuntos*[7].

Demostración. Es evidente que los cuatro operadores son morfismos de conjuntos ordenados. Para el caso de $(\overset{\rightrightarrows}{\psi}_1, \overset{\leftleftarrows}{\psi}_2)$ sean $\mathcal{V} \in L^{(L^Y)}$ y $g \in L^Y$, entonces
$$\overset{\rightrightarrows}{\psi}_1\left(\overset{\leftleftarrows}{\psi}_2(\mathcal{V})\right)(g) = \bigvee_{g=\overrightarrow{\psi}_L(h)} \overset{\leftleftarrows}{\psi}_2(\mathcal{V})(h) = \bigvee_{g=\overrightarrow{\psi}_L(h)} \mathcal{V}(\overrightarrow{\psi}_L(h)) = \mathcal{V}(g);$$
por otro lado, sean $\mathcal{U} \in L^{(L^X)}$ y $f \in L^X$ entonces
$$\overset{\leftleftarrows}{\psi}_2\left(\overset{\rightrightarrows}{\psi}_1(\mathcal{U})\right)(f) = \overset{\rightrightarrows}{\psi}_1(\mathcal{U})(\overrightarrow{\psi}_L(f)) = \bigvee_{\overrightarrow{\psi}_L(f)=\overrightarrow{\psi}_L(g)} \mathcal{U}(g) \geq \mathcal{U}(f),$$
de donde se sigue que $(\overset{\rightrightarrows}{\psi}_1, \overset{\leftleftarrows}{\psi}_2)$ es un par adjunto. Con respecto al otro par, sean $\mathcal{U} \in L^{(L^X)}$ y $f \in L^X$ entonces
$$\overset{\leftleftarrows}{\psi}_1\left(\overset{\rightrightarrows}{\psi}_2(\mathcal{U})\right)(f) = \bigvee_{\overleftarrow{\psi}_L(h)=f} \mathcal{U}(\overleftarrow{\psi}_L(h)) = \mathcal{U}(f);$$
ahora, si $\mathcal{V} \in L^{(L^Y)}$ y $g \in L^Y$, entonces
$$\overset{\rightrightarrows}{\psi}_2\left(\overset{\leftleftarrows}{\psi}_1(\mathcal{V})\right)(g) = \overset{\leftleftarrows}{\psi}_1(\mathcal{V})(\overleftarrow{\psi}_L(g)) = \bigvee_{\overleftarrow{\psi}_L(h)=\overleftarrow{\psi}_L(g)} \mathcal{V}(h) \geq \mathcal{V}(g),$$
por tanto, $(\overset{\leftleftarrows}{\psi}_1, \overset{\rightrightarrows}{\psi}_2)$ es un par adjunto. ∎

Haciendo las rextricciones adecuadas, un ejercicio de calistenia es estudiar el par $(\overset{\rightrightarrows}{\psi}_2, \overset{\leftleftarrows}{\psi}_2)$.

[7] Aunque ya se ha enunciado el concepto de adjunción, aquí lo volvemos a presentar: Sean $f : M \to N$ y $g : N \to M$ morfismos de conjuntos ordenados, se dice que f es adjunto a izquierda de g, que g es adjunto a derecha de f y que (f, g) forman un par adjunto si para $a \in M$ y $b \in N$ se satisface $f(a) \leq b \Leftrightarrow a \leq g(b)$. De manera equivalente, (f, g) es un par adjunto si y solo si $1_M \leq g \circ f$ y $f \circ g \leq 1_N$.

5. Topología y $GL-$monoides

Se pretende ahora presentar conceptos de espacios topológicos partiendo desde la misma estructura reticular de $GL-$monoide hasta el concepto de topología difusa en una de sus últimas versiones estableciendo relaciones entre estos conceptos.

5.1. La Categoría C-HTOP. Se considera la estructura de topología reticular asociada a un $GL-$monoide $(L, \leqslant, \wedge, \vee, \otimes, \top, \bot)$, un subconjunto $\mathcal{T}$ de L es una *topología reticular* si

t1. Los extremos universales superior $\top$ e inferior $\bot$ del retículo completo $(L, \leq)$ son elementos de $\mathcal{T}$,
t2. Para cada par a, b de elementos de $\mathcal{T}$ se tiene que $a \otimes b$ también es un elemento de $\mathcal{T}$,
t3. Si $\xi \subseteq \mathcal{T}$ entonces $\bigvee_{x \in \xi} x$ es un elemento de $\mathcal{T}$.

Cuando $\mathcal{T}$ es una topología reticular sobre L, se dice que $(L, \mathcal{T})$ es un *espacio topológico reticular*.

Note que este concepto es una consecuencia de la analogía existente entre las estructuras $(L, \leq, \otimes, \vee, \bot, \top)$ y $(\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, X)$ dada por las relaciones

$$\leq \leftrightarrow \subseteq, \quad \otimes \leftrightarrow \cap, \quad \vee \leftrightarrow \cup, \quad \bot \leftrightarrow \emptyset, \quad \text{y} \quad \top \leftrightarrow X.$$

En verdad, un espacio topológico reticular es un objeto de la categoría **C-HTOP** presentada en [22]. Un espacio topológico reticular $(L, \mathcal{T})$ es Hausdorff si para $x, y \in L$ existen $a, b \in \mathcal{T}$ tales que $x < a$, $y < b$ y $a \otimes b = \bot$.

Definición 5.1. *Sea $(L, \mathcal{T})$ un espacio topológico reticular, se dice que un elemento $b \in L$ es una vecindad de otro elemento $a \in L$ si existe $c \in \mathcal{T}$ tal que $a \leq c \leq b$.*

Example 5.2. *Dado un espacio topológico (X, τ), la colección $\mathfrak{C}_\tau$ de los subconjuntos cerrados de X es un l-monoide conmutativo residuado entero en el que*

$$\bigwedge_{j \in J} A_j = \bigcap_{j \in J} A_j, \qquad \bigvee_{j \in J} A_j = adh\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) \qquad y \quad A \otimes B = adh(int(A \cap B),$$

donde int y adh denota los operadores interior y adherencia respectivamente. Una topología reticular en $\mathfrak{C}_\tau$ es una colección $\mathfrak{T}$ de elementos de $\mathfrak{C}_\tau$ que satisface

- *$\emptyset, X \in \mathfrak{T}$,*
- *$A, B \in \mathfrak{T}$ implica que $A \otimes B = adh(int(A \cap B)) \in \mathfrak{T}$,*
- *Si $\xi \subseteq \mathfrak{T}$ entonces $\bigvee_{\lambda \in \xi} A_\lambda = adh(\bigcup_{\lambda \in \xi} A_\lambda) \in \mathfrak{T}$.*

Finalmente, $B \in \mathfrak{C}_\tau$ es una vecindad reticular de $A \in \mathfrak{C}_\tau$ si existe $C \in \mathfrak{T}$ tal que $A \subseteq C \subseteq B$.

El concepto de topología reticular está en estrecha relación con el operador de L-interior (cf. [11]), una aplicación $\mathfrak{i} : L \to L$ es un *operador interior* si

i1. $\mathfrak{i}(\top) = \top$,
i2. $a \leq b$ implica $\mathfrak{i}(a) \leq \mathfrak{i}(b)$,
i3. $\mathfrak{i}(a) \otimes \mathfrak{i}(b) \leq \mathfrak{i}(a \otimes b)$,
i4. $\mathfrak{i}(a) \leq a$,
i5. $\mathfrak{i}(a) \leq \mathfrak{i}(\mathfrak{i}(a))$.

es fácil ver que el conjunto

$$\mathcal{T}_{\mathfrak{i}} := \{b \in L \mid b \leq \mathfrak{i}(b)\}$$

es una topología reticular; por otro lado, si $\mathcal{T} \subset L$ es una topología reticular se obtiene la aplicación $\mathfrak{i}_{\mathcal{T}} : L \to L$ definida por

$$\mathfrak{i}_{\mathcal{T}}(a) = \bigvee \{b \in \mathcal{T} \mid b \leq a\}$$

que evidentemente se constituye en un operador interior.

Question 5.3. *Establezca el concepto de continuidad en espacios topológicos reticulares.*

5.2. La Categoría L-TOP. Dados $(L, \leqslant, \otimes)$ un GL-monoide, X un conjunto no vacío; una *L-topología* (cf. [11] y [20]) sobre X es un subconjunto τ de L^X que satisface:

o1. $1_X, 1_\emptyset \in \tau$,
o2. Si $f, g \in \tau$, entonces $f \otimes g \in \tau$,
o3. Si $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \tau$ entonces $\bigvee_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda \in \tau$.

Si τ es una L-topología sobre X, al par (X, τ) se le denomina *espacio L-topológico*.

Example 5.4. *Sean L y M objetos de la categoría* **CQML** *y $Mor[L, M]$ el conjunto de todos los morfismos de L en M; cada $a \in L$ induce una función:*

$$f_a : Mor[L, M] \to M$$
$$\phi \to \phi(a)$$

es claro que el conjunto $\eta = \{f_a \mid a \in L\}$ es una M-topología sobre $Mor[L, M]$.

El conjunto $\mathbf{L-TOP_X}$ de todas las L-topologías sobre X es parcialmente ordenado, el orden está determinado por la relación de inclusión; además, L^X es la cota superior universal, esto es, la L-topología discreta en este contexto; por otro lado, si se tiene una familia arbitraria de L-topologías sobre X, su intersección es tambien una L-topología, en consecuencia, $(\mathbf{L-TOP_X}, \subseteq)$ es un retículo completo.

Question 5.5. *Decir los elementos que forman la L-topología grosera sobre X.*

Como es natural esperar, se pueden *generar* L-topologías sobre X, en efecto; dado ξ un subconjunto de L^X, de acuerdo a lo anterior, la intersección de todas las L-topologías que contienen a ξ es una L-topología, es la L-topología generada por ξ que se nota con $\langle\xi\rangle$. En esta dirección, si τ es una L-topología y ξ un subconjunto de L^X, se dice ξ es una *subbase* de τ si $\tau = \langle\xi\rangle$.

Sean (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) espacios L-topológicos, se dice la función $\psi : X_1 \to X_2$ es L-contínua si se satisface que

$$\{g \circ \psi \mid g \in \tau_2\} \subseteq \tau_1.$$

Es fácil ver que los espacios L-topológicos y las funciones L-contínuas forman una categoría, se trata de la categoría **L-TOP**. Un ejercicio es probar la siguiente

Proposition 5.6. *Sean (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) espacios L-topológicos, ξ una subbase de τ_2 y la función $\psi : X_1 \to X_2$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *ψ es L-contínua,*
2. *$\{g \circ \psi \mid g \in \xi\} \subseteq \tau_1$.*

5.3. La Categoría L-FTOP. Dados $(L, \leqslant, \otimes)$ un GL-monoide, X un conjunto no vacío; una *topología L-difusa* sobre X es una función $\mathcal{T} : L^X \to L$ que satisface:

o1. $\mathcal{T}(1_X) = \top$,
o2. Para $f, g \in L^X$, $\mathcal{T}(f) \otimes \mathcal{T}(g) \leqslant \mathcal{T}(f \otimes g)$,
o3. Para todo subconjunto $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de L^X se tiene la desigualdad

$$\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{T}(f_\lambda) \leqslant \mathcal{T}(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda).$$

Si $\mathcal{T}$ es una topología L-difusa sobre X, el par $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico L-difuso.

Como el conjunto X es no vacío, L^X consiste en por lo menos dos elementos. En particular, el extremo inferior universal en $(L^X, \leqslant)$ está dado por $1_\emptyset$. Cuando tomamos el subconjunto vacío de L^X y aplicamos el axioma o3, obtenemos

o1'. $\mathcal{T}(1_\emptyset) = \top$.

Lo novedoso de esta perspectiva es que todos elementos de L^X son abiertos en algún grado, la funcón $\mathcal{T}$ expresa el grado en que esos elementos son abiertos.

En el conjunto

$$\textbf{L-FTOP}_X = \{\mathcal{T} : L^X \to L \mid \mathcal{T} \text{ es una topología } L\text{-difusa sobre } X\},$$

se introduce la relación $\preceq$ como sigue:

$$\mathcal{T}_1 \preceq \mathcal{T}_2 \quad \text{sii} \quad \mathcal{T}_1(f) \leqslant \mathcal{T}_2(f) \quad \text{para toda} \quad f \in L^X,$$

observe que $\preceq$ es un orden parcial y en consecuencia $(\mathbf{L\text{-}FTOP}_X, \preceq)$ es un objeto de **Pos**; cuando $\mathcal{T}_1 \preceq \mathcal{T}_2$, se dice que $\mathcal{T}_1$ es *más gruesa* que $\mathcal{T}_2$ o que $\mathcal{T}_2$ es *más fina* que $\mathcal{T}_1$. $(\mathbf{L\text{-}FTOP}_X, \preceq)$ trae más sorpresas:

Proposition 5.7. *$(\boldsymbol{L\text{-}FTOP}_X, \preceq)$ es un retículo completo.*

Demostración. Es evidente que la función $\mathcal{T}_{\text{dis}} : L^X \to L$ definida por

$$\mathcal{T}_{\text{dis}}(f) = \top \quad \text{para todo} \quad f \in L^X$$

es una topología L-difusa y es la cota superior universal (el máximo) de $\mathbf{L\text{-}FTOP}_X$ con respecto al orden $\preceq$; para concluir la prueba, es suficiente mostrar que existe el extremo inferior en $\mathbf{L\text{-}FTOP}_X$ de una familia $\{\mathcal{T}_i\}_{i\in I}$ de topologías L-difusas sobre X; en esta dirección, la función $\widehat{\mathcal{T}} : L^X \to L$ definida por

$$\widehat{\mathcal{T}} := \bigwedge_{i\in I} \mathcal{T}_i(f) \quad \text{para toda} \quad f \in L^X$$

es una topología L-difusa sobre X y es el extremo inferior de la familia $\{\mathcal{T}_i\}_{i\in I}$. ■

La prueba de la proposición anterior presenta un procedimiento para obtener una topología L-difusa sobre X a partir de una función $\mathcal{S} : L^X \to L$ cualquiera: Se considera el conjunto

$$\mathfrak{Z}_{\mathcal{S}} := \{\mathcal{T} \in \mathbf{L\text{-}FTOP}_X \mid \mathcal{S}(f) \preceq \mathcal{T}(f) \quad \text{para toda} \quad f \in L^X\},$$

desde luego, el extremo inferior $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ de este conjunto con respecto a $\preceq$ es un elemento de $\mathfrak{Z}_{\mathcal{S}}$ y es la topología L-difusa sobre X menos fina que satisface $\mathcal{S}(f) \preceq \mathcal{T}(f)$ para toda $f \in L^X$.

Definición 5.8. *Una función $\mathcal{S} : L^X \to L$ es una subbase de la topología L-difusa $\mathcal{T}$ si y solo si $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{S}}$.*

Dados (X, τ) y (Y, η) espacios topológicos L-difusos; $\phi : X \to Y$ es *LF-contínua* sii para toda $g \in L^Y$, ϕ satisface

$$\eta(g) \leqslant \tau(g \circ \phi).$$

Se relacionan los conceptos de subbase y continuidad como sigue:

Proposition 5.9. *Sean (X, τ) y (Y, η) espacios topológicos L-difusos, $\phi : X \to Y$ y $\mathcal{S} : L^Y \to L$ una subbase para η; las siguientes proposiciones son equivalentes:*

i. *ϕ es LF-continua,*
ii. *$\mathcal{S}(g) \leq \tau(g \circ \phi)$ para toda $g \in L^Y$.*

Demostración. Es evidente que $i. \Rightarrow ii.$ Ahora para ver $ii. \Rightarrow i.$ se considera la topología L-difusa $\hat{\tau}$ en Y definida por:

$$\hat{\tau}(g) = \tau(g \circ \phi), \qquad \text{para toda} \quad g \in L^Y.$$

Es evidente que $\hat{\tau}$ es la toplogía L-difusa más fina que hace a ϕ LF-continua, por tanto,

$$\mathcal{S}(g) \leq \hat{\tau}(g) \qquad \text{para toda} \quad g \in L^Y,$$

como $\mathcal{S}$ es una subbase de η, la proposición *i.* se sigue. ■

La categoría $\mathbf{L-FTOP}$ incluye la siguiente información: Los objetos son los espacios topológicos L-difusos y los morfismos son las funciones LF-continuas; la composición corresponde a la composición usual de funciones y la identidad de (X,τ) es la función idéntica id_X de X.

Proposition 5.10. *Sea* $\mathcal{O} : \mathbf{L-FTOP} \to \mathbf{SET}$ *el functor de olvido; entonces* $\mathbf{L-FTOP}$ *es una categoría topológica sobre* $\mathbf{SET}$ *con respecto a* $\mathcal{O}$.

Demostración. De la prueba de la proposición 5.9, toda función

$$\psi : \mathcal{O}(X,\tau) \to Y$$

tiene un único levantamiento final $\psi : (X,\tau) \to (Y,\eta)$ i. e. se resuelve el problema de la topología final; además, de la proposición 5.7 $(\mathbf{L-FTOP}, \mathcal{O})$ es completo por fibras, en consecuencia, de acuerdo con la sección 2.2 y [2] es suficiente con ver que para todo espacio topológico L-difuso (Y,η) una función $\psi : X \to Y$ tiene un único levantamiento inicial $\psi : (X,\tau) \to (Y,\eta)$; esto es, se resuelve el problema inicial. Sea $\mathcal{R} : L^X \to L$ definida por

$$\mathcal{R}(h) = \begin{cases} \bigvee \eta(g), & \text{si} \quad h = \psi \circ g \quad \text{para algún} \quad g \in L^Y, \\ \top, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y se considera la topología L-difusa τ en X generada por $\mathcal{R}$ (es decir, τ es la topología menos fina que satisface $\mathcal{R} \preceq \tau$), en consecuencia ψ es LF-continua con respecto a τ y η. Para ver que se resuelve efectivamente el problema inicial, se supone ahora que hay una función $\rho : (Z,\zeta) \to (Y,\eta)$ LF-continua y una función $\theta : Z \to X$ tal que $\rho = \psi \circ \theta$. De la definición de $\mathcal{R}$ y de la LF-continuidad de ψ se obtiene que

$$\mathcal{R}(h) \leq \rho(h \circ \theta), \quad \text{para toda} \quad h \in L^X.$$

Como $\mathcal{R}$ es una subbase para τ, por la proposición 5.9 se obtiene que θ es LF-continua con respecto a ζ y τ, por tanto ψ es un morfismo inicial. de la antisimetría del orden $\preceq$ se obtiene la unicidad de este morfismo inicial. ■

6. La Categoría $\mathbf{L-FIL}$

Dados $(L, \leqslant, \otimes)$ un GL-monoide, X un conjunto no vacío; una función $F : L^X \to L$ es un L-*filtro* en X sii F satisface las siguientes propiedades:

F0. $F(1_X) = \top$,
F1. Si $f \leqslant g$, entonces $F(f) \leqslant F(g)$,
F2. Para $f, g \in L^X$, $F(f) \otimes F(g) \leqslant F(f \otimes g)$,
F3. $F(1_\emptyset) = \bot$.

El par (X,F) recibe el conjunto L-*filtrado*. De las propiedades [cf. [16]] de los L-filtros se resaltan las siguientes,

Proposition 6.1. *Si* $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *es una colección de* L*-filtros en un conjunto fijo* X*, entonces la función* $F = \bigwedge_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda : L^X \to L$ *definido por* $F(g) = \bigwedge_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda(g)$ *es un* L*-filtro en* X*.*

En otras palabras, tenemos que la colección $\mathbf{L-FIL}_X$, de todos los L-filtros sobre un conjunto fijo X, es cerrado bajo la formación de extremos inferiores arbitrarios.

Ahora, de un L-filtro $F : L^X \to L$ y de una función $\phi : X \to Y$, obtenemos un L-filtro en Y y una topología L-difusa sobre X como sigue:

Proposition 6.2 (cf. [16])**.** *Si* $F : L^X \to L$ *es un* L*-filtro y* $\phi \in Y^X$*, entonces*

1. $G : L^Y \to L$ *definido por* $G(g) = F(g \circ \phi)$ *para toda* $g \in L^Y$*, es un* L*-filtro.*
2. *Cada conjunto* L*-filtrado* (X, F) *produce un espacio topológico* L*-difuso* $(X, \mathcal{T}_F)$*.*

Demostración. 1. G satisface F0 ya que $G(1_Y) = F(1_Y \circ \phi) = \top$, además si $g_1 \leqslant g_2$ en L^Y entonces

$$g_1 \circ \phi \leqslant g_2 \circ \phi \Rightarrow F(g_1 \circ \phi) \leqslant F(g_2 \circ \phi) \Leftrightarrow G(g_1) \leqslant G(g_2)$$

i. e. G satisface F1; con respecto a F2 y F3, sean g_1, g_2 en L^Y, entonces

$$\begin{aligned} G(g_1) \otimes G(g_2) &= F(g_1 \circ \phi) \otimes F(g_2 \circ \phi) \\ &\leqslant F((g_1 \circ \phi) \otimes (g_2 \circ \phi)) \\ &= F((g_1 \otimes g_2) \circ \phi) \\ &= G(g_1 \otimes g_2), \end{aligned}$$

además,

$$G(1_\emptyset) = F(1_\emptyset \circ \phi) = F(1_\emptyset) = \bot.$$

2. Si comparamos las condiciones para L-filtros y LF-topologías, vemos que F1 implica o3: Sea $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ un subconjunto de L^X, entonces $f_\lambda \leqslant \bigvee_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$; por F1 se tiene que $F(f_\lambda) \leqslant F(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda)$ para todo $\lambda \in \Lambda$, así

$$\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} F(f_\lambda) \leqslant F(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda).$$

Además, si cambiamos F3 por o1', obtenemos la LF-topología $\mathcal{T}_F$ definida por

$$\mathcal{T}_F(g) = \begin{cases} F(g), & \text{if } g \neq 1_\emptyset, \\ \top, & \text{if } g = 1_\emptyset. \end{cases} \qquad \blacksquare$$

Un *morfismo* $f : (X, F) \to (Y, G)$ entre los conjuntos L-filtrados (X, F) y (Y, G) es una función $f : X \to Y$ tal que para toda $\beta \in L^Y$,

$$G(\beta) \leqslant F(\beta \circ f).$$

En esta dirección, obtenemos la categoría $\mathbf{L-FIL}$ donde los objetos son los conjuntos L-filtrados (X, F) y los morfismos son los exhibidos anteriormente.

Así, si tenemos un conjunto L-filtrado (X, F), obtenemos el espacio LF-topológico $(X, \mathcal{T}_F)$; además, si ϕ es un morfismo entre (X, F) y (Y, G) en $\mathbf{L-FIL}$, la *misma función* ϕ es también un morfismo en $\mathbf{L-FTOP}$. De paso, también se observa que $\phi \neq \psi$ son morfismos en $\mathbf{L-FIL}$ entonces $\phi_* \neq \psi_*$. En otras palabras [cf. [16]],

Proposition 6.3. *La función* $\mathcal{T} : \mathbf{L-FIL} \to \mathbf{L-FTOP}$ *que asigna a cada objeto* (X, F) *de* $\mathbf{L-FIL}$ *el objeto* $(X, \mathcal{T}_F)$ *de* $\mathbf{L-FTOP}$*, y a cada morfismo* ϕ *en* $\mathbf{L-FIL}$ *el morfismo* ϕ_* *en* $\mathbf{L-FTOP}$ *es un functor fiel entre la categoría* $\mathbf{L-FIL}$ *de los conjuntos* L*-filtrados, y la categoría* $\mathbf{L-FTOP}$ *de los espacios* L*-Ftopológicos.*

De la caracterización de la fidelidad dada en [2] tenemos que todo epimorfismo $\phi : (X, F) \to (\hat{X}, \hat{F})$ en $\mathbf{L-FIL}$, considerado como una flecha $\mathcal{T}$-estructurada $(\mathcal{T}(\phi), (\hat{X}, \hat{F}))$ es generating. Sin embargo, el functor $\mathcal{T}$ no tiene adjunto. Para ver esto, consideramos el conjunto $X = \{a, b\}$ y el objeto $\mathbf{2} = (\{0, 1\}, \leqslant, \wedge, \vee)$ de la categoría $\mathbf{CQML}$. Los objetos de la fibra sobre X en $\mathbf{2-FIL}$ son (X, F_j) donde, para las funciones características χ_A,

1. $F_1 : \mathbf{2}^X \to \mathbf{2}$, definida como $F_1(\chi_A) = 1$ para $A = X$ y $F_1(\chi_B) = 0$ para $B \in \mathbf{2}^X$, $B \neq X$,
2. $F_2 : \mathbf{2}^X \to \mathbf{2}$, definida como $F_2(\chi_A) = 1$ para $A = X$ o $A = \{a\}$, y $F_2(\chi_B) = 0$ para $B = \{b\}$ o $B = \emptyset$,
3. $F_3 : \mathbf{2}^X \to \mathbf{2}$, definida como $F_3(\chi_A) = 1$ para $A = X$ o $A = \{b\}$, y $F_3(\chi_B) = 0$ para $B = \{a\}$ o $B = \emptyset$.

Los objetos de la fibra sobre X en $\mathbf{2F-TOP}$ son (X, τ_{F_i}), donde τ_i, $i = 1, 2, 3$, son las LF-topologías asociadas a cada uno de los L-filtros anteriores, y $\tau_4 : \mathbf{2}^X \to \mathbf{2}$, definido por $\tau_4(\chi_A) = 1$ para todo $A \in \mathbf{2}^X$.

Si existiera un functor adjunto $\mathcal{F}$ para $\mathcal{T}$, se tendría la siguiente propiedad para L-filtros y LF-topologías:

$$\mathcal{F}(\tau) \leqslant F \Leftrightarrow \tau \leqslant \mathcal{T}(F)$$

y, en consecuencia:

$$\mathcal{F}(\tau) = \bigwedge\{F \in FIL_X \mid \tau \leqslant \mathcal{T}(F)\};$$

pero en nuestro caso, tenemos que

$$\mathcal{F}(\tau_4) = \bigwedge\{F \in FIL_X \mid \tau_4 \leqslant \mathcal{T}(F)\} = \bigwedge \emptyset,$$

i. e. $\mathcal{F}(\tau_4)$ no existe. Sin embargo, $\mathcal{T}$ conmuta con extremos inferiores arbitrarios i. e. si $\{(X, F_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia de conjuntos L-filtrados en

X y $\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}(X, F_\lambda) = (X, \bigwedge_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda) = (X, F)$ entonces

$$\mathcal{T}(\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}(X, F_\lambda)) = \mathcal{T}(X, F) = (X, \mathcal{T}_F).$$

Dado un conjunto unitario $Y = \{p\}$ (cf. [16]), vemos que hay un isomorfismo entre L^Y y L, donde, en particular, 1_Y y $\top$ están identificados. En este contexto podemos definir el L-filtro $\mathbb{F} : L^Y \approx L \to L$ como sigue:

$$\mathbb{F}(g) = \begin{cases} \perp, & \text{si } g \neq 1_Y, \\ \top, & \text{si } g = 1_Y. \end{cases}$$

Además,

Proposition 6.4. *El conjunto L-filtrado $(Y, \mathbb{F})$ es un objeto terminal en* $\mathbf{L-FIL}$.

Demostración. Sea (X, F) un conjunto L-filtrado, existe una única función $\phi : X \to Y$; veamos que ϕ produce un morfismo en $\mathbf{L-FIL}$. Para $g \in L^Y$ tenemos que $g = 1_Y$ o $g \neq 1_Y$; si $g \neq 1_Y$ entonces

$$\mathbb{F}(g) = \perp \leqslant F(g \circ \phi),$$

si $g = 1_Y$ entonces $\mathbb{F}(g) = \top$, por otro lado, $g \circ \phi = 1_X$, luego

$$\top = \mathbb{F}(g) \leqslant F(g \circ \phi) = F(1_X) = \top$$

y la conclusión se sigue. ■

Es fácil ver que $(Y, \mathcal{T}_{\mathbb{F}})$ es un objeto terminal en $\mathbf{L-FTOP}$ por tanto, el functor $\mathcal{T}$ preserva objetos terminales.

Referencias

[1] Jiri Adamek, *Theory of Mathematical Structures*, Reidel Publishing Company, Prague, 1983.

[2] Jiri Adamek, Horst Herrlich, George Strecker, *Abstract and Concrete Categories*, John Wiley & Sons, New York, 1990.

[3] Michael Arbib, Ernest G. Manes, *Arrows, Structures and Functors*, Academic Press, San Diego, 1975.

[4] M. Behzad, G. Chartrand and L. Lesniak-Foster, *Graphs & Digraphs*, Wadsworth International Group, California, 1981.

[5] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, American Mathematical Society, Providence, 1940.

[6] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique, Théorie des Ensembles*, Livre 1, Hermann, Paris, 1960.

[7] Keit Devlin, *The Joy of Sets*, Springer Verlag, New York, 1993.

[8] X. Caicedo, *Elementos de Lógica y Calculabilidad*, Una Empresa Docente - Universidad de los Andes, Bogotá, 1990

[9] S. Gottwald, *Many-valued logic* In: Mathematics of Fuzzy Sets: Logic, Topology and Measure Theory, Kluwer Academic Publisher, Boston, 1999.

[10] T. Thomas W. Hungerford, *Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1974.

[11] Ulrich Höhle and Alexander P. Šostak, *Fixed-Basis Fuzzy Topologies*, In: Mathematics of Fuzzy Sets: Logic, Topology and Measure Theory, Kluwer Academic Publisher, Massachusetts, 1999.

[12] U. Höhle, *Commutative, residuated l-monoids* In: Non-Classical Logics and Their Applications to Fuzzy Subsets, Kluwer Academic Publisher, Boston, 1995.

[13] P. T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[14] George Klir, Bo Yuan, *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, Theory and Applications*, Prentice Hall, New Jersey, 1995.

[15] J. Luna y Otros, *Estructuras reticulares en la Aritmética*, XIII Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, Bogotá, 1996.

[16] Joaquin Luna-Torres and Carlos Ochoa-Castillo, *L-filters and LF-topologies*, Fuzzy Sets ans Systems, 140 (2003).

[17] W. Lawvere and S. Schanuel, *Conceptual Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[18] Colin McLarty, *Elementary Categories, Elementary Toposes*, Clarendon Press, Oxford, 1995.

[19] S. Mac Lane, I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic*, Springer-Verlag, New York, 1992.

[20] Liu Ying-Ming and Luo Mao-Kang, *Fuzzy Topology*, World Scientific, Singapore, 1997.

[21] Roger Penrose, *El Camino a la Realidad*, Random House Mondadori, México, 2007.

[22] S. E. Rodabaugh, *Powerset Operator Foundations For Poslat Fuzzy Set Theories and Topologies*, In: Mathematics of Fuzzy Sets: Logic, Topology and Measure Theory, Kluwer Academic Publisher, Boston, 1999.

[23] A P. Šostak, *Fuzzy functions and an extension of the category L-Top of Chang-Goguen L-topological spaces*, Proceedings of the Ninth Prague Topological Symposium, Prague, Czech Republic, 2001.

[24] G. Simmons, *Topology and Modern Analysis*, McGraw-Hill, Singapore, 1963.

[25] René Thom, *Parabolas y Catástrofes*, Tusquets, Barcelona, 1993.

Proyecto Curricular de Matemáticas - Facultad de Ciencias y Educación - Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá Colombia.

E-mail address: oochoac@udistrital.edu.co; camicy@etb.net.co

Volver al índice de Cursos

Fin de esta sección

Ir al Menú

XXIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística

Sede:
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Mesas de Trabajo

Índice de Mesas de Trabajo

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
Educadora de educadores

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Menú inicio

Índice Mesas de Trabajo

Menú inicio

Mesa Redonda:

Desafíos en la formación matemática

Olga Lucía León C.,[1]
olleon@udistrital.edu.co
Profesora Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Resumen. La mesa "Desafíos en la formación matemática" pone sobre el tapete la necesidad de reflexionar sobre ¿qué matemáticas enseñar, y cómo enseñarla, en cada uno de los niveles de formación de nuestros niños y jóvenes? y cómo debemos prepararnos los profesores, tanto de las *licenciaturas* como de las *carreras profesionales,* para fortalecer el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en nuestro país. La reflexión proviene de cuatro contextos vinculados a la experiencia científica, formativa y profesional de las matemáticas, e identifica factores que hacen necesaria una acción que vincule en primera instancia, la experiencia de la Sociedad Colombiana de Matemáticas, de la Asociación Colombiana de Matemática Educativa y de las Universidades formadoras de profesores y de matemáticos, y que se oriente a generar estrategias que fomenten elementos de nuestra cultura matemática asegurando no sólo una matemática para todos, sino también equipos de profesores y profesionales vinculados a la matemática y su educación. Debemos asumir conjuntamente el reto de evaluar nuestros programas curriculares, nuestra forma de ser como educadores matemáticos y de proponer al Ministerio de Educación los ajustes necesarios para que la enseñanza de las matemáticas esté de acuerdo con los avances de las ciencias, de la cultura y de los retos que nos impone el siglo XXI.

Palabras clave: Cultura matemática, formación matemática, experiencia matemática, Sociedades, Asociaciones y Universidades.

---

[1] Coordinadora y moderadora de esta Mesa Redonda, en la cual participan los profesores: *Carlos H. Montenegro E.*, Presidente Sociedad Colombiana de Matemáticas; *Gloria García O.,* Presidenta Asociación Colombiana de Matemática Educativa y *Clara Helena Sánchez,* Profesora Universidad Nacional de Colombia.

1. INTRODUCCIÓN

La reflexión que instala la mesa reconoce un contexto internacional que desde la Declaración Final de la Conferencia Mundial de Educación 2009, identifica entre los 40 aspectos de la "Responsabilidad Social de la Educación Superior" vinculados a recomendaciones de: acceso, calidad, equidad, internacionalización, globalización, regionalización, aprendizaje, investigación e innovación; las recomendaciones 11 y 17:

- 11: Nuestra habilidad para alcanzar los objetivos de la educación para todos está dependiente de nuestra habilidad para dirigirnos al problema mundial de la escasez de profesores. La educación superior debe ampliar la formación de docentes, tanto inicial como en el empleo, con planes y programas de estudios que den a los docentes capacidad de dotar a sus alumnos de los conocimientos y competencias necesitan en el siglo XXI
- 17: Mayor énfasis en las área de ciencias y tecnología, ingeniería y matemática como también en ciencias sociales y ciencias humanas es vital para nuestras sociedades

Son recomendaciones que recogen la situación particular en lo que concierne a las matemáticas y su educación en Colombia y hacen prioritario atender el "Llamado a la Acción" presente en la misma declaración, del que resaltamos como uno de lo dinamizadores para la acción de los miembros de esta mesa los literales d, f, g y j:

- d) ampliar la formación de docentes, tanto inicial como en el empleo, con programas que les capaciten para hacer de sus estudiantes ciudadanos responsables;
- f) Garantizar la igualdad de acceso de grupos que no están representados ahora como trabajadores: los pobres, las minorías, los discapacitados, migrantes, refugiados y otros sectores vulnerables de la población.
- g) Desarrollara mecanismos para contrarrestar el impacto negativo de la fuga de cerebros mientras se incrementa la movilidad académica de los funcionarios y estudiantes.
- j) Perseguir objetivos de equidad, calidad y éxitos desarrollando caminos de entradas más flexibles para asegurar un mejor reconocimiento de un aprendizaje previo y la experiencia de trabajo

Los anteriores elementos indican no sólo los desafíos reconocidos globalmente cuando se piensa una educación para todos, sino también identifican acciones que por su magnitud exigen esfuerzos conjuntos de diferentes entidades preocupadas o caracterizadas por su función social de apoyar el desarrollo de la educación en el país

Tanto la Sociedad Colombiana de Matemáticas, como la Asociación Colombiana de Matemáticas Educativas, en su carácter de entidades no gubernamentales, comparten entre sus propósitos el mejorar la enseñanza de las matemáticas y durante más de 10 años de existencia cada una ha acumulado una experiencia sobre las necesidades de la formación matemática de nuestros ciudadanos, evidencias de los grandes problemas vinculados a la educación y al desarrollo de lo que llamamos una cultura matemática en nuestro país,.

De otra parte, desde la trayectoria desarrollada en la Universidad Nacional en su programa de formación de matemáticos y desde la reciente experiencia de las universidades Pedagógica Nacional, Distrital Francisco José de Caldas y la Universidad del Valle en su programa de doctorado interinstitucional en educación y en particular en su énfasis de Educación matemática, se destacan otro tipo de evidencias vinculadas a problemáticas de formación profesional y de investigación. Problemáticas que se vinculan a la redefinición de la Universidad como el espacio privilegiado para la reflexión y como dispositivo de acción transformadora de contextos sociales.

La mesa además de presentar las reflexiones que surgen de cada uno de los cuatro espacios mencionados con respecto al desafío de consolidar en el día a día de la historia del país, una forma de ser que desde la experiencia matemática se integre a la forma de ser: niño, joven, adulto y anciano en nuestra sociedad.

2. LA NECESIDAD DE UNA CULTURA MATEMÁTICA EN TODOS Y CON TODOS.

Cuando se considera que las matemáticas son transculturales y que sus desarrollos son válidos en todas partes por la misma naturaleza abstracta de las matemáticas, también se generan procesos interpretativos de los resultados provenientes de las matemáticas, y su desarrollo en las micro culturas sociales. Esa relación entre lo considerado culturalmente neutro y lo considerado culturalmente autónomo tiene entre otros efectos el originar retos a los sistemas educativos y a las organizaciones sociales vinculadas al desarrollo integral de los ciudadanos de un país. Los retos nacionales comparten el desafío internacional de estructurar una cultura matemática con todos, rescatando la idea de que todas las culturas se involucran en las actividades matemáticas y lo que se denomina cultura matemática es el consolidado de todos los aportes que provienen de diferentes fuentes culturales.

El reto de reconocer que todos aportan y que con todos se construye una cultura matemática, se analiza en la mesa desde las necesidades identificadas en cada espacio de experiencia de los invitados. Se propone responder a la pregunta esencial vinculada al desafío de una cultura matemática en todos y con todos: ¿Cuáles son las exigencias para desarrollar tal tipo de cultura matemática desde nuestro contexto local?

3. LOS DESAFÍOS PARA LAS ENTIDADES GUBERNAMENTALES Y NO GUBERNAMENTALES PREOCUPADAS POR DESARROLLAR UNA CULTURA MATEMÁTICA EN TODOS Y CON TODOS.

Las tradiciones administrativas y las exigencias sociales configuran formas de ser y de actuar de las instituciones educativas y de las organizaciones sociales vinculadas a la difusión y fortalecimiento de conocimientos y prácticas científicas y sociales. Los tipos de entidades convocados en esta mesa comparten en su naturaleza, el ser espacios de acción y reflexión, vinculados a la formación matemática y al desarrollo de la matemática en el país, se comparte además la responsabilidad social de identificar el impacto social de nuestras instituciones y sus acciones en la formación matemática de los ciudadanos y en el desarrollo social y científico del país

El reto de responder al momento histórico nacional, y de vincularse a los desarrollos que este llamado exige, plantea el desafío de consolidar desde acciones institucionales una forma de estar en el país, una forma de actuar y cooperar interinstitucionalmente para responder al llamado de unas matemáticas en todos y con todos. Este desafío será analizado desde las condiciones de realización de las entidades representadas en la reflexión.

4. HACIA UNA ESTRATEGIA CONJUNTA

Como efecto de la reflexión instalada por la interacción de los participantes de la mesa sobre cada uno de los puntos anteriores. Se pretende, como un resultado de la mesa, la formulación de una acción conjunta que desarrolle una estrategia que plantee el desafío de actuar en forma cooperativa y de manera interinstitucional con el fin de buscar una educación matemática con todos.

Referencias

Asociación Colombiana De Matemática Educativa. http://www.asocolme.com

Departamento De Matemáticas Universidad Nacional. http://www.matematicas.unal.edu.co/

Doctorado Interinstitucional en Educación. http://die.udistrital.edu.co/

Sociedad Colombiana de Matemáticas. http://www.scm.org.co/

Unesco (2009). Conferencia Mundial sobre la Educación Superior 2009. http://www.unesco.org/education/WCHE2009/comunicado_es.pdf. Recuperado 08/03/11

Volver al índice Mesas de Trabajo

Mesa Temática 1:

Transición de la Educación básica y media a la Educación superior en Matemáticas

Dificultades epistemológicas, cognitivas, sociológicas, culturales y didácticas

Eliécer Aldana Bermúdez
eliécerab@uniquindio.edu.co
Universidad del Quindío

Resumen. Para muchos de los estudiantes que cursan matemáticas en su carrera universitaria, la transición de la educación básica y la media a una educación superior les genera dificultad en el aprendizaje de esta disciplina. La finalidad de este escrito es identificar las dificultades relevantes en esta etapa de transición, plantear las posibles causas y determinar algunas acciones que puedan ayudar a mejorar la situación.

1. INTRODUCCIÓN

La transición de la educación básica y media a la educación superior es diferente en cada país (e incluso dentro del mismo hay diferencias entre las instituciones educativas), a pesar de que se tengan establecidos los estándares en matemáticas en la educación básica y media, como es el caso en nuestro propio contexto. Pero independiente del contexto, esta transición supone muchas más dificultades para los estudiantes que cursan matemáticas en diferentes carreras.

El problema de la transición de la educación básica y media a la superior ha sido considerado, por ejemplo, en el volumen de la UNESCO *"New trends in mathematics teaching"*, en el que se plantean este tipo de dificultades, Guzmán De et al. (1998). Asimismo este tópico ha sido discutido en algunos escenarios como en los congresos 4 y 6 del ICME; pero, a pesar de todo esto, la transición de la educación básica y media a la educación superior en matemáticas, sigue siendo un problema para muchos de los estudiantes que ingresan por primera vez a una carrera universitaria

La experiencia como estudiante y como docente en estos niveles de la escolaridad me han permitido recoger algunas evidencias que ponen de manifiesto las dificultades que implica la transición de un nivel a otro. En primer lugar, aquel que puede ser en parte el origen de las dificultades encontradas en las matemáticas de la universidad: Dificultades ligadas con la manera de cómo presentan los profesores las matemáticas en el nivel universitario y cómo organizan los contenidos de la signatura; dificultades provenientes de cambios en la forma de pensar acerca de las matemáticas en niveles superiores; y dificultades surgidas por la falta de instrumentos apropiados para aprender matemáticas.

Aunque las dificultades en esa transición de la educación básica y media a la educación superior en matemáticas (Guzmán De et al., 1998) se presentan en la mayoría de los estudiantes universitarios, tanto de los que son especializados en matemáticas como de los que cursan otras carreras, estas dificultades se agudizan más en aquellos que cursan otras carreras universitarias, donde el eje vertebral no son las matemáticas.

En segundo lugar, desde el punto de vista de los estudiantes, estos son algunos de los comentarios que ellos ponen en evidencia cuando se les pregunta sobre la transición de un nivel a otro en matemáticas y las dificultades que implica este proceso: “No estamos acostumbrados a este tipo de exámenes y al desarrollo abstracto; hacen falta conceptos previos básicos en la construcción del nuevo concepto; no está claro lo que se espera de nosotros en relación con lo que se ve en la clase; no se nos indica qué es lo esencial de los temas y qué es lo secundario; los profesores son muy abstractos, no se muestran ejemplos más concretos; el tiempo de clase no es suficiente para aprender todos los contenidos, por lo que tenemos que estudiar mucho por nuestra propia cuenta; algunos profesores universitarios no se preocupan por lo que entendemos o no; la mayoría de los profesores no entienden que no comprendemos todo; es difícil para un profesor hacernos entender algo que para él es evidente; el paso del colegio a la universidad no es duro, lo que es difícil es el cambio de metodologías en los profesores; y algunos profesores son excelentes matemáticos, pero no tienen herramientas didácticas que les permita hacerse entender”.

Como puede notarse, los comentarios que ponen de manifiesto los estudiantes tienen que ver con el mismo estudiante, el docente, y el método.

2. DIFICULTADES EPISTEMOLÓGICAS Y COGNITIVAS

Existe un salto conceptual en relación con los contenidos matemáticos enseñados cuando se llega a la universidad. Las matemáticas aquí se hacen diferentes por el aumento y la profundización en los conocimientos; en ambos casos están relacionadas con las habilidades y técnicas necesarias para manipular nuevos objetos, es decir, para pasar de proceso a objeto matemático, conocida como la teoría de la reificación de Sfard (1991, 1992). Esta transición tiene que ver con el paso de un pensamiento matemático elemental a un tipo de pensamiento matemático avanzado; en el primero “los conceptos matemáticos se describen, mientras que en el segundo los conceptos matemáticos se definen” (Azcárate y Camacho, 2003: 141). Por tanto, el estudiante experimenta unas dificultades sustanciales cuando pasa a la universidad, porque los conceptos dejan de ser nociones matemáticas tratadas como procesos dinámicos, acciones, algoritmos, a una concepción en la cual los conceptos matemáticos son vistos como objetos abstractos estáticos Sfard (1991).

3. DIFICULTADES SOCIALES Y CULTURALES

Este tipo de dificultades son vistas especialmente desde el punto de vista institucional, al respecto Bosch, Fonseca y Gascon (2004), citados por D`Amore y Godino (2007), afirman que el problema del paso de la secundaria a la universidad puede ser explicado a partir del análisis de prácticas matemáticas que se llevan a cabo en las instituciones. De otra parte, el tamaño de los grupos en la universidad puede ser muy grande, generalmente en el primer año; para muchos estudiantes, este es un cambio con respecto al colegio: mientras que algunos se integran fácilmente, otros no lo logran. Asimismo, las relaciones con el profesor son más distantes y en algunos casos, éste dispone de poco tiempo para atender a los estudiantes. Además, en otras ocasiones, se presenta la competencia cultural del tener que sacar la mejor nota, y en esta atmósfera competitiva, la atención de los estudiantes se concentra en aprobar los exámenes y no en aprender. Algunos estudiantes que han logrado tener acceso a la universidad necesitan de una relación más personalizada con su profesor, pero la estructura de la universidad hace casi imposible este contacto. Otra dificultad es la que presentan los estudiantes que tienen matemáticas como asignatura optativa, en cuyo caso se desestima el rol de las matemáticas con respecto a su carrera futura, a tal punto que muchos de ellos esperaban no tener que estudiar matemáticas.

4. DIFICULTADES DIDÁCTICAS

En este apartado nos preguntamos ¿cuál es el punto en la enseñanza de los profesores en el nivel universitario, que es la causa de las dificultades experimentadas por los estudiantes? Está claro que algunas de estas dificultades proceden de la forma que han tenido los estudiantes de practicar y de aprender matemáticas en la educación básica y media.

Al respecto, estas son algunas consideraciones que involucran a los profesores : Falta de habilidades didácticas "*conozco la asignatura y eso es suficiente*"; falta de modelos adecuados e innovaciones en la enseñanza: la clase sigue siendo del estilo el profesor habla y el estudiante toma nota; algunos profesores no han repensado cómo las herramientas informáticas pueden ser utilizadas en el desarrollo de varios tópicos en matemáticas; la ausencia de metodologías apropiadas a cada asignatura; poca atención a las diferencias individuales; falta de retroalimentación para constatar lo que el estudiante ha aprendido de lo que el maestro enseñó, y falta de herramientas para la evaluación, puesto que un componente crucial del proceso de aprendizaje de las matemáticas es recurrir a la forma adecuada de evaluar el trabajo de los estudiantes, diseñado para su beneficio y evaluación.

En este sentido hay quienes afirman que el fracaso escolar en el estudio de las matemáticas en los primeros cursos de universidad radica en las "*contradicciones* y *discontinuidades*- o cambios bruscos- entre los contratos didácticos institucionales vigentes en las instituciones universidad y secundaria" (D`Amore y Godino, 2007: 202-205).

5. POSIBLES ACCIONES PARA SUPERAR ESTAS DIFICULTADES

Algunas de las acciones que se presentan a continuación tienen que ver con aspectos institucionales que rodean la transición, mientras que otras son de carácter pedagógico, de acuerdo por lo planteado por Guzmán De et al. (1998):

Establecer un mayor diálogo entre profesores de educación media y superior; proporcionar a los estudiantes actividades orientativas; por ejemplo, elegir el camino apropiado en la perspectiva de una carrera universitaria; proporcionar a los estudiantes ayuda individualizada, creando por ejemplo un "centro de ayuda al estudiante en matemáticas"; publicar información de experiencias pedagógicas de otras instituciones que hayan sido significativas; cambiar el contexto de la transición; por ejemplo, tener un nivel de profundización mayor en los cursos de la educación media, para así llegar a la universidad con un nivel más cercano al estilo de enseñanza; crear un contexto propicio para el desarrollo de la facultad, porque las universidades tiene la responsabilidad de proporcionar a sus miembros un contexto que fomente el desarrollo pedagógico; orientar a los estudiantes para que utilicen los recursos, ya que toda la información no puede venir del profesor en la clase y deben estar preparados para buscar las fuentes de consulta; cambiar la cultura de los profesores y de los estudiantes de cómo se enseñan y cómo se aprenden las matemáticas; por ejemplo que los profesores utilicen diferentes técnicas de enseñanza que ayuden a los estudiantes a desarrollar formas de aprendizaje, y que los estudiantes interioricen que las matemáticas son importantes, porque muchas de las conexiones entre las ciencias y las matemáticas incluyen conceptos que se comprenden desde las matemáticas; establecer un mejor diálogo entre matemáticos y usuarios de las matemáticas; crear acciones meta cognitivas; por ejemplo, un estudiante puede auto diagnosticar sus dificultades, preguntar a sus tutores, optimizar sus recursos personales, organizar su conocimiento y aprender a usarlo; y disminuir la cantidad de contenido y captar a los estudiantes en un conocimiento más profundo y adecuado.

Estas acciones tienden a establecer una conexión entre la educación básica y media a una educación superior sin abandonar los conceptos fundamentales, el rigor científico y el nivel de profundización en cada uno de ellos.

REFERENCIAS

Azcárate, C. y Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10*, 2, 135-149.

D`Amore, B., y Godino, J. D. (2007). El Enfoque Ontosemiótico como un Desarrollo de la Teoría Antropológica en Didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamérica de Investigación en Matemática Educativa*, *10*, 2, 191-218.

Guzmán, M, De; Hodgson, B. R; Robert, A, y Villani, V. (1998). Difficulties in the
Passage from Secundary to Tertiary Education. En: Fischer, G, y Rehmann, (Eds.). *Proceedingsof the International Congress of Matemathicians*: Berlin. Documenta Matemática. Extra volumen ICM, III, 747-762.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflexions on Processes and Objects as Different sides of the same coin*, Educational Studies in Mathematics, 22,* 1 – 36.

Sfard, A. (1992). Operational origins of Mathematical Objects and the Quandary of Reification – the case of Function. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds.) *El concept of function: Aspects of Epistemology* (pp. 59–84). Washinton DC: Mathematical Association of America.

¿Articulación o Desarticulación?

Gloria Inés Neira Sanabria
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Resumen. En esta ponencia se describirá grosso modo la disposición curricular de las matemáticas en el colegio, para contrastarla con la formación matemática básica que se presenta en primeros semestres de universidad de la mayoría de carreras universitarias, centrándonos en algunos ejemplos específicos del hacer, del pensar, propios de la educación superior.
Se espera que lo aquí presentado, contribuya de alguna manera, a mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje escolar de las matemáticas y, en particular, facilite el paso de la Secundaria a la Universidad, o por lo menos se aprecie la importancia de esta temática, se promueva la discusión que concierne a todos los actores que intervienen en el sistema educativo, y en particular a las facultades de educación y a las instancias decisorias de políticas educativas, y que permea el debate acerca de cuál es el papel que queremos darle a las matemáticas en la escuela en la formación básica y media.

Palabras clave: Formación matemática, educación básica, educación media, universidad.

1. INTRODUCCIÓN

En el tránsito obligatorio que se lleva a cabo de la educación básica y media del colegio a la educación superior de la Universidad, es posible detectar algunas variables que configuran la articulación o desarticulación de estos dos estadios en la formación de los estudiantes.

Variables que podríamos categorizar en distintos niveles: unas que provienen de la edad o etapa en el desarrollo de la personalidad de los estudiantes que se ven abocados a este paso, y que explican o dan cuenta de ese necesario cambio de mentalidad y actitud de una adolescencia suelta a una más establecida en cuanto al rol que tienen que desempeñar en la Universidad.

Otras variables como la motivación por el estudio, el manejo de su propio tiempo, el manejo de su "libertad", de su autonomía, incluso manejo de dinero. En el colegio, la motivación por el estudio es externa, mediada y provista por los maestros, en contraste con una motivación intrínseca o tácita, dado que se presupone, va a la Universidad a estudiar la carrera que ha elegido libre y conscientemente.

Otras variables en cuanto al cambio mismo de la Institución escolar: en el nuevo ambiente ya no hay coordinadores, ni directores de grupo, ni observadores, hay una relación con los adultos mediada por el conocimiento, por la formación, por reglas de juego distintas en cada uno de los cursos que hacen parte de su plan de estudios. Variables todas estas interesantes y fundamentales a la hora de describir con profundidad y rigor este paso descrito y que, sin embargo, no serán el punto de reflexión en este escrito, pues este se va a centrar en lo que cambia en la formación matemática en esa transición del colegio a la Universidad.

1. DESARROLLO

Curricularmente el modo en que ocurre la instrucción en la escolaridad institucional[1] es dos cursos de algebra en 8º y 9º grado y un curso de cálculo en grado 11, es decir se presenta el álgebra como un dominio, unas prácticas, anteriores al cálculo, y no solo anteriores sino como pre-requisito para entrar a él posteriormente. De facto se encuentra un 10º grado que configura un elemento o estadio de transición escolar, que no tiene ninguna razón ni matemática ni pedagógica, sino solo de tradición escolar.

En primer semestre en la universidad, el estudiante debe tomar un curso de cálculo diferencial para el cual es necesario, aunque no suficiente, un buen dominio del álgebra. Incluso hay universidades que han incluido un curso de Fundamentos de matemática o matemáticas básicas, repaso del algebra y de las funciones, para suplir los vacios que puedan presentarse antes de entrar a un curso formal de calculo. Históricamente también se desarrolló primero el álgebra y posteriormente el cálculo. Así que en este primer acercamiento, paso o transición significa el camino que ha dado tanto la humanidad como la escuela en la adquisición y ordenamiento de ciertos contenidos aceptados universalmente como básicos en la educación, particularmente en el algebra y el cálculo escolar.

Nos interesa la transición del algebra al cálculo en el sentido de lo que cambia, con respecto al álgebra, semántica, sintáctica, semióticamente para el estudiante una vez que entra formalmente al mundo del cálculo, en el primer semestre de universidad. Pero no solo cronológicamente, sino también en qué momentos, en qué temáticas, con cuáles situaciones se está presentando ya una irrupción de elementos constitutivos del cálculo. Transición que puede ser cognitiva, lingüística, curricular, semiótica, pero no se está hablando ni desde el punto de vista antropológico, ni desde el punto de vista del análisis del discurso.

1.1 TENSIONES

Hay múltiples tensiones entre el análisis real, el cálculo escolar, la geometría escolar, la geometría analítica escolar, el álgebra abstracta, el álgebra de bachillerato, la aritmética de los reales, la aritmética de los racionales, la aritmética de los enteros, la aritmética de los naturales, entre lo discreto y lo continuo (y en la mitad, lo denso), entre lo finito y el infinito actual (y en la mitad, el infinito potencial).

Hay algunos aspectos en los que la notación del cálculo parece la misma del álgebra escolar, pero no lo es, como se ve ante todo por la ausencia de la composición, por el entendimiento del exponente (-1) como recíproco, no como inverso de la función, por el uso del apóstrofe para la derivada, por la manera de entender las igualdades que empiezan por "y =…" como funciones, por la yuxtaposición de letras sin indicar multiplicación en los nombres de las funciones (como "lnx"). Se afirma que se trata de un registro semiótico diferente para un sistema conceptual diferente.

La principal operación binaria analítica es la composición de funciones, operación que no figura en el álgebra de bachillerato. Los elementos u objetos del análisis no son los números racionales y reales, sino las funciones reales de valor real. En noveno grado no aparece $x^2 \circ x^3$, y el resultado será ¿ $x^5, ó, x^6$? Son pues muy diferentes de los objetos de la aritmética generalizada.

Respecto a la relación continuo-discreto (al interior de la aritmética, del álgebra y del cálculo), en la mitad hay una zona gris: lo denso, o la densidad. En lo discreto están los conjuntos finitos, los números naturales y los enteros; luego se llega a los racionales positivos Q+, que son densos, y de

[1] Así es en nuestro país y guardando las proporciones la organización curricular es similar en la mayoría de países del mundo, por lo menos en cuanto al orden en los cursos de álgebra y el cálculo.

allí se llega a los racionales Q. Luego se trata de capturar el continuo (línea, región) a través de lo discreto y lo denso, fundamental para construir el cálculo.

Generalmente se viene trabajando en el álgebra de bachillerato con ciertas funciones muy limitadas: la función cuadrado, la función cubo, las funciones lineales y las funciones afines o de gráfica lineal (que se confunden frecuentemente con las lineales). No se consideran las funciones constantes como funciones, sino como constantes. La función idéntica no se utiliza como función, tal vez "porque no hace nada". La *x* se considera como incógnita, como variable, o como indeterminada, pero no como función.

No es conveniente confundir la función, tomada como operación o transformación, que es un objeto activo, con su grafo, que es un objeto pasivo propio de la teoría de conjuntos. Se perdería el aspecto activo de la función y no se podría hablar de la diferencia entre el conjunto de salida y el dominio, ni de la diferencia entre el conjunto de llegada y el recorrido, rango o codominio. No habría diferencia entre función parcial vs. función totalmente definida, ni entre función en vs. función sobre o sobreyectiva. Menos conveniente todavía es confundir la función con su gráfica cartesiana. La una es un elemento u objeto analítico, y la otra es un elemento u objeto geométrico.

Al preguntarnos:¿Qué requiero para acceder al cálculo? las posibles respuestas involucran entidades como: *funciones, números reales, infinito, aproximaciones, continuidad, vecindades,* entre otras, conceptos que tienen sus propios problemas de conceptualización y de representación. Citemos algunas:

- Con respecto a las funciones, vale la pena anotar aquí las dificultades que tienen los estudiantes para pasar de un registro semiótico de representación a otro, y para articular los distintos registros de representaciones semióticas (Duval 1992,1998) y reconocer en todos el mismo objeto matemático. Por ejemplo, se rechaza la función real constante de valor 4 si se presenta en la forma y=4, porque lo que existe en el estudiante es una asociación de la función con su fórmula dependiente de x; o de función como variación, en cambio si se presenta gráficamente por la asociación recta= función se presentan menos errores.

- En cuanto a los Números Reales, algunas investigaciones (Artigué, 1995), muestran la tendencia de los estudiantes a asociar el número real con la aproximación que de él nos da la calculadora, y también han detectado situaciones arraigadas en los estudiantes de college y de primeros semestres de universidad, como que entre 3,25 y 3,26 no hay ningún número, o que 3,138 es mayor que 3,4, o que $(3,4)^2 = 9,16$; situaciones que muestran la complejidad de estos referentes.

- Respecto a los límites, Tall (1993) presenta algunas justificaciones interesantes de los estudiantes. Por ejemplo la concepción de que el límite de la sucesión *0.9, 0.99, 0.999,...debe* ser menor que *1*; que 0.9, 0.99, 0.999 no tiende a 1 pero tiene límite 1 (porque tiende a tener la propiedad de 0.9999 que nunca puede pasar del límite 1).

Para entrar en el mundo del cálculo es necesario enriquecer la visión de los estudiantes sobre la noción de igualdad y desarrollar nuevos métodos para probar igualdades. En este punto, es interesante notar que una reconstrucción similar de la noción de igualdad fue puesta en evidencia por la investigación didáctica, en la transición del pensamiento numérico al pensamiento algebraico.

En el álgebra, para demostrar que dos expresiones son iguales, se razona por equivalencia: se transforma la escritura *a(x) = b(x)* en una sucesión de escrituras *ai(x)=bi(x)* hasta obtener dos expresiones idénticas. Lo mismo se hace en el tratamiento de las ecuaciones y de las inecuaciones. Mientras que en el cálculo, se hace un encaje con la proposición ε *>0, la-b* /< ε , Lo cual ha de llevar a comprender que para demostrar que en la vecindad de un punto *a, f(x) < g(x),* no hay que resolver la inecuación, sino encontrar un intervalo de centro a donde tal desigualdad se pueda garantizar, mediante aproximaciones y estimaciones. *Se pasa de razonamientos por equivalencias sucesivas a razonamientos por condiciones suficientes.*

La entrada en el mundo del cálculo obliga también a los estudiantes a reconstruir objetos matemáticos ya familiares pero en otros mundos: la noción de tangente nos proporciona un caso prototípico de tal reconstrucción. En la enseñanza bachillerato, los alumnos encuentran primero esta noción en el contexto del círculo. La tangente es un objeto geométrico que posee propiedades específicas: • no corta al círculo, • Lo toca en solo un punto, • en el punto de contacto es perpendicular al radio. Todas estas propiedades son globales y no tienen nada que ver con la idea de dirección común.

2. CONCLUSIONES

El paso de las matemáticas de Secundaria a las matemáticas de la Universidad plantea un problema complejo. Como lo afirma Gascón et al (2004), su esclarecimiento requerirá el desarrollo de la investigación didáctico-matemática y ésta necesitará la participación ineludible de toda la comunidad matemática.

La formación de profesores reflexivos en la disciplina matemática y en la epistemología de las matemáticas, sobre la naturaleza de los objetos de estudio de las diferentes especialidades es fundamental, la capacitación, actualización e innovación son necesarias pero no suficientes para cualificar cada vez más la práctica profesional docente: se requiere la vigilancia epistemológica de la que han hablado varios pensadores, volvernos maestros investigadores del hacer presente, cada clase, cada estudiante, lo cual a su vez requiere un cambio profundo de la estructura curricular de nuestro sistema educativo.

Finalizo citando ideas de Brousseau (1994), quien postula que para ampliar y mejorar su tarea, los investigadores en matemáticas deberán interesarse por aquella parte de su actividad relativa a cómo las matemáticas *se comprenden*, *se comunican* y *se prueban*. Basándose en esta nueva concepción de las matemáticas (que incluye como actividades matemáticas las relativas a la *comprensión* y a la *comunicación*), Brousseau formula la tesis de que *la didáctica de las matemáticas llegará a ser plenamente parte de las "matemáticas".*

… ¡Queda abierta la discusión!

REFERENCIAS

Artigué, M. (1995). La Enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognoscitivos y didácticos. En: *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (pp. 97-135). México: Iberoamérica-una empresa docente.

Tall, D. (1993). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof. En: *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 1a Edición (pp. 495-510). New York: Mac Millan Publishing,

Duval, R. (1992). Gráficas y ecuaciones. En: *Antología de la Educación Matemática*. México: CINVESTAV IPN. [M. Parra, Trad.: "Graphiques et equations", 1988. L'Articulation de deux registres" *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 125-139].

Brousseau, G. (1994): Problèmes et résultats de Didactique des Mathématiques, *ICMI Study 94*: Washington.

Gascón,J. et al (1994). Matemáticas en Secundaria y Universidad: razones y sinrazones de un desencuentro. *Memorias de X Jornadas sobre Educación Matemática*, Santiago de Compostela, 16 al 18 de septiembre de 2004.

Volver al índice Mesas de Trabajo

Mesa Temática 2:

Conocimiento didáctico del contenido matemático en la formación de profesores

Edgar Alberto Guacaneme S.
Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, guacaneme@pedagogica.edu.co

Jorge Orlando Lurduy Ortegón
Universidad Distrital "Francisco José de Caldas", Bogotá, jolurduy@udistrital.edu.co

Resumen. Se aborda la discusión acerca de cómo, en los programas de formación inicial de profesores de matemáticas, se gestiona su educación en relación con el conocimiento didáctico del contenido matemático. Para ello, los formadores de profesores presentan sus experiencias y reflexiones.

Palabras clave: educación de profesores de matemáticas, conocimiento del profesor de matemáticas, conocimiento didáctico del contenido matemático, Didáctica de las Matemáticas

PRESENTACIÓN GENERAL

A partir de las reformas legislativas relacionadas con los programas de formación inicial de profesores, generadas al final del siglo XX y en la primera década del XXI, se han dado cambios importantes en los programas de formación inicial de profesores de Matemáticas; por ejemplo, se han incluido o realzado en las estructuras curriculares algunos componentes del conocimiento del profesor que no estaban en los primeros planos; quizá sea este el caso de la *Didáctica de las Matemáticas.*

Infortunadamente, hasta el momento no ha habido una descripción de cómo esta disciplina se articula y funciona en las licenciaturas que buscan formar profesores de matemáticas. Así, conocer el estado y tratamiento que las licenciaturas dan a la Didáctica de las Matemáticas (o si se prefiere, al *Conocimiento didáctico del contenido matemático*) como componente del conocimiento del profesor, se convierte en una necesidad para la comunidad de formadores de profesores.

La versión veinticuatro del ***Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística*** se constituye en un evento académico por excelencia para abocar este asunto y, en este sentido, acoge a los directores o profesores de las licenciaturas en Matemáticas, licenciaturas en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas o licenciaturas afines, para que a través de una ponencia describan algunos aspectos de la(s) estrategia(s) curricular(es) que en su respectivo programa de formación se emplean para promover la apropiación de lo que en la comunidad internacional se ha venido conociendo como el *conocimiento didáctico del contenido matemático* por parte de los futuros profesores de Matemáticas.

Volver al índice Mesas de Trabajo

Fin de esta sección

Ir al Menú

XXIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística

Sede:
Universidad Distrital
Francisco José de Caldas

Comunicaciones Breves

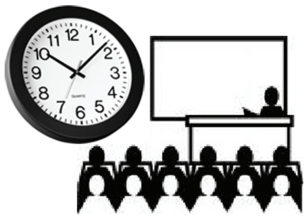
Índice de Comunicaciones Breves

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
Educadora de educadores

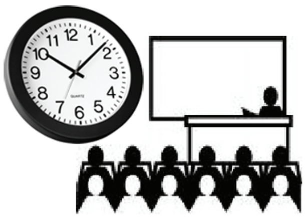
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Menú inicio



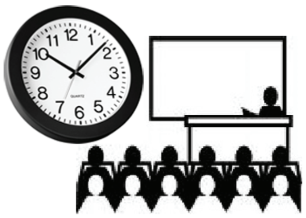
Índice Comunicaciones Breves

1



Índice Comunicaciones Breves

2



Índice Comunicaciones Breves

3

Menú inicio

El análisis histórico epistemológico como herramienta para la formación de profesores y los procesos de enseñanza de la matemática

Jhon Bello, Alberto Forero, Erika Ariza, Daniel Cifuentes, Yenny Gaviria[1]
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, ghema.udistrital@gmail.com

Resumen. Este documento pretende caracterizar el análisis histórico –epistemológico como recurso para la enseñanza de los objetos matemáticos y su relación con la formación de profesores, estableciendo una postura didáctica que permite al docente investigar desde el conocimiento y las ideas matemáticas que pretende trabajar. De igual manera, le ofrece al profesor de matemáticas una mirada dinámica de la matemática y su historia, permitiéndole encontrar algoritmos, estrategias, heurísticas y relaciones que lleven a dar sentido a los objetos y convirtiendo a la historia en una herramienta a tener en cuenta para la enseñanza de la matemática.

DESARROLLO CONCEPTUAL

En el desarrollo de la caracterización de un estudio histórico – epistemológico, tendremos en cuenta lo planteado por Campos (2004) acerca de un estudio epistemológico de la matemática, desde el que se realiza un análisis teniendo en cuenta cinco aspectos tales como: la génesis, la estructura, la función, el método y los problemas. La génesis la consideramos importante, ya que brinda elementos al docente acerca del surgimiento y desarrollo del conocimiento matemático. La estructura permite resolver cuestionamientos acerca de diversas problemáticas en el campo matemático. La función, reconoce el surgimiento de los conceptos matemáticos desde las necesidades y desde el contacto del hombre con su entorno, aplicando lo encontrando en pro de facilitar sus labores; por lo cual se hace indispensable llevarlas a espacios de formación como una disciplina de gran interés y aplicabilidad. El método, entendido como las formas de proceder para lograr la construcción de un concepto, que tiene un carácter epistémico, relacionado con la naturaleza de la demostración, relación matemática y la experiencia, entre otros.

Estos aspectos contribuyen en nuestro estudio histórico - epistemológico ya que nos darán grandes luces desde la postura matemática, sin embargo se caracteriza la matemática como una disciplina; llevando esta discusión al plano de la educación, se reconoce que los docentes deben estudiar, analizar y reflexionar acerca de los objetos, relaciones y demás elementos inmersos en la

[1] **GRUPO DE ESTUDIO GHEEMA:** Grupo de estudio en historia y epistemología de la matemática para la formación de profesores de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Proyecto Curricular Licenciatura en Educación Básica con Énfasis Matemática.

matemática que le permita posteriormente concebir procesos de enseñanza, esta postura se relaciona directamente, con el uso que según Bernardo Gómez (2003) se le da en investigación a la historia de la matemática. Este autor apoyado en Filloy (1999), indica que es posible tomar elementos de la historia de la matemática para el aprovechamiento en la didáctica, esto considerando que la historia hace parte de su comprensión, desde algunos enfoques como: “la perspectiva histórica”, “los obstáculos epistemológicos” y “la reproducción de la historia”.

En el primero, considera algunos problemas surgidos en el transcurso de la historia para que los estudiantes los resuelvan. En el segundo, se identifican los obstáculos surgidos en transcurso de la historia y permite realizar un análisis reconociendo los cambios por época surgimiento haciendo adaptaciones para ser llevadas al aula. En la tercera se pretende identificar etapas en el desarrollo de alguna noción aparentemente bien definidas, las cuales deberán ser superadas por los estudiantes en su etapa de aprendizaje. Con estas, relacionan directamente el análisis histórico epistemológico con los procesos de enseñanza, pues se reconoce que se pueden incorporar elementos de la historia y su análisis, sin asumir que estos aspectos serán los mismos o se reproducirán en el aula.

Dichos planteamientos, permiten indicar que al hablar de una estructura se involucran conocimientos previos, obstáculos, representaciones, desarrollos históricos, argumentos, y demás aspectos que permitan al docente hacer una análisis mediante el cual adquiera herramientas que lo lleven a valorar la actividad matemática del estudiante, necesaria en el aula para la construcción del significado de la matemática y así mismo poder caracterizar los procesos de enseñanza que conduzcan a considerar la matemática no como un conjunto de conceptos, sino como una red o sistemas de prácticas sociales (consideradas por Godino 2003) que permiten direccionar la enseñanza de las matemáticas hacia la resolución de situaciones matemáticas y en otros campos.

Al puntualizar el análisis de la matemática y la enseñanza de la misma desde el planteamiento de Campos y Gómez respectivamente, se puede hacer una caracterización de los objetos matemáticos con profundidad, encaminándolos a la educación, y desde el reconocimiento de los elementos de significado que propone Godino (2003), partiendo de aspectos como el lenguaje ((términos, expresiones, notaciones, gráficos, ...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, ...)), las situaciones problema (aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios, ...), proposiciones (enunciados sobre conceptos, ...) y argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, ...), centrado en los momentos históricos que fundamentan los objetos, lo cual se puede relacionar con los procesos de enseñanza, al hacer un estudio de los objetos matemáticos como referencia para luego establecer objetos de enseñanza.

De acuerdo con Godino(2003) en el proceso de enseñanza de los objetos matemáticos reconocidos como emergentes en prácticas sociales, “*es necesario elaborar modelos teóricos que traten de articular las dimensiones semiótica, epistemológica, psicológica y sociocultural en educación matemática”*, de esta manera, un análisis epistemológico es algo esencial para la didáctica de las matemáticas, pues resulta difícil estudiar procesos de enseñanza si no se tiene claro cómo se define o surgió un objeto matemático, esta preocupación es recopilada en “El programa epistemológico" Gascón (2001).

Algo importante en los procesos de instrucción en matemáticas es que un concepto no se puede reducir a una mera definición matemática como lo menciona Godino (2003), partiendo de la concepción constructivista social de la educación (Ernest, 1993) se requiere de la comprensión semántica y pragmática de un objeto, es decir, la naturaleza de los conceptos, las proposiciones, su dependencia de los contextos, y situaciones-problemas de cuya resolución provienen.

Desde la didáctica de las matemáticas resulta importante la idea de significado de Sierpinska (1994) porque determina que "Comprender el concepto será entonces concebido como el acto de captar su significado”, lo cual implica una síntesis de significados relacionados a elementos particulares de la "estructura" del concepto, captados en actos de comprensión.

Un programa de investigación para la didáctica de la matemática implica estudios epistemológicos, diseño de situaciones didácticas y estudio de las condiciones que tienen la reproductibilidad de las situaciones, así mismo Sierpinska y Lerman (1996) indican que "*el diseño de las situaciones didácticas relativas a un concepto matemático dado se orienta a la construcción de su génesis artificial, que simulará los diferentes aspectos actuales del concepto para los estudiantes, y que, sin reproducir el proceso histórico, conducirá a resultados similares"*

Desde la postura de la teoría de las funciones semióticas, cuando existe la preocupación por llegar a dar significado a un concepto matemático, se debe guiar el proceso a la indagación de su naturaleza, la reflexión ontológica y epistemológica sobre la génesis personal y cultural del conocimiento matemático. El estudio del significado permitirá dejar de hablar de los conceptos como entidades ideales, de ver las proposiciones como la descripción de tales objetos sino como instrumentos que llevaron a la transformación de proposiciones empíricas, permitiendo reconocer que la matemática constituye un quehacer humano, sistemas de prácticas, resultado del tratamiento, procedimientos, reflexión, lenguaje simbólico y teoremas dados a situaciones problema de la realidad y de la matemática, que a su vez han permitido la evolución del objeto matemático.

Los objetos matemáticos, como lo indica Chevallard (1992) se deben considerar como objetos institucionales, pues son emergentes del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de Problemas, sin embargo, Vergnaud (1990) indica que "Un concepto no toma su significado en un sólo tipo de situaciones y una situación no se analiza con ayuda de un sólo concepto".

Para poder aludir a la comprensión de los objetos matemáticos se requiere de una mirada a varias tendencias, desde una visión puramente histórica, Vygotsky (1934) sugiere la prioridad analítica y genética de los factores socioculturales que influyen en los procesos psicológicos, Bruner (1990) propone una *psicología cultural* y Chevallard (1992) su *antropología cognitiva y didáctica*. De acuerdo con estas tendencias, la comprensión deja de tener un carácter absoluto y está condicionada por los contextos institucionales, además está ligada a cómo se concibe el propio conocimiento matemático, es decir, su significado institucional.

Skemp (1976) hace una distinción entre una matemática que depende únicamente de la formalización de reglas, principios y algoritmos, y una matemática que involucra un significado sistémico de los conceptos. Al respecto Godino determina una correspondencia entre comprensión instrumental y relacional a las que se refería Skemp, con competencia y comprensión, centrando la discusión en la concepción acerca del significado de los objetos matemáticos.

Se conciben los objetos matemáticos (abstracciones o generalidades empírico-operatorias) como emergentes de los sistemas de prácticas prototípicas significativas, la comprensión del objeto, exige además que el sujeto identifique en el objeto un para qué, una intencionalidad (Maier, 1992) como base de la comprensión; Por otro lado, en la teoría de las funciones semióticas, el conocimiento matemático está determinado por un componentes practico (competencia), discursivo o relacional y el lenguaje matemático.

El estudio epistemológico de los objetos matemáticos resulta importante, pues, tal como lo define Sierpinska, la comprensión es la 'experiencia mental de un sujeto por medio de la cual relaciona un objeto (signo) con otro objeto (significado), donde el significado sistémico (significado institucional) de un concepto es relativo a los contextos institucionales, está determinado en su estructura por los elementos de significado, y de acuerdo con Godino, puede contribuir a enfocar desde un punto de vista semiótico la problemática del diseño de situaciones didácticas y la evaluación de los conocimientos del sujeto, pues, la comprensión de un concepto por un sujeto, en un momento y circunstancias dadas, implicará la apropiación de los distintos elementos que componen los significados institucionales correspondientes.

REFERENCIAS

Campos, A. (2004). *Memorias XV Encuentro de Geometría y III de Aritmética*. Acerca de la epistemología de la matemática [Versión electrónica]. Bogotá.

Gascón, J. (2001) *Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes.* Relime 4(2) 129-159.

Godino, J. (2003). *Teoría de las funciones semióticas* [Versión electrónica], Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación. Granada: , Universidad de Granada.

Vergnaud, G. (1990). Epistemológia y Psicologia de la educación matemática. En P. y. Nesher, *Mathematics and cognition: A Research Synthesis by the international group for the psichology of mathematics education* [Versión electrónica]. Inglaterra: Cambridge, university.

Gómez, B. (2003). *La Investigación Histórica en Didáctica de la matemática.* En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (Eds.). *Investigación en Educación Matemática. VII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM*), 79-85. Granada: Universidad de Granada

Sierpinska (1994). Understanding in Mathematics. UK. Falmer.

Ernest, P; Lerman, 1987, citados en Vergnaud, G. (1990). *Epistemológia y Psicologia de la educación matemática. En P. y. Nesher, Mathematics and cognition: A Research Synthesis by the international group for the psichology of mathematics education* (págs. 14-30). Inglaterra: Cambridge, university.

Volver al índice Comunicaciones Breves

Algunas identidades elementales con los números de Fibonacci

Javier Sebastián Cortes Ocampo, [1] jscorteso@correo.udistrital.edu.co
Pedro Fernando Fernández Espinosa, pffernandeze@correo.udistrital.edu.co
Gabriel Córdoba, gcordoba@udistrital.edu.co
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Resumen. Cada vez que leemos un libro de matemática, nos encontramos con teoremas; cuando se da la demostración de uno de ellos, podemos ver los argumentos necesarios para concluir que de la hipótesis planteada se deduce la tesis. Sin embargo, en la mayoría de los casos, se omite como se llegó allí, es decir, que se hizo para conjeturar esta afirmación y además que ayudó a establecer una demostración.

Enfocándonos en una de las ramas más hermosas de la matemática, la teoría de números, más específicamente en el estudio de los números de Fibonacci, vemos la relación de la sucesión de Fibonacci con algunos situaciones de la naturaleza, y de ahí apreciamos la importancia esa sucesión pero notamos que como ente formal también es sugestiva y atractiva para principiantes y para expertos.

El núcleo de este documento es la enumeración, descripción y deducción de algunas identidades con números de Fibonacci, pero también se presentan problemas y soluciones que involucran esas propiedades. Algunas conjeturas se plantean y algunas ideas o indicios que hacen pensar en la validez de ellas pero conclusiones en ese sentido aún no se han establecido

De una definición breve de la sucesión debida a Fibonacci,

F1=1; F2=1; $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ *para n>2*

se puede obtener teoría vinculada con distintas ramas de la matemática(álgebra, matrices, determinantes, y geometría entre otras) y la ingeniería de sistemas(búsqueda en una lista) y lo mejor que esa teoría aún no está terminada y sigue presentando retos y problemas atractivos

Palabras clave: Números de Fibonacci, producto punto, traza de una matriz, determinante de una matriz

REFERENCIAS

Atanassova, V; Shannon, A.; Turner, J. & Atanassov, K. (2002). *New Visual Perspectives on Fibonacci Numbers,* Singapore: World Scientic Publishing.

[1] Semillero Investigación del Proyecto Curricular de Matemáticas de la Universidad Distrital.

A. Brousseau (1976). Fibonacci Numbers and Geometry. *Fib. Quart, 10,* 303-318.

Cahill, N.; D'Errico, J.; Narayan, D. & Narayan, J. (2002). Fibonacci Determinants. *The College Mathematical Journal, 33 (3)*, 221-225.

Fuentes, A. (1991). Desarrollo en Fracción Continua Infinita de las Potencias Enteras del Número de Oro, *Educación Matemática, 3*, 19-38.

M. Gardner, Miscelánea Matemática, Salvat Editores, Barcelona, 1987.

P. Hilton and J. Pedersen, A Note on a Geometrical Property of Fibonacci Numbers, Fib. Quart. 32(1994), 386-388.

Honsberger, R. (1985). *Mathematical Gems III.* Washington: Math. Assoc. Amer.

Jiménez, R. y otros (1999). *Teoría de Números para Principiantes*, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Volver al índice Comunicaciones Breves

La generalización algebraica a través del pensamiento algebraico factual

Paola Fresneda Patiño
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Aseneth Gutiérrez Rodríguez
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Leonardo Pantano Mogollón
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Rodolfo Vergel Causado
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Resumen En esta comunicación se presentan hallazgos de la manera como se evidencia la generalización algebraica a través del pensamiento factual en la actividad matemática realizada por una niña de 9 años, frente a una situación de generalización de patrones. Para posibilitar dicha identificación, es necesario notar cómo influyen los sistemas semióticos (Radford, 2010) en el proceso de objetivación de la generalización en el álgebra escolar. Posteriormente, se presenta el análisis de proceso de resolución de la estudiante, apoyado en la construcción de viñetas. Finalmente, se concluye sobre las relaciones encontradas entre el pensamiento algebraico factual y el uso de sistemas semióticos en el estudio del álgebra escolar.

Palabras clave: Álgebra, generalización, pensamiento factual

1. REFERENTE TEÓRICO

El pensamiento algebraico factual (Radford, 2010), no es una simple forma de reflexión matemática. Por el contrario, se basa en mecanismos de percepción y la coordinación rítmica de gestos, palabras y símbolos, los cuales operan al nivel de un número particular o hecho factual. Es decir, la generalidad se basa en acciones realizadas en los números y las actuaciones constan aquí de palabras, gestos, movimientos y actividad perceptual.

En este tipo de pensamiento es fundamental la presencia de adverbios que resaltan las funciones generativas del lenguaje, es decir, las funciones que hacen posible describir los procedimientos y acciones que potencialmente pueden llevarse a cabo reiteradamente (Radford, 2001). Además, tiene lugar aquí el ritmo de la expresión y el movimiento que se lleva a cabo en el transcurso de las acciones numéricas y la correspondencia ostensiva entre palabras pronunciadas y signos escritos. De esta manera, “El reconocimiento de la regularidad y la imaginación de las cifras en el transcurso de la generalización de los resultados, permanece anclado en un profundo proceso de mediación sensual” (Radford, 2010).

Tradicionalmente las letras y los signos de las operaciones se han considerado como el sistema semiótico del álgebra por excelencia. Sin embargo, desde una perspectiva semiótica los signos pueden ser palabras, gestos, movimientos, ritmo, etc. Es decir, los recursos semióticos incluyen los clásicos sistemas de representación (fórmulas algebraicas, lenguaje natural), lo que (Duval, 2001) llama registros discursivos y no discursivos.

Este estudio no sólo se basa en consideraciones semióticas, sino también en las nuevas teorías de la cognición que destacan el papel fundamental del contexto, el cuerpo y los sentidos en la forma en que es posible llegar a conocer (Radford, 2006). Así, el pensamiento se considera una actividad reflexiva y sensible mediada por el signo, plasmada en la corporeidad de las acciones, gestos y artefactos (Radford, 2010).

2. METODOLOGÍA

Este estudio se implementó sobre un video obtenido de internet[1] en el cual una niña (Paulita) de aproximadamente 9 años se enfrenta a una situación de generalización algebraica. La metodología usada en el estudio se basa en la construcción de viñetas para el análisis de la información.
Así, se construyó una viñeta que según Gavilán, García y Llinares (2007) es un informe que vincula aspectos de la práctica del profesor. En éste se integra información de fuentes diversas: videograbación, trascripción del video e imágenes tomadas del mismo. En dicha viñeta se integran inferencias e interpretaciones de los investigadores sobre la evidencia de la práctica.
El análisis realizado se centra en la actividad matemática realizada por Paulita al enfrentar una situación de generalización algebraica, a partir de la siguiente configuración:

Posición 1. **Posición 2.** **Posición 3.**

Figura 1. Situación de generalización algebraica.

3. ANÁLISIS DE DATOS

El episodio que aquí se presenta muestra la interacción entre el Profesor y Paulita a partir de la pregunta planteada por él acerca de la manera como ella resolvió la situación. Con esto, se pretende evidenciar las características del pensamiento algebraico factual en el desarrollo de una situación propia del álgebra escolar.

> *{1} Profesor: Cómo haces entonces para resolverlo.*
> ***{2} Paulita: Entonces en la parte de arriba le sumo 1. Sé: si en la posición 1 hay 2 entonces en la posición 5 se le suma 1 o sea 6 y debajo le resto 1 que serían 5 pepitas, 5 bolitas (señala). En la posición 10 al 10 le sumo 1 que serían 11 bolitas y abajo le resto 1 que serían 10 bolitas y ya.***
> *{3} Profesor: Mmmm ya, o sea cómo haces para hacer la posición 7, por ejemplo.*
> *{4} Paulita: Entonces serían 8 bolitas y 7 abajo [señala con el esfero].*
> ***{5} Profesor: O sea ¿cómo es la relación?***
> ***{6} Paulita: [interrumpiendo] Arriba le sumo 1 y abajo le resto 1.***

---

[1] Vergel, R. (2010) Paulita Nodo Semiótico [En línea] Fecha de consulta: 15 de abril de 2011. Disponible en: http://www.youtube.com/watch?v=AQkeU5UYAv0

{7} Profesor: ¿Le restas 1? Pero, pero digamos cómo es la relación del número de bolitas de arriba con el número de bolitas de abajo. [señala con la mano] Qué es lo que percibes ahí. O sea arriba hay 2.
{8} Paulita: [interrumpiendo] Y abajo hay 1.
{9} Profesor: Aquí ¿cuántas bolitas hay arriba? [Señala la posición 2]
{10} Paulita: Arriba hay 3 y abajo 2. Tres-dos, cuatro-tres, cinco-cuatro.

A partir de la pregunta planteada, Paulita expresa su interpretación del comportamiento de la configuración. Como se muestra en la línea 2, al intentar dar dicha explicación, ella se vale de la posición 1 para validar lo que considera que sucede en la posición 5, mediado además por un movimiento del esfero como se ve en la figura 2.

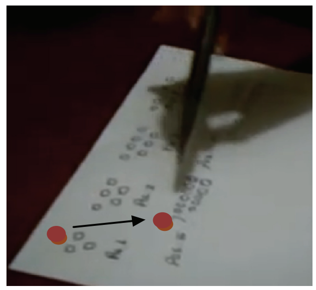


Fig. 2. Paulita mueve el esfero desde la posición 1 hasta la 5.

Paulita va describiendo la relación percibida y simultáneamente va señalando las posiciones 1 y 5, ella está movilizando varios recursos semióticos (Radford, 2010) tales como: señalar, mover el esfero de una posición a otra y oralizar la relación percibida.

Ahora bien, al oralizar la relación percibida Paulita emplea una implicación evidenciada en el uso de las palabras *sí-entonces* (ln. 2).
Sería posible pensar que ella empieza a generalizar la situación llevando lo que sucede en las primeras posiciones como argumento para validar lo realizado en la posición 5. Así, Paulita explica la regularidad percibiéndola como el número de la posición más 1 en la parte de arriba de la configuración y restando 1 para obtener la cantidad de bolitas en la parte de abajo (ln. 2).
Dada esta explicación, se evidencia la necesidad de trabajar con números percibiendo el aumento en cada posición como la suma de 1 arriba y la resta de 1 abajo. Así, la generalidad expresada no se liga a la estructura de la configuración sino al hecho de emplear números para explicarla.
Lo anterior, acompañado de movimientos que van señalando cada una de estas acciones (suma arriba, resta abajo). Dichos movimientos que apoyan la explicación dada por Paulita son reiterados al considerar la configuración de la posición 10 (Fig. 3).

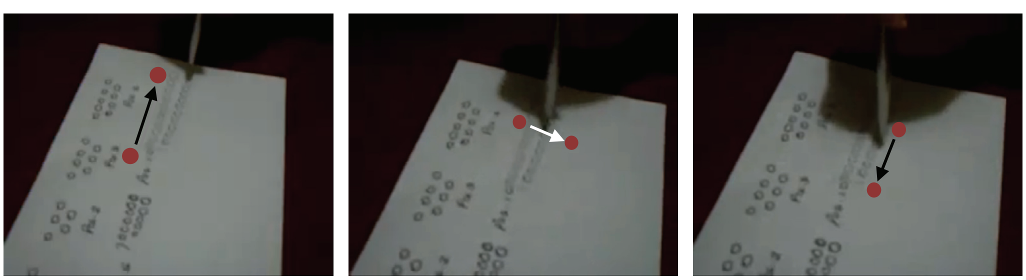


Foto 1. Foto 2. Foto 3.

Fig. 3. Paulita explica la regularidad percibida como sumar 1 arriba y restar 1 abajo, acompañando dicha explicación con movimientos del esfero.

Ahora, para explicar cómo se forma la configuración en la parte de arriba Paulita realiza un movimiento con el esfero de izquierda a derecha, iniciando en la primera bolita y terminando en la última (Fig. 3, foto 1 y ln. 2). Posteriormente, desplaza el esfero hacia abajo con el fin de explicar cómo se forma la configuración en la parte inferior, movimiento que se evidencia en la fig. 3, foto 2. Al dar esta explicación desplaza el esfero de derecha a izquierda mencionando la resta que realiza (Fig. 3, foto 3 y ln. 2). Finalmente, vuelve a mover el esfero de izquierda a derecha al referirse al resultado de esta resta.

Luego, el profesor la cuestiona acerca de cómo es la relación que encuentra en la configuración trabajada. Paulita interrumpiendo, responde que arriba se le suma 1 y abajo se le resta 1 (lns. 5 y 6). Sin embargo, podría pensarse que como en la parte de abajo de la configuración no es necesario realizar dicha resta, el profesor la cuestiona nuevamente sobre dicha relación basándose en las configuraciones construidas.

Ahora, podría ser que como resultado de este cuestionamiento ella abandona la suma y la resta planteadas inicialmente, y se acerca más a un modelo de la configuración. En este sentido, ella a partir de preguntas formuladas por el profesor, relacionadas con distintas posiciones está en capacidad de responder rápidamente para diferentes casos (ln. 10).

Además, en la intervención de Paulita en la línea 10 aparece el ritmo como un nuevo recurso semiótico, el cual se sincroniza con los recursos identificados anteriormente (Radford, 2010). Dicho ritmo se entiende como la sonoridad de las palabras la cual puede ir acompañada por movimientos corporales.

Hasta este momento, es posible evidenciar algunas características de la generalización factual, la cual esta basada en acciones y actuaciones sobre los números. Éstas constan de palabras, actividad perceptual, movimientos, ritmo y gestos; entendidos como recursos semióticos (Radford, 2010). Así, la generalidad está ligada al hecho, es decir, a lo que Paulita logra ver o percibir por medio de las acciones en la actividad concreta realizada.

4. CONCLUSIONES

Partiendo del análisis realizado sería posible afirmar que la forma de pensamiento algebraico factual, al ser concebida como una ladera de generalidad (Radford, 2010), ofrece por si sola un significado respecto a la generalización. En consecuencia, el hecho de que Paulita no haya avanzado a los demás tipos de generalización no implica que no haya desarrollado aprendizajes sobre la generalización algebraica.

En el caso objeto de estudio se puede mencionar que la intervención del profesor es clave en la transición de una forma de pensamiento algebraico a otra. Esto, dado que es él, quien ayuda a generar en Paulita la necesidad de alejarse de lo factual (hoja de trabajo, gestos, movimientos, actividad perceptual, ritmo, etc.) y así movilizarse a formas descriptivas o discursivas en la situación específica.

El uso de los distintos recursos semióticos (Radford, 2010) puestos en juego por Paulita es importante dado que le permite ganar comprensión tanto de la situación como de algunos aspectos matemáticos inmersos en la misma (regularidades, relaciones, operaciones, etc.). Por esta razón, no se pueden rechazar cuando surgen de manera autónoma en su quehacer matemático.

Es importante reconocer que la metodología aplicada para el desarrollo de este estudio no permite generalizar las conclusiones y hallazgos a otra población diferente. Sin embargo, puede usarse como referencia para estudios posteriores.

Referencias

Gavilán, J., García, M. & Llinares, S. (2007). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Implicaciones metodológicas. Revista Enseñanza de las Ciencias, 25 (2), 157-170.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. Research in Mathematics Education, 12: 1, 1-19.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*, pp. 103-129.

Radford, L. (2001). Factual, Contextual and Symbolic Generalizations in Algebra, in: Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Marja van den Hueuvel-Panhuizen (ed.), Freudental Institute, Utrecht University, The Netherlands, Vol.4, pp.81-88.

Volver al índice Comunicaciones Breves

Propuesta metodológica para la conceptualización de la noción de derivada a través de su interpretación geométrica

Rossmajer Guataquira López
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

María Sildana Castillo Torres
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Hellen Carolina Carranza Sanabria
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Resumen. En esta propuesta metodológica se presenta una secuencia de siete actividades encaminadas a propiciar la conceptualización de la noción de derivada a través de su interpretación geométrica (como la pendiente de la recta tangente a un punto) en estudiantes bachilleres y universitarios. El diseño metodológico que se ha seguido se encuentra basado en la propuesta didáctica para la conceptualización de un objeto geométrico, planteada por Samper, Camargo y Leguizamón (2003) denominada "Tareas que promueven el razonamiento en el aula a través de la geometría" y en los planteamientos teóricos de Vinner y Van Hiele.

1. INTRODUCCIÓN

En el campo científico, económico y social, el cálculo diferencial es una herramienta matemática muy utilizada puesto que permite optimizar sistemas y determinar comportamientos que se expresan mediante funciones, por ello, el Ministerio de Educación Nacional Colombiano ha establecido, por medio de los Estándares Curriculares del año 2007, que su estudio se realice de forma específica en los grados décimo y once de la educación básica media, con el fin de que los estudiantes logren interpretar, utilizar y analizar modelos de situaciones de variación mediante sus derivadas.

Sin embargo, pese a los esfuerzos de educadores e investigadores en pro de proponer e implementar situaciones de aprendizaje efectivas con relación al cálculo diferencial, existe -según nuestra propia experiencia como estudiantes bachilleres y universitarias y según los estudios realizados por Dolores y (Cantoral, 2000) -una gran cantidad de estudiantes bachilleres y universitarios que presentan dificultades en la comprensión de la noción de derivada.

Por ello, en reconocimiento de este problema y de las prácticas educativas que se realizan en las aulas de clase (muchas de ellas enfocadas en la representación algebraica de la derivada), surge esta propuesta metodológica de enseñanza, mediante la cual se busca potenciar la conceptualización de la noción de derivada (a través de su interpretación geométrica) en jóvenes entre los 15 y 19 años, mediante la implementación del diseño de un conjunto de siete actividades basadas en la propuesta didáctica denominada *"Tareas que promueven el razonamiento en el aula a través de la geometría"* realizada por Samper, Camargo y Leguizamón (2003) para promover la conceptualización de un objeto geométrico inventado, denominado Kuid.

2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

2.1. MATEMÁTICA

En matemáticas, podemos hablar de pendiente de una línea recta o de una línea curva. Una línea recta tiene pendiente constante a lo largo de todos sus puntos, puesto que ella es la misma en cualquier punto de la recta, pero, en el caso de la pendiente de una curva no sucede lo mismo y ello da origen al concepto de derivada de una función. La derivada de una función se puede considerar respecto a ella o a un punto de ella.

Para este último caso (la derivada en un punto) se define:

> es derivable en , si existe el límite de) cuando tiende a 0. Dicho limite se representa por y se le da el nombre de **derivada de en .**
>
> Si es un punto de tal que existe diremos que la tangente a en es la recta que pasa por y tiene por pendiente el número (Balabasquer, 1994, p. 13).

2.2. LEGAL Y DIDÁCTICA

El Ministerio de Educación Nacional en sus Estándares Curriculares de Matemáticas (MEN 2007, p. 69) proponen que la enseñanza de la derivada en la educación básica secundaria, se realice interpretándola como el valor de la pendiente de la tangente a una curva, trabajándola a partir de argumentos geométricos modelados en problemas de contextos matemáticos y de otras ciencias.

En este sentido, Tellechea (2004) propone la implementación del software Cabrí Geometry II para la enseñanza de la derivada, puesto que el software propicia en el estudiante una representación dinámica de la ésta. La cual, según Dolores (2000), se puede trabajar como un enfoque geométrico y computacional, teniendo en cuenta que en el enfoque:

1. ***Geométrico*** se trabaja la derivada por medio de la recta tangente de un punto.
2. ***Computacional*** se realiza una visualización dinámica de la derivada, a partir del comportamiento que tiene la misma en la aproximación de las rectas secantes a la recta tangente.

2.3 METODOLÓGICA

El diseño de las actividades que se presentan tiene en cuenta la recomendación didáctica dada por Samper y otros (2003), para construir situaciones de conceptualización de objetos geométricos, para ello considera el concepto que será objeto de estudio, a partir de su punto de vista matemático y didáctico y de la construcción del concepto desde sus diversas propiedades, tal como lo muestra el esquema: Samper y Otros (2003) [1]

De igual manera, tienen en cuenta que la cercanía entre la imagen conceptual y el concepto, dependen de la cantidad de experiencias que tenga el estudiante con una gran variedad de imágenes conceptuales del objeto de estudio, pues como lo afirman Vinner y Hershkowitz "*adquirir un concepto significa, adquirir un mecanismo de construcción e identificación mediante el cual será posible identificar o construir todos los ejemplos del concepto, tal como éste está concebido por la comunidad matemática*." (Citado por Samper y otros, 2003, p. 9).

3. DISEÑO Y METODOLOGÍA

En busca de la conceptualización de la noción de derivada a través de su interpretación geométrica (como la pendiente de la recta tangente a un punto), se empleó como guía (en cuanto al propósito y estructura de las mismas) las siete actividades diseñadas por Samper y otros (2003), las cuales están basadas teóricamente en los niveles de razonamiento de Van Hiele, niveles que no son secuenciales (no se puede pasar a un siguiente nivel sin antes haber superado el anterior) y no dependen de la edad, motivo por el cual, las actividades están estructuradas a partir de los planteamientos de estos esposos así:

Nivel de Razonamiento según Van Hiele	**Número de la actividad**
Tipo 1: Visualización o Reconocimiento	1
Tipo 2: Análisis o Descripción	2
	3
Tipo 3: Clasificación o Abstracto relacional	4
Tipo 4: Deducción Formal	5
	6
Tipo 5: De Rigor	7

Proponiendo de esta manera siete actividades, en las cuales nuestro kuid es la derivada en un punto de la función[2]:

3.1. ACTIVIDADES

Actividad No. 1:

Intencionalidad:	El descubrimiento, por el alumno, de las características esenciales del Kuid, a través del análisis de ejemplos y contraejemplos.
Organización:	Individual. Proyección (mediante diapositivas o retroproyector) de imágenes del Kuid, de manera secuencial, manteniendo ocultas las imágenes posteriores a la que está siendo analizada.
Materiales	Las fichas del Kuid, medio de proyección, lápiz y papel.

[1] Tomado de: Camargo y otros (2003). Tareas que promueven el razonamiento en el aula a través de la geometría. p. 15.

[2] A continuación, por cuestiones de espacio, sólo se dará a conocer la descripción global de cada una de las actividades.

Prerrequisitos	**Conceptos:** Función, recta tangente, coordenadas cartesianas, plano cartesiano, pendiente. **Habilidades:** Identificar tipos de funciones, reemplazo de variables, cálculo de la pendiente de una recta.

Actividad No. 2

Intencionalidad:	Los estudiantes deben identificar características del kuid, a partir de la construcción de distintos ejemplos del mismo.
Organización:	Individual. Presentar a los estudiantes diferentes construcciones de funciones realizadas en Geogebra, solicitándoles utilizar las herramientas que el programa brinda para hallar la recta tangente de un punto y la pendiente de dicha recta.
Materiales	Geogebra, lápiz y papel.
Prerrequisitos:	**Conceptos**: función, pendiente, tangente. **Técnicos**: uso de computador.

Actividad No. 3

Intencionalidad:	Trabajar con una propiedad del kuid, haciendo al estudiante responsable de las construcciones que realiza con base en las sesiones anteriores.
Organización:	Individual. Los estudiantes realizan la construcción de funciones polinomiales, así como de rectas tangentes a un punto y su pendiente.
Materiales	Lápiz, regla y cuaderno.
Prerrequisitos:	**Conceptos:** Función, coordenadas cartesianas, pendiente, recta tangente. **Procedimientos:** Graficar funciones, calcular pendientes, construir rectas tangentes.

Actividad No. 4

Intencionalidad:	Seleccionar ejemplos con una propiedad común.
Organización:	Grupal. Los estudiantes identifican los elementos/pasos necesarios para la construcción de Kuid.
Materiales	Guía del estudiante, tijeras, pegante, lápiz.
Prerrequisitos	**Conceptos**: funciones, rectas tangentes a un punto.

Actividad No. 5

Intencionalidad:	Perfeccionamiento de la definición de Kuid, a partir del estudio de casos poco conocidos del mismo.
Organización:	Grupal. Los estudiantes seleccionan la gráfica que cumple con las condiciones establecidas.
Materiales	Guía del estudiante, lápiz.
Prerrequisitos:	**Conceptuales**: funciones, pendiente y rectas tangentes.

Actividad No. 6

Intencionalidad:	Recoger las ideas intuitivas desarrolladas en torno al concepto de kuid y concretarlas en una definición formal.
Organización:	Individual. Presentar posibles definiciones de kuid para que el alumno efectúe el análisis correspondiente de cada una y el contraste minucioso entre ellas, determinando la característica esencial de este.
Materiales	Guía del estudiante, lápiz, cuaderno.
Prerrequisitos:	**Conceptos:** Función, recta tangente y secante, pendiente. **Habilidades:** Identificar diversos tipos de función, construir rectas tangentes y secantes, determinar la pendiente de una recta.

Actividad No. 7[3]

Intencionalidad:	Invitar a los alumnos a dar explicaciones y justificaciones para avalar las propiedades del kuid trabajadas durante toda la secuencia, usando el concepto de kuid ya adquirido.
Organización:	Individual. El estudiante debe resolver la guía atendiendo a los conocimientos adquiridos en las sesiones anteriores.
Materiales	Guía del estudiante, hoja y lápiz.
Prerrequisitos	**Conceptos:** Pendiente, función, recta tangente. **Habilidades:** Construir una recta tangente, calcular pendientes, identificar una función y de qué tipo es.

REFERENCIAS

Balabasquer, G. (1994). El concepto de derivada y sus aplicaciones. (Consultado: 16/04/2011). Disponible en línea en: www.books.google.com/books. pdf.

Dolores, C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. En: *El futuro del cálculo infinitesimal (Cap. 5)* [En línea]. (Consultado el 13/04/2011). Disponible en: http://cimate.uagro.mx/pub/Crisologo/ArticuloICME8.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Matemáticas. Estándares Básicos de Competencias.* MEN. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Samper, C., Camargo, L., y Leguizamón, C. (2003). Tareas que promueven el razonamiento en el aula a través de la geometría.. *Asociación Colombiana de Matemática Educativa*, *ASOCOLME, Cuaderno No. 6.* (Consultado: 21/04/2011). Disponible en línea en: http://asocolme.com/documento/publicaciones/cuadernos/cuaderno%206%20 razonamiento.pdf.

Sánchez, G., García, M., Llinares, S. (2008) La Comprensión De La Derivada Como Objeto De investigación En Didáctica De La Matemática. (Consultado: 13/04/2011). Disponible en línea: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-43622008000200005&script=sci_arttext&tlng=es

Tellechea, E. (2004) Un Aparato Virtual para trazar la Función Derivada: su uso en la enseñanza. Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México. (Consultado: 13/04/2011). Disponible en línea: www.mat.uson.mx/eduardo/3-Tellechea%20Armenta-inLav.pdf.

Takeuchi, Yu. (1973). *Cálculo elemental.* Bogotá: Universidad Nacional. Colombia.

Volver al índice Comunicaciones Breves

[3] El propósito general de esta actividad propuesta por Samper y otros (2003), sobrepasa los objetivos y la intención de nuestra secuencia de actividades (los cuales giran en torno a conceptualizar la noción de derivada), por tanto, el diseño de esta actividad se modifica y se restringe a nuestros propósitos y no lleva al estudiante a realizar la demostración formal y axiomática del objeto de estudio.

El papel de razonamiento covariacional en las interacciones en un ambiente dinámico

Luisa Fernanda Moreno Patiño (ponente)
Universidad Pedagógica Nacional, p.lufemoreno@gmail.com

Hernán Díaz Rojas
Universidad Pedagógica Nacional, hdiaz@pedagogica.edu.co

Resumen. Se presenta un avance del estudio en relación a las interacciones que reflejan algún razonamiento covariacional en estudiantes de grado séptimo, en un ambiente dinámico, cuando se enfrentan a tareas donde subyace el fenómeno de depredación-presa (lobos-ovejas)

Palabras clave: Interacciones, variación, razonamiento covariacional y modelo Depredador-Presa.

1. INTRODUCCIÓN

En esta comunicación se presentan algunos avances del trabajo de grado titulado "*El papel de la variación en las interacciones en un ambiente dinámico*" el cual, se está adelantando como requisito para grado en la Maestría en Docencia de las Matemáticas, de la Universidad Pedagógica Nacional. El trabajo se inscribe en el grupo de investigación de *Didáctica del Cálculo*.

El aprendizaje de las matemáticas se fundamenta principalmente en las interacciones entre los participantes de la clase, por tal motivo, es necesario analizar las características de este proceso y la manera cómo influyen los contenidos matemáticos en el mismo. (Cantoral & Reséndiz, 2003; Reséndiz, 2009); lo anterior, motivó a que en el trabajo de grado se plantee como hipótesis que: al favorecer los procesos de interacción durante la construcción de significados en la variación, se promueva un aprendizaje inicial del cálculo, para este caso en particular en el grado séptimo de Educación Básica. Surge como pregunta orientadora del trabajo de grado: ¿Cuáles son las características de las interacciones entre los participantes de la clase de grado séptimo, cuando se emplea algún razonamiento covariacional para analizar el fenómeno de Depredador-Presa? En esta comunicación se hace referencia a la indagación del razonamiento covariacional.

Esta ponencia se encuentra organizada de la siguiente manera: inicialmente, se describe el marco de referencia y los procesos metodológicos utilizados en la investigación; luego, se presenta algunos fragmentos de interacción, que ejemplifican los tres niveles iniciales de razonamiento covariacional. Finalmente se presentan algunas reflexiones en relación a la experiencia investigativa.

2. MARCO DE REFERENCIA

En el presente marco de referencia se describen los constructos que componen el estudio de los niveles de razonamiento (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen & Hsu, 2002), entre los que se encuentran:

- **INTERACCIONES:** Blandón, Molina & Vergara (2006, citado en Arias 2009, p.35) afirma que:

  Desde una perspectiva general, se comprenden como los procesos de asociación de unos actores conscientes con otros, entre los que se produce un intercambio, una orientación y una afectación de la conducta de unas personas con respecto a las demás, y con las cuales se establece una relación determinada. Estos procesos de interacción entre los miembros de un grupo específico generan una red de relaciones edificadoras de organización social y cultural.

  En este sentido, la interacción es un proceso por el cual las personas se comunican e intercambian ideas para construir y negociar significados en diferentes contextos como el aula de clase.,

- **DIFERENCIA ENTRE CAMBIO Y VARIACIÓN:** Cantoral, (2005. p.464) afirma que:

  La noción de *cambio* denota la modificación de estado, de apariencia, de comportamiento o de condición de un cuerpo, de un sistema o de un objeto; mientras que la *variación*, la estamos entendiendo como una cuantificación del cambio, es decir, estudiar la variación de un sistema o cuerpo significa ejercer nuestro entendimiento para conocer cómo y cuánto cambia el sistema o cuerpo dado.

- **DIFERENCIA ENTRE VARIACIÓN Y COVARIACIÓN:** Posada et al (2006, p.27) proponen que en el identificación de la variación implica:

  En este se hace énfasis en los procesos que implican determinar la forma como una o varias cantidades de magnitud varían con respecto a la variación de otra u otras. En un sentido más estricto, la variación implica apreciar que dos o más cantidades de magnitud covarían, de tal forma que el cambio en una o algunas, determina cambio(s) en la(s) restante(s). Ahora bien, en el caso que esta covariación se pueda expresar a través de un modelo funcional, entonces se dice que las cantidades de magnitud están correlacionadas.

- **COVARIACIÓN:** Ferrari (2004, citado en Avila 2005, p.30) considera la covariación como "la relación entre las variaciones simultáneas de dos cantidades".

  Determinar las diferencias entre cambio, variación y covariacion, permitieron diseñar la secuencia de actividades que tenían como objetivo promover discusiones en torno a la variación y no al cambio, se esperaba que, por ejemplo, en las interacciones de los estudiantes emplearan expresiones como aumenta o disminuye en cambio de: había menos, mas, ganar, perder, etc.

- **NIVELES DE RAZONAMIENTO COVARIACIONAL:**

  Carson et al (2003) plantean un marco de referencia conceptual para los cinco niveles de razonamiento covariacional; que se le atribuye a un estudiante cuando sus comportamientos exhiben cierto tipo de sus acciones mentales, entre los que se encuentran: nivel de coordinación (N1), nivel de dirección (N2), nivel de coordinación cuantitativa (N3), nivel de razón promedio (N4) y nivel de razón instantánea (N5).

  Teniendo como referente la propuesta presentada en los estándares de matemáticas (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2006) en relación al pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos para grado séptimo, se espera que los estudiantes empleen los tres primeros niveles de razonamiento para solucionar las tareas.

En la sección «Análisis de Niveles de razonamiento covariacional» se describen cada una de los niveles identificados en la población de estudio, hasta el momento.

3. PROCEDIMIENTOS METODOLÓGICOS

a. POBLACIÓN Y PROCEDIMIENTO.

Este trabajo se realizo en la Institución Educativa Rural Departamental Limoncitos sede Cucharal del municipio de Pacho (Cundinamarca), con una muestra de dos parejas de estudiantes de grado séptimo. La muestra focal se organizo con en dos grupos de estudiantes, que según el profesor, poseían un desempeño académico alto y superior, además de habilidades comunicativas.

Para el diseño y ejecución de la secuencia de las actividades, se empleó el programador de ambiente modelados NetLogo 3.1.4, debido a que, este permite a los estudiantes visualizar la simulación y reconocer las estructuras del modelo, lo que permite que ellos analicen la situación, establezcan conjeturas, verifiquen y discutan sus ideas con el fin de construir conceptos asociados a la variación. En particular, se empleó la simulación del Modelo Depredador-Presa (lobos y ovejas) en el cual, se presenta la dinámica de interaccion entre dos especies en un ecosistema, donde se vinculan los aspectos de la variación, como por ejemplo analizar cómo el crecimiento de una población afecta a la otra y por ende al ecosistema.

b. MÉTODOS DE RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN.

Para este estudio, se necesitaba obtener información que atendiera a (Martínez, 2005):

El contenido y la forma de la interacción entre estudiante.

El contenido y la forma de la interacción con el profesor y los estudiantes.

Los registros de archivos, documentos, artefactos y otros.

Teniendo en cuenta, lo anterior se incorporó elementos de corte etnográfico, como en el caso de la recolección de información a través: observaciones, grabaciones de audio y video (cinematografía), notas personales y fotos acerca de las interacciones entre estudiantes de cada grupo focal durante 7 sesiones; además de realizaron sus respectivas transcripciones.

4. ANÁLISIS DE LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO COVARIACIONAL

A continuación, se describen los tres primeros niveles de razonamiento covariacional en relación a los comportamientos específicos que han sido observados en la población de estudio frente a una tarea.

NIVEL 1. COORDINACIÓN: Sustenta la acción mental de coordinar el cambio de una variable en la otra variable. Se han identificado estas acciones cuando los estudiantes expresan que son consientes de:

A medida que el tiempo cambia el numero de ovejas también.

A medida que el numero de ovejas cambia el numero de lobos también.

A medida que la cantidad de nacimientos de lobos cambia, el numero de lobos también.

A medida que la cantidad de alimento para lobos cambia, el numero de lobos también.

…

Como se evidencia en el siguiente fragmento:

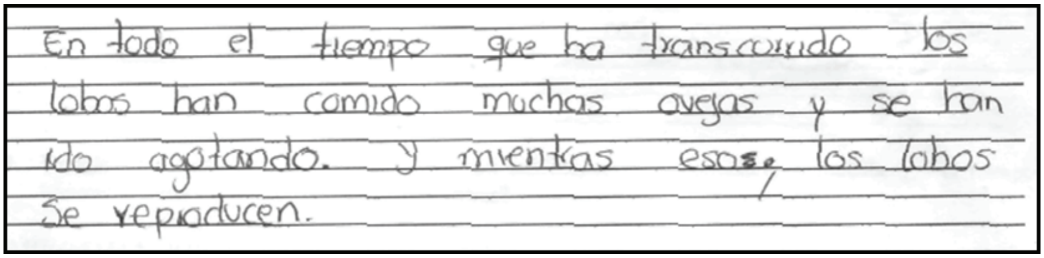

En todo el tiempo que ha transcurrido los lobos han comido muchas ovejas y se han ido agotando. y mientras esos, los lobos se reproducen.

Figure 1: Fragmento. Solución tarea: Propongan una descripción de lo observado…

NIVEL 2. DIRECCIÓN: Sustenta la acción mental de coordinar la dirección (aumento o disminución) del cambio de una variable mientras se consideran cambios en la otra variable. Se han identificado estas acciones cuando los estudiantes verbalizan:

A medida que el tiempo transcurre (aumenta), el número de ovejas aumenta o disminuye.

A medida que el número de lobos aumenta, el número de ovejas disminuye.

A medida que la cantidad de nacimientos de lobos aumenta, el número de lobos aumenta.

A medida que la cantidad de alimentos de lobos aumenta, el número de lobos aumenta.

entre otros…

Como se evidencia en el siguiente fragmento:

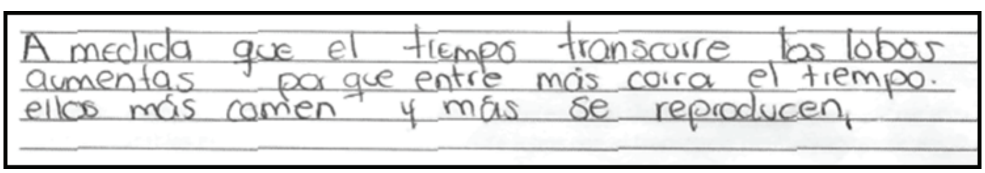

A medida que el tiempo transcurre los lobos aumentas por que entre más corra el tiempo. ellos más comen y más se reproducen,

Figure 2: Solución tarea: … ¿Qué sucede con la población de lobos?

NIVEL 3. COORDINACIÓN CUANTITATIVA: Sustenta la acción mental de coordinar la cantidad de cambio de una variable con la cantidad de cambio de la otra variable. Se han identificado estas acciones cuando los estudiantes discuten en consecuencia sobre cómo:

Cambia el número de lobos mientras consideran incrementos en el tiempo.

Cambia el número de ovejas mientras consideran incrementos en la población de lobos.

…

Como se evidencia en el siguiente fragmento:

8	Lady:	**¿Cada vez había el doble de lo que había**? [haciendo referencia al número de lobos, cuando discuten sobre la pregunta ¿a medida que el tiempo transcurre que sucede con

		la población de lobos?]
9	Profesora:	¿Cada vez hay el doble de lo que había? ¿Cada vez veían que había más y más?
10	Lady:	Sí, señora.
11	Yadir:	Aumentaron un poquito, y de pronto, aumentaron harto los lobos…

Figure 3: Transcripción.

5. REFLEXIONES

A través del análisis de las implementaciones, se reconoció que la gestión del profesor influye positiva o negativamente en la construcción de significados a través de las interacciones. En este sentido, se hace necesario analizar las posibles soluciones de los estudiantes y las posibles actuaciones del profesor frente a estas.

Al identificar comportamientos de los estudiantes que no se ajustan a las acciones mentales propuestas por Carson et al (2003), se hace necesario ampliar los niveles de razonamiento, desde unos más elementales hasta subcategorizas de los mismos.

para el estudio de los procesos de interacción se hace necesario implementar tareas abiertas (da Ponte, 2004) donde los estudiantes construyan significados a través de la comunicación en el aula.

REFERENCIAS

Avila, J. (2005). *Representaciones estudiantiles de la variación. Un estudio con bitácoras reflexivas.* Tesis de maestría no publicada. Instituto Politécnico Nacional. Centro de Investigación en Ciencia. Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. Mexico.

Cantoral, R., Molina, G., Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la predicción. En J. Lezama (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 18 (1), 463 – 468. México: Clame AC.Cantoral, R. & Reséndiz, E. (2003). El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: Un estudio en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. México, 6 (2), 133 – 154.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 352-378.

da Ponte, J. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En L. Santos, J. Giménez, y J. da Ponte (Coords.), *La actividad matemática en el aula: homenaje a Paulo Abrantes* (pp. 25-34). Barcelona, España: Graó.

Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006). *Estándares básicos de* competencias *en matemáticas.* Bogotá, Colombia: Editorial Magisterio.

Posada B, Fabián et al. (2006). Módulo 2. Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico. Ed. Artes y Letras. Gobernación de Antioquia.

Reséndiz, Evelia. (2009). Discurso, comunicación e interacción en la clase de matemáticas. *Revista Internacional de Ciencias Sociales y Humanidades, SOCIOTAM,* 19 (2),115-134. Universidad Autónoma de Tamaulipas. Ciudad Victoria, México.

Volver al índice Comunicaciones Breves

La Problematización de la Definición en Estudiantes para Profesor de Matemáticas

Liseth Arévalo
Fabián Rojas
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Resumen. El trabajo presentado está fundamentado en la elaboración del significado de curva diferenciable, apoyado para ello en la resolución de problemas y la metodología propuesta por Mason, Burton y Stacey (1989); respecto del proceso metacognitivo desarrollado por los estudiantes para profesor que integran una comunidad de aprendizaje.

Para lo que se propone una investigación en diseño (Collins, 2004) en cuanto a las fases del estudio a elaborar, teniendo en cuenta la importancia de la elaboración de una conjetura, la recolección de datos y el posterior análisis de los mismos entorno de la conjetura planteada, a partir de la elaboración de viñetas de acuerdo a Gavilán, García y Llinares (2007).

1. Introducción

Esta investigación pretende reflexionar sobre la manera de resolver problemas de matemáticas; a través de procesos como clasificar, particularizar, generalizar y argumentar; y tres fases de trabajo las cuales son de abordaje, de ataque y de revisión (Mason, Burton & Stacey, 1989).

Igualmente, este trabajo busca dotar de sentido de acuerdo a Radford (2006) los objetos conceptuales que encuentran en la cultura, teniendo en cuenta que el aprendizaje es visto como un proceso de elaboración activa de significados, proceso que se concibe como el "*paso al objeto*" u objetivación.

En este sentido, se emplea la resolución de problemas de manera grupal, teniendo en cuenta la relevancia de la actividad colectiva como necesidad en la construcción de significados, para ello atendiendo a que la objetivación es un proceso social, donde se ejerza el saber-con-otros, dado que el individuo es un agente en tanto, reflexiona sobre su aprendizaje y lo comparte con otros (Radford, 2006).

Con las consideraciones anteriores se propone la siguiente pregunta que orienta el trabajo:

¿Cómo elabora significados una comunidad de aprendizaje de estudiantes para profesor de matemáticas de la definición formal de curva diferenciable?

2. MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

Se parte de la premisa que una sola teoría o un solo enfoque no es suficiente para explicar un fenómeno complejo como lo es el aprendizaje (Morín, 2000, Vasco, 2009). De hecho, explicar el aprendizaje requiere de elementos teóricos soportados en la interacción social y elementos teóricos soportados en la cognición humana (Morín, 2000). Por esta razón para describir cómo se da la elaboración de significados en una comunidad de aprendizaje, se utilizarán las teorías que en nuestro criterio permiten explicar el aprendizaje, siendo estas de orden sociocultural y cognitivo.

2.1 PERSPECTIVA SOCIOCULTURAL DEL APRENDIZAJE

En torno a la perspectiva sociocultural del aprendizaje, nos referiremos únicamente a la perspectiva de Radford (2006) respecto a la teoría cultural de la objetivación.

Radford (2006) identifica la naturaleza reflexiva del pensamiento, destacando que el aprendizaje es producto de la reflexión, mencionando que el pensamiento es una construcción que relaciona el entorno y el individuo que lo modifica según su sentido subjetivo.

En la teoría de la objetivación, el aprendizaje no consiste en construir o reconstruir un determinado conocimiento, sino que se trata de dotar de sentido los objetos conceptuales que se encuentran depositados en la cultural, por lo que constituye un proceso activo de elaboración de significados. Para lo cual siguiendo a Radford (2006) las fuentes de adquisición del saber resultan de la interacción social y del contacto con el mundo material.

Radford (2006) expresa que la interacción social es consustancial al aprendizaje. Así como, los artefactos constituyen los instrumentos, objetos, sistemas de signos, entre otros, en los que se encuentra depositada la sabiduría histórica de la actividad cognitiva de las generaciones pasadas.

Para hacer referencia a comunidad de aprendizaje, Llinares y Olivero (2009) se refieren a está como un grupo de personas que se involucran en un proceso social de aprendizaje para realizar el análisis de la enseñanza en términos de aprendizaje. Ante lo cual destacan tres acciones propias de estas comunidades, que corresponden a: la participación, la cosificación y la interacción social.

2.2 PERSPECTIVA COGNITIVA DEL APRENDIZAJE

En esta perspectiva se expondrá el grupo de teorías de orden cognitivo a usar; estas son resolución de problemas cognitiva-clásica (Santos, 2007 y Mason, Burton & Stacey, 1989) y resolución de problemas desde la perspectiva del pensamiento matemático avanzado (Tall, 1991).

Para hablar de resolución de problemas es necesario clarificar qué se entiende por cada uno de los términos que lo componen. Problema para Schoenfeld (1985) (como se cita en Santos, 2007) hace referencia a una tarea que genera conflicto para quien trata de hacerla y; el termino resolución se asocia a los procesos que se llevan a cabo para dar solución y mostrar el resultado en un problema. Ahora bien, la resolución de problemas es definida por Tall (1988) como una actividad creativa, la cual involucra varios procesos en su resolución.

Sin embargo, la resolución de problemas no solo enfatiza en los procesos que debe llevar a cabo el estudiante para resolver el problema, sino que además hace relevancia a lo que Schoenfeld (como se cita en Santos, 2007) denomina *"metacognición"*, como la comprensión del propio conocimiento cognitivo.

La metodología empleada para registrar el proceso como resolutores desde las ideas ya expuestas, corresponde a la metodología propuesta por Mason et al. (1989), debido a que dicha metodología da pauta para saber cómo resolver un problema, mediante una serie de procesos posibles de relacionar con la resolución de problemas.

El pensamiento matemático avanzado (PMA) es visto como la forma de desarrollar un determinado conocimiento mediante la abstracción, donde se busca que un individuo construya un conocimiento, lo comunique a su grupo, sea capaz de presentarlo en diferentes representaciones y además lo trasmita a otras personas fuera de su comunidad.

Por otra parte, Tall & Vinner (1981) mencionan dos estructuras cognitivas respecto del concepto en Matemática Avanzada, que corresponden a:

- La imagen del concepto, como la estructura cognitiva en su totalidad que se asocia al concepto; y
- La definición del concepto, como la forma de palabras que son usadas para la explicación de la imagen del concepto.

3. METODOLOGÍA

La metodología que orienta la investigación se fundamenta en la Investigación en Diseño (Collins, 2004). Este enfoque metodológico se caracteriza por ser una estrategia de investigación, en la que un grupo de investigadores observa el comportamiento de comunidades alrededor del estudio de una situación diseñada con el propósito de desarrollar aprendizaje. En ese sentido, el trabajo desarrollado observó una comunidad que estudió su proceso de resolución de problemas a través del ejercicio de metacognición.

Por tanto, se consideran dos momentos discriminados en los cuales se asumieron dos tipos de roles claramente diferenciados:

(1) *Investigación*: Refiere a los espacios en los cuales se elabora un diseño y se analiza de acuerdo con las fases propuestas por Collins (2004)

(2) *Ambiente de Aprendizaje*: Refiere a los espacios, recursos, artefactos, heurísticas y otros aspectos que caracterizan la resolución del problema

El proceso de investigación estará soportado en las fases propuestas por Collins (2004) de la siguiente manera:

Fase 1: Diseño del experimento

Se diseño un ambiente de aprendizaje basado en la resolución de problemas; considerando para ello un grupo conformado por dos estudiantes quienes dan respuesta al problema planteado, y el profesor quien actúa como un miembro más de la comunidad en el sentido de Radford (2006).

Fase 2: Modificación del diseño

Esta fase se da cuando algunos de los elementos críticos del diseño no cumplen con los requerimientos necesarios para hacer un seguimiento de la investigación.

Fase 3: Vías e Instrumentos para analizar el diseño

En esta fase se tienen en cuenta la disposición de los instrumentos que registran el proceso de resolución en torno a la elaboración de significados, dichos instrumentos son: video-grabaciones, grabaciones de voz y cuaderno resolutor

Fase 4: Análisis de los datos

El análisis de los datos se efectúa desde la idea de viñeta como:

> Un informe sobre aspectos de la práctica que integra información de diferentes fuentes y la descripción e interpretación de lo que sucede en los segmentos de enseñanza (Gavilán et al., 2007, pp. 161)

La elaboración de las distintas viñetas como unidades de análisis permite el análisis de cada segmento de enseñanza, los cuales deben ordenarse cronológicamente para que posteriormente se describa e intérprete lo que sucede en dichos segmentos.

4. Resultados

Para el análisis de datos se toman como referencia la estrategia empleada por los resolutores para la comprensión de la definición formal de curva diferenciable que consistió en dividir la definición en conceptos y determinar lo que se conocía y lo que no, para posteriormente hacer un estudio respecto de lo que no se tenia idea empleando como recursos textos de geometría diferencial, artículos en internet sobre el tema a estudiar y la ejemplificación mediante uso de los software geogebra y derive y; la intervención que tienen los elementos críticos del diseño en la resolución del problema.

Mediante la elaboración de la viñeta se tomo registro de los segmentos del proceso que evidenciaban la negociación respecto de la estrategia a utilizar (como comunidad de aprendizaje), las ideas expuestas por los resolutores en torno a la utilidad e importancia del proceso de resolución registrado y la pertinencia de la manera de abordar el problema.

4. Conclusiones

La resolución de problemas permite mediante la regulación, que un resolutor tenga conocimiento sobre su aprendizaje evidenciado en el proceso llevado a cabo para resolver un problema, lo que permite que se haga un estudio metacognitivo teniendo en cuenta la idea que el pensamiento es evidenciable.

El estudio de una definición permite entender la matemática desde lo que se cree más simple pero que desarrolla un conocimiento complejo.

Referencias

Gómez, J. (2009). El Proceso de Elaboración de Significados de la Definición de Espacio Topológico: Un Estudio de Caso. Trabajo de grado (no publicada). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Llinares, S. & Olivero, F. (2007). Comunidades y redes virtuales de profesores de matemáticas promoviendo tecnologías, interacciones y nuevas formas de discurso. España.

Mason, J., Burton, L. & Stacey K. (1989). *Pensar matemáticamente*. Madrid: Labor.

Morin (2000) *Introducción al pensamiento complejo*. Edición española a cargo de Marcelo Pakman. Barcelona: Gedisa.

Radford, L. (2006). Elementos de Una Teoría Cultural de la Objetivación. *Relime*. (*Número especial*), 103-129.

Santos, L. (2007). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos*. México: Trillas.

Tall, D. (1988). The Nature of advanced mathematical thinking: a discussion paper for PME. Hungría.

Tall. D. (1991). *The Psychology of Advanced Mathematical Thinking*. Inglaterra: Universidad de Warwick, Mathematics Education Research Centre.

Tall, D. & Vinner, S (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics, 12* (2), 157- 169.

Vasco, C. (2009). ¿Son las perspectivas socioculturales de las matemáticas y de las pedagogías de las matemáticas incompatibles con las perspectivas cognitivas? *Memorias del Décimo Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.* Bogotá: Asocolme.

Volver al índice Comunicaciones Breves

Análisis epistemológico del método de exhaución y las nociones de área manejadas por Euclides y Arquímedes para el mejoramiento de los procesos de enseñanza de la integral

Erika Katherine Ariza Suarez
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Daniel Mauricio Cifuentes León
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Resumen. A partir de este trabajo se busca establecer una relación entre el análisis epistemológico de la matemática con el diseño de situaciones problema que ayuden al proceso de enseñanza-aprendizaje de la integral, para ello se hace una documentación y estudio sobre la configuración de las ideas de área y procesos de integración reflejadas en los trabajos de Euclides y Arquímedes, tomando como referencia proposiciones y definiciones incluidas en textos como los "Elementos" y "El método relativo a los teoremas mecánicos", en las cuales se aborda el método de exhaución, cuya importancia radica en ser fundamento de la integral, permitiendo así rescatar elementos del significado del concepto: lenguaje, argumentos, procedimientos y relaciones con otros conceptos, que el docente puede utilizar como referente al plantear, ejecutar y evaluar los procesos de enseñanza, y de allí determinar algunas reflexiones acerca de la relación entre las situaciones problema, el conocimiento del docente y el análisis epistemológico, para tal efecto se ilustran cuatro de estos elementos.

Al realizar una mirada sobre la matemática escolar actual, se evidencia la tendencia a presentar el objeto matemático integral de una manera formal, conllevando a un aprendizaje memorístico; su enseñanza se torna cada vez más distante de la resolución de situaciones problema, sustituidas por la solución de ejercicios donde se requiere de la aplicación de reglas o algoritmos únicos Sin embargo, al reconocer que el significado de la matemática resulta principalmente desde los problemas que se resuelven, mas no de las definiciones y las fórmulas, como indica Godino (2003), se hace necesaria una discusión sobre la manera de reformular los procesos de enseñanza en búsqueda de la comprensión de la matemática.
Asumiendo la comprensión de los objetos matemáticos y la resolución de problemas como pauta principal para la educación, se deben buscar situaciones propicias, que contextualicen al estudiante en la resolución de un problema y permitan al docente ser guía que complejice y oriente de manera crítica la situación, para ello debe reconocer elementos de la configuración del concepto a enseñar, que le permitan hacerse una idea sobre el significado que quiere que los estudiantes construyan. Frente a esto se plantea "el análisis epistemológico" como herramienta para tener en cuenta a la hora de diseñar y estructurar los procesos de enseñanza. Además esta relación se define a partir del estudio de los objetos matemáticos, desde los elementos de significado descritos en la teoría de las

funciones semióticas expuesta por Godino (2003), los cuales se ilustrarán a continuación desde el problema de cuadraturas a bordado por Euclides y Arquímedes.

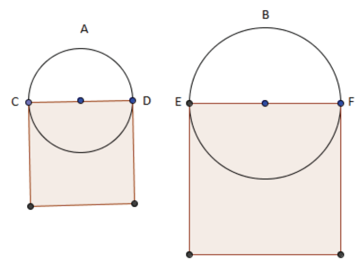
Proposición (XII, 2) de los Elementos. Aplicación del método de exhaución.

Situación – Problema: *"Los círculos son uno a uno como los cuadrados de sus diámetros". Se b*usca determinar la relación de proporcionalidad entre las magnitudes de área y longitud.

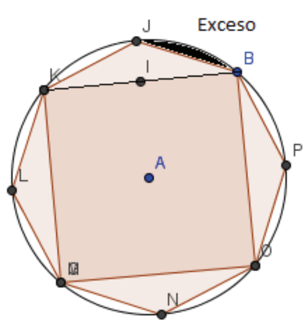
Procedimientos y algoritmos

Apoyado en la representación gráfica, Euclides concreta y denomina las magnitudes que serán estudiadas, mediante pasos lógicos:

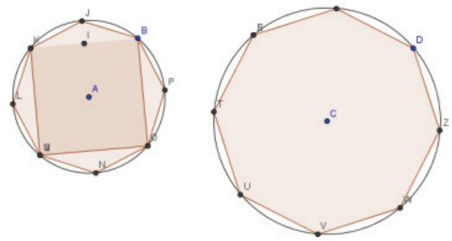
- Plantear que el cuadrado de los diámetros de ambos círculos guardan una razón equivalente a la razón que guardan los círculos respectivamente.



- Se plantea desde la negación de la tesis, es decir, que si estas razones no guardan proporción, entonces los cuadrados de los diámetros serán entre sí como uno de los círculos (B) es a un área mayor o menor que el área del segundo circulo (A).
- Se inscriben y circunscriben cuadrados a un circulo (A), "el cuadrado inscrito es la mitad del cuadrado circunscrito, y como el círculo es menor al cuadrado circunscrito, el cuadrado inscrito será mayor a la mitad del circulo"
- Se construye un polígono inscrito en el círculo A, de forma que cada lado del cuadrado inscrito sea la base de un triángulo isósceles que se corta con el segmento circular (ver figura), este triángulo será mayor a la mitad del segmento circular resultante de inscribir un cuadrado en el circulo A.
- De esta manera el exceso con el que el polígono (octágono) se diferencia del circulo, es menor a la mitad del exceso con el que el círculo difería del cuadrado inscrito en él.



- Se inscribe un polígono semejante en el circulo B, de forma que guarde la misma razón con el cuadrado del diámetro donde está inscrito, así como la razón entre el polígono inscrito en el circulo A y el cuadrado de su diámetro.



- Si $\bar{d}$ es el diámetro del circulo A, $\bar{D}$ es el diámetro del circulo B y P representa a los polígonos inscritos en A y B, se tiene que por la hipótesis asumida:

$$\frac{Cuadrado\ inscrito\ en\ A}{B} = \frac{d^2}{D^2} = \frac{P\ inscrito\ en\ A}{P\ inscrito\ en\ B}$$

Además $\frac{A}{P\ inscrito\ en\ A} = \frac{B}{P\ inscrito\ en\ B}$

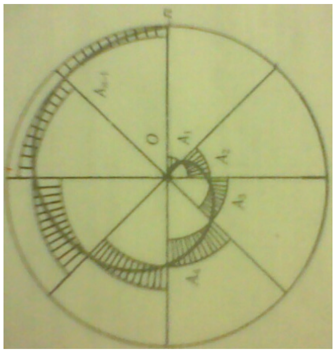
- Por la hipótesis, A es mayor que el cuadrado inscrito en él, además B es mayor que el polígono en él inscrito, y dado que la razón entre B y el polígono inscrito en él, es igual a la razón entre el cuadrado inscrito en A y el polígono inscrito en A, se llega a una contradicción, pues el cuadrado inscrito en A al ser mayor que el polígono inscrito (por la proporción expuesta en la hipótesis), también resultaría ser menor de acuerdo con la construcción, pues al aplicar el método de exhaución el exceso del circulo A sobre el polígono es menor a la mitad del exceso del circulo A sobre el cuadrado inscrito en él.
- Por tanto resulta imposible que el cuadrado sea mayor y menor a la vez que el polígono inscrito, entonces la razón de los cuadrados de los diámetros, no es igual a la razón entre el circulo B y un área menor al círculo A.
- De manera similar se prueba con un área mayor al círculo A, y como la razón entre los cuadrados de los diámetros de los círculos A y B, no es igual a la razón entre el círculo B y un área mayor o menor al círculo A, entonces la razón se cumple solo entre el círculo B y el círculo A, quedando así demostrada la proposición, por doble reducción al absurdo.

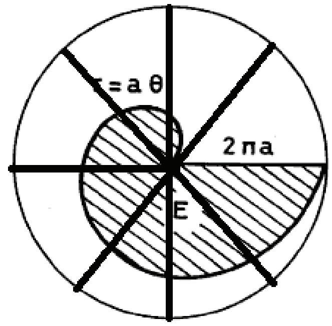
Proposición 24. “El método relativo a los teoremas mecánicos”

Arquímedes plantea en esta proposición que el área de la primera vuelta de la espiral es equivalente a una tercera parte del primer círculo (primera vuelta y primer círculo, hacen alusión a las figuras formadas desde la línea que une el punto inicial con el punto final donde se determina el primer giro).

Procedimientos y algoritmos:

- Construcción de la primera vuelta de la espiral inscrita en el primer círculo.
- División del círculo en sectores por medio de los radios.
- Se forman dos sucesiones de sectores circulares definidos por los cortes entre los radios del círculo y la espiral:





- Tras delimitar dos sucesiones de sectores circulares, una inscrita y otra circunscrita, Se plantea que la diferencia entre el área de ambas sucesiones puede hacerse tan pequeña como se quiera, dependiendo de la cantidad de radios trazados.
- Arquímedes plantea por vía indirecta la demostración de esta proposición, asume que si el área de la espiral no es igual a la tercera parte del área del primer círculo, entonces debe ser mayor o menor.
- Apoyado en resultados de la proposición 10 del mismo libro, y en la proposición 2 del libro XII de los Elementos, mediante las cuales se garantiza que los sectores circulares semejantes, guardan entre si la misma razón que los cuadrados de sus diámetros, llegando a si a una contradicción con las suposiciones de que el área de la espiral es menor a la tercera parte del primer círculo, lo que conduce a garantizar su igualdad.

Tipos de argumentos

En las distintas proposiciones se evidencia la justificación desde etapas lógicas, necesarias para deducir la proporción o situación expuesta. El hilo de la demostración se apoya en proposiciones anteriores, tales como (X, 1), (XII, 2) y la Def. IV. Sin embargo Arquímedes conoce previamente el resultado de la demostración, por tanto niega la tesis como parte de la demostración, lo que lleva a establecer relaciones de proporcionalidad con un área mayor o menor al área de la espiral.

Se observa que si se inscriben en un círculo, primero cuadrados, luego octógonos, y se continúa duplicando el número de lados de los polígonos, el área comprendida entre el polígono y el círculo se va reduciendo en más de la mitad en cada paso. Se usa este argumento para generalizar la idea de que la diferencia entre el círculo y un área menor, puede ser tan pequeña como se quiera, por lo tanto el método de exhaución se usa para garantizar que cualquier polígono inscrito en un círculo, no puede guardar la misma razón con el cuadrado de su diámetro, como la razón entre el círculo y el cuadrado de su diámetro.

Un argumento importante se basa en determinar que la proporción no se da con una magnitud mayor o menor a la magnitud dada, definido como doble reducción al absurdo, pues si la magnitud buscada no es diferente al círculo, entonces debe ser igual.
En cuanto al lenguaje utilizado, es válido analizar la importancia de las distintas representaciones, ya sean geométricas, gráficas o verbales, incluyendo las descripciones formales o empíricas, dado que la comunicación es un proceso que permite no solo la transmisión de ideas, sino la comprensión de los objetos matemáticos desde la idea de signo y símbolo. Entre la comunidad académica circula la idea de las matemáticas como una disciplina formal, rígida y aburrida desde el propio lenguaje y

cantidad de símbolos utilizados, muchas veces porque los docentes no privilegian las representaciones a las que acuden los estudiantes.

Dentro de la revisión del problema de las cuadraturas desde las proposiciones, se evidencian elementos concernientes al lenguaje, procedimientos, argumentos y situaciones que al ser referenciadas en el diseño y gestión de procesos de enseñanza, permitirá poner en juego aspectos que aportan a la comprensión de la integral.

REFERENCIAS

Ministerio de Educación Nacional (2006) *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas* [Versión electrónica]. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Carrillo, J. & Contreras, C. (2000). *Resolución de problemas en los albores del siglo XXI: una visión desde múltiples perspectivas y niveles educativos.* España: Andaluza.

Gascón, J. *Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes* [Versión electrónica].

Godino, J. (2003). *Teoría de las funciones semióticas* [Versión electrónica], Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación. Granada: Universidad de Granada.

Vergnaud, G. (1990). Epistemológia y Psicologia de la educación matemática. En P. y. Nesher, *Mathematics and cognition: A Research Synthesis by the international group for the psichology of mathematics education* [Versión electrónica]. Inglaterra: Cambridge University.

Volver al índice Comunicaciones Breves

Desarrollo de la intuición espacial a partir de la representación plana y construcción espacial de los poliedros regulares convexos

Michael Jamid Aldana Boada[1], knight_8807@hotmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

1. Introducción

El hombre tiene unas primeras percepciones de su entorno usando todos sus sentidos, y el desarrollo de estas capacidades utilizando actividades para dicha tarea, hace que el estudiante pueda representar de mejor manera las construcciones espaciales que realiza en su mente, por ello la aplicación de la secuencia de actividades planteada para la investigación tiene como intención desarrollar la intuición espacial y ayudar a la comprensión y utilización de las propiedades de los objetos tridimensionales trabajados (poliedros regulares).

Ahora, la secuencia se planteo teniendo en cuenta investigaciones como las de Mitchelmore (1980) Soler (1991) y Lebrón (1986), para luego hacer énfasis en tres características importantes sobre el estudio de la intuición espacial:

- Reconocimiento de los polígonos regulares:
- Noción de regularidad en los poliedros:
- La representación de los poliedros regulares convexos:

A partir de las anteriores características se plantea la siguiente pregunta de investigación:

> *¿Cómo desarrollar la intuición espacial a partir de la aplicación de una secuencia de actividades que desarrolle la construcción espacial y la representación plana de los poliedros regulares convexos?*

2. Secuencia

Se compone de un pre-test, un pos-test y tres actividades, donde los estudiantes construyeron de manera espacial, representaron en el plano y analizaron los cinco poliedros regulares convexos.

3. Análisis

El análisis se realizó a partir de los siguientes tres aspectos:

[1] Estudiante del programa de Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas, LEBEM.

- *Observación y manipulación:* donde se hizo énfasis en las construcciones espaciales hechas por los estudiantes, analizando el desarrollo de la intuición a partir del trabajo manipulativo.

- *Representación plana de los objetos:* se estudió las representaciones planas de los objetos espaciales, donde los estudiantes llevaron un desarrollo en sus dibujos.

- *Interpretación de las construcciones y representaciones:* en este aspecto se analizo las interpretaciones que hace el estudiante de sus construcciones espaciales y planas, y como ello influye en el desarrollo de su intuición.

Así es que en cada una de las actividades planteadas, se realizó un análisis al mismo tiempo de los tres aspectos mencionados anteriormente.

4. CONCLUSIONES

- La experiencia en el aula junto con el lenguaje matemático indicado, hace que el desarrollo de la intuición sea más adecuado en el estudiante.
- Los estudiantes al reconocer diferencias de "forma" tienen que hacer aproximaciones mentales de los objetos y caracterizarlas desde su percepción, y si en esta diferenciación aparecen ciertas características dadas por la experiencia de cada individuo, su intuición estará mas desarrollada que en una caracterización meramente intuitiva.
- En el transcurso para el mejoramiento de la intuición espacial, los estudiantes hicieron evidente ciertas dificultades como:
    - Es mas difícil construir los poliedros usando cartulina que con palillos.
    - Los estudiantes adecuan sus construcciones según sus conocimientos o al nivel de su intuición espacial.
    - Las construcciones espaciales son de menor dificultad que las representaciones en el plano.

Volver al índice Comunicaciones Breves

Una relación entre el orden de las derivadas de la serie logarítmica y los parámetros de la distribución binomial negativa

Edwin Javier Castillo Carreño
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Jorge Andrés Coy Chacón
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Diego Orlando López Ruiz
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Leidy Natalia León Carvajal
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Juan Pablo Mojica Macias
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Resumen. Dada una variable aleatoria discreta, la función de densidad de probabilidad para ella, debe cumplir con que la serie obtenida al sumar las probabilidades puntuales debe converger a 1. Para el caso de la distribución de una variable binomial negativa, la cual mide el número de éxitos antes de obtener un número fijo de fracasos, la prueba de esta condición puede realizarse acudiendo a la serie logarítmica, y más exactamente, a las derivadas de distintos ordenes de esta serie, donde los parámetros de la distribución binomial negativa están relacionados con el orden de las derivadas de la serie logarítmica. Además, si se integra la serie asociada a la binomial negativa y se dan valores específicos a las constantes de integración se obtiene la serie de la distribución logarítmica y, partiendo de esto es posible dar una interpretación de dicha distribución.

Palabras clave: probabilidad, variable aleatoria discreta

1. INTRODUCCIÓN

La distribución Logarítmica fue trabajada por los estadísticos (Fisher y Corbet, 1943) al estudiar la repartición de mariposas en Malasia, específicamente al estudiar el número de polillas de diferentes especies capturadas en una trampa de luz en un periodo dado.

Considerando la expansión en serie de Maclaurin de

$$-\ln(1-x)$$

puede obtenerse la función de densidad de probabilidad de la serie Logarítmica, desde la cual es posible determinar la relación existente entre esta distribución y la Binomial Negativa.

2. DE LAS SERIES DE POTENCIAS CONVERGENTES A LAS FUNCIONES DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD

Suponga que se tiene una serie de potencias convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = L(x)$$

con a_n dependiendo solo de n, y x un número real en el intervalo de convergencia $(-r, r)$.

Es importante destacar que si una serie de potencias converge para todo $x \in (0,1)$ entonces, también para todo $x \in (0,1)$:

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\partial}{\partial x} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

y

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + c$$

Puede establecerse entonces una función de densidad de probabilidad de alguna variable aleatoria discreta finita como sigue:

$$P(n|x) = \begin{cases} \dfrac{a_n x^n}{L(x)}, & si\ n = l, l+1, \ldots; \\ 0, & en\ otro\ caso; \end{cases}$$

3. DE LA SERIE LOGARÍTMICA A LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL NEGATIVA

Partiendo de la función de densidad de probabilidad de la serie Logarítmica con parámetros $n = 0, 1, 2, \ldots$ y $x \in (0,1)$ es posible determinar la distribución Binomial Negativa, resultado que se obtiene efectuando las derivadas de la serie Logarítmica con respecto a x.

Al realizar la primera derivada, se obtiene la función de densidad de probabilidad de la distribución geométrica donde $n = 0, 1, 2, \ldots$ representa el número de sucesos antes del primer fracaso en una sucesión de experimentos de Bernoulli independientes con parámetro x.

Efectuando nuevamente el proceso de derivación se obtiene la función de densidad de probabilidad de la distribución Binomial Negativa con parámetros 2 y x, para $n = 0, 1, 2, \ldots$

Es posible entonces determinar una relación entre el parámetro de la distribución Binomial Negativa y el orden de la derivada de la serie Logarítmica.

4. DE LA BINOMIAL NEGATIVA A LA SERIE LOGARÍTMICA.

En esta sección se verá, cómo usando la integración de la serie definida anteriormente para la Binomial Negativa, puede encontrarse la Serie Logarítmica dando valores específicos a las constantes de integración.

Tomando la serie definida para la Binomial Negativa de parámetros (n, k) se integra eligiendo una constante de integración apropiada, obteniendo así la serie binomial de parámetros $(n-1, k)$. Es claro que dicho proceso solo encontrará alguna clase de dificultad al tener que integrar la serie geométrica, para cuyo caso se toma otra constante de integración para que la serie quede bien definida y de esta manera pueda determinarse la serie asociada a la distribución Logarítmica.

5. CONCLUSIONES

El parámetro de números de fracasos de la Binomial Negativa es el número de derivadas necesario para obtener la serie Binomial Negativa de la serie Logarítmica.

La distribución Logarítmica es interpretada usando el método presentado como una distribución para modelar la probabilidad de obtener n sucesos haciendo que el número de fracasos del experimento de la Binomial Negativa tienda a cero.

El vínculo para ir de una distribución a otra sigue el siguiente algoritmo. Primero, se escoge una función de densidad de probabilidad. Segundo, se encuentra la serie asociada a la función de densidad de probabilidad. Tercero, se deriva o integra esa serie tantas veces como sea necesario para obtener la serie asociada a la función de densidad de probabilidad buscada. Cuarto, se divide el término general de la serie obtenida por su suma. Finalmente, si no se sigue el cuarto paso del algoritmo planteado anteriormente, y en cambio de esto, se divide la serie obtenida en el tercer paso por su suma, se encontrara una manera de probar que la función de densidad de probabilidad, de la distribución asociada a la serie, suma uno.

REFERENCIAS

Sadinle, M. (2008). Relacionando las distribuciones binomial negativa y logarítmica vía sus series asociadas. *Revista Colombiana de Estadística*.

Volver al índice Comunicaciones Breves

La unidad similar a partir de las formas geométricas de la sección áurea

Liz Pieranllely Acero[1]
Mónica Andrea Díaz[2]
Héctor Mauricio Becerra G.[3]
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Resumen. *Contemplando las necesidades del currículo actual de matemáticas y las investigaciones que son referidas al desarrollo del pensamiento multiplicativo, especialmente las relacionadas con la construcción de la unidad similar por su desarrollo de conceptos como la razón y proporción en el contexto geométrico, se realiza una reflexión teórica, que permita la aproximación de la unidad similar como objeto de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, respondiendo así, a la necesidad de explorar y plantear un análisis de la sección aurea en las formas geométricas que son construidas por los estudiantes a través de formas primitivas como lo señala la conjetura splitting.*

En los Lineamientos Curriculares (1998) se propone la búsqueda y el planteamiento de nuevas alternativas que involucren situaciones matemáticas que permitan el óptimo desarrollo de los contenidos establecidos, específicamente en el desarrollo del pensamiento espacial y sistemas geométricos; desde esta perspectiva, se tiene en cuenta la propuesta de la conjetura *splitting* hecha por Confrey (1994) como forma alterna que permita la comprensión y construcción del sistema de numeración desde acciones primitivas como la reproducción y/o relaciones de semejanza que pueden ser desarrolladas a través de las transformaciones geométricas; generando la construcción de estos diferentes sistemas numéricos a través de situaciones de tipo exponencial que presentan un *splitting*; sin la necesidad de recurrir al conteo y la suma reiterada como actividad matemática.

El *splitting o similaridad* se define como:[4]

> *en un mundo n- splitting, donde la acción sucesora es multiplicar por n, la unidad es n. En splitting, n puede ser visto como la acción multiplicativa invariante entre sucesor y predecesor, esta es la acción repetida. (Confrey, 1994, p.16)*

De esta manera se caracteriza el *splitting* o *similaridad* por repetir varias veces un original; construyendo la multiplicación a partir de un *splitt* o *unidad similar*,[5] que a través de acciones como

[1] Estudiante de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, correo-e: darmak88@yahoo.com

[2] Estudiante de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas. correo-e: andreadg_323@hotmail.com

[3] Docente de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas. Integrante del grupo de investigación MESCUD (Matemáticas Escolares –Universidad Distrital), correo-e: hemabe2@yahoo.es

[4] *Similaridad* es el término propuesto por Becerra y Romero (2008) para hacer una traducción al castellano de *splitting*.

[5] Concepto de unidad en el mundo del splitting denominado por Becerra y Romero (2008, párr.11) "*como la relación invariante entre el sucesor y predecesor siendo esta, en el mundo de la similaridad: la razón*".

agrandar, reiterar, repetir, entre otros, se genera la creación de un conjunto de múltiples grupos iguales. Las situaciones que contribuyen al desarrollo de la *unidad similar* se generan a partir de contextos que presentan un crecimiento, involucrando la forma del objeto, tal como lo hace la semejanza en las formas geométricas y que permite el desarrollo del concepto de recursión[6] (como son los procesos de ampliación y reducción), propiciando en el estudiante la identificación de la unidad similar y las veces que ésta se repite, para formar una figura comprendida por sub-partes que conservan su forma, pero que se caracterizan por cambiar de tamaño.

Uno de los contextos que evidencia situaciones de crecimiento y que ha sido estudiada desde la época Griega es la *sección aurea*, la cual permite a partir del análisis de sus formas geométricas reconocer la proporción y la recursión como constructos de figuras geométricas, lo que genera el desarrollo de las diferentes acciones conceptualizadas para la construcción conceptual de la *similaridad,* como es resaltado por Confrey (1994, p.20) al indicar que "*la geometría provee una base fértil para explorar, refinar e ilustrar estas distinciones".*

La proporción áurea data desde la época griega cuando se empieza a estudiar la razón y la proporción desde el pensamiento pitagórico y que posteriormente es definida por Euclides en sus *Elementos* como:

> *Se dice que una recta está dividida en extrema y media razón cuando la recta entera es al segmento mayor como (el segmento) mayor es al menor.* [Euc. VII, Def 3]

Esta proporción se ve representada geométricamente en el pentágono regular[7], a partir de relación de la diagonal del pentágono y uno de los lados. Sin embargo, el descubrimiento de ésta en la cultura griega trae consigo no sólo el desarrollo aritmético de la proporción, también implica un avance en la geometría plana; tal como lo señala Becerra y Romero (2008) al retomar la obra "*Los Elementos de Euclides",* donde establecen que las construcciones geométricas de esta obra pueden ser estimuladas a través del concepto de la *unidad similar* que es construido y determinado por la proporcionalidad entre magnitudes de longitud, área y volumen; caracterizando a esta unidad como un ente de crecimiento entre magnitudes continuamente proporcionales.

La proporción aurea trasciende al punto de introducir su continuidad al realizar la multiplicación de áreas semejantes a una dada con distinto tamaño; tal como lo explicitan Becerra y Romero (2008) al analizar los gnómones en las magnitudes longitud y área triangular de la **Figura 1**, donde establecen que en éstas se obtiene la *similaridad* a partir de la proporción continua:

> *La proporción continuada potencialmente infinita: AC:CB::CB:DB::BD:DE::DE:EF... generando la siguiente serie: AC, CB, BD, DE, EF,…ordenada de mayor a menor.*
>
> En la magnitud área triangular se obtiene "*la siguiente proporción continuada potencialmente infinita ABC:ADC::ADC::CDB::CDB:CEB... generando la siguiente serie ABC, ADC, CDB, CEB, :.. ordenada de mayor a menor.*

[6] Otte (como se cita en Confrey, 1994) define el concepto de recursión como: *"un objeto se dice recursivo si se contiene a sí mismo como una parte, o se define por sí mismo"* (p. 20).

[7] Es conocido como la representación formal de la Escuela Pitagórica.

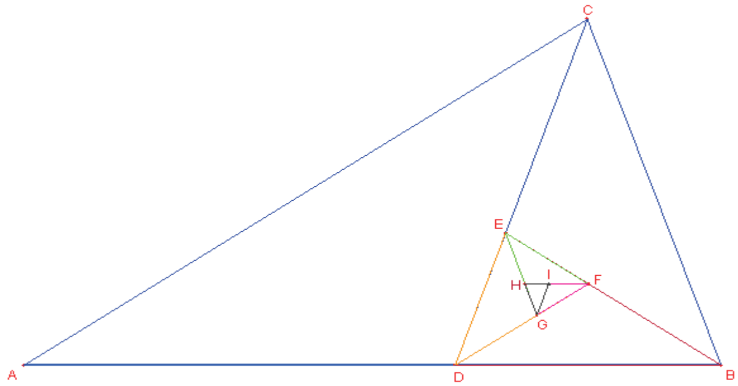


FIGURA 1: Construcción gnomon en área triangular

Es así como se puede evidenciar que la construcción de figuras geométricas que contengan como unidad de crecimiento la proporción áurea ***(ABC:ADC::ADC:BD)***, empieza por el planteamiento de la razón áurea ***(ABC:ADC)***; y que su repetición conserve esta razón ***(ABC:ADC::ADC::CDB::CDB:CEB...)***, generando la recursión a partir de múltiples copias, que en este caso se presenta con la construcción del gnomon triangular ***(ADC, CEB, BDF...)***. De esta manera se establece la estrecha relación que guarda los gnómones y la proporción áurea, donde evocamos la siguiente afirmación:

> *El uso de la unidad similar, se refiere directamente con la construcción de figuras, secuencias de magnitudes proporcionales, [y] generación de bases posicionales de representación de magnitudes.* (Becerra & Romero, 2008, párr. 42.)

Como se ha propuesto, tanto el desarrollo de la *unidad similar* y la proporción áurea requieren de un constante desarrollo geométrico, que permite encontrar en las transformaciones de las figuras geométricas, las principales razones para establecer relaciones entre las magnitudes.

Todo lo anteriormente propuesto, se analizará en el proceso de enseñanza y aprendizaje a partir del estudio elaborado por Piaget y García (1984), sobre la comparación entre la evolución y el desarrollo del pensamiento científico en la historia de la humanidad (específicamente cuando se toma el caso de las estructuras geométricas), con el paso de una etapa a otra en una misma época, y que es caracterizada a través de los estadios psicogenéticos, los cuales son generados cuando la persona puede establecer acciones y manipulaciones de un objeto que desarrollen el pensamiento natural del hombre, éstos son denominados como: intra-operacional, inter-operacional y tras-operacional.

En este caso, la sección áurea empieza con la división de la magnitud longitud, así: "*el todo es a la parte mayor como la parte mayor es a la menor";* este razonamiento está asociado al nivel intra-operacional, porque caracteriza la acción de particionar un sólo registro, en este caso la magnitud, pero " *el sujeto ignora o no busca ningún poder constructivo intrínseco, por lo que se somete a lo dado desde el exterior" (*Piaget y García, 1984, p. 163*),* es decir, el sujeto (estudiante) ignora que puede construir una estructura geométrica más compleja a partir de esa razón.

Cuando la proporción áurea se conceptualiza como la acción de dividir el segmento bajo una razón, el sujeto (estudiante) es capaz de establecer proporciones entre razones áureas, caracterizando lo que Piaget y García (1984) describen en el nivel inter-operacional como: "s*i bien hay aquí una* *nueva situación, existen sin embargo limitaciones que provienen del hecho de que las composiciones son restringidas ya que solamente pueden proceder con elementos contiguos"* (p. 165)

Por último, el sujeto (estudiante) está en un nivel trans-operacional porque establece elementos contiguos de acuerdo a una proporción, y a partir del desarrollo geométrico identifica una proporción continúa desde el establecimiento de la razón áurea como *unidad similar,* que permite la recursión entre áreas que constituye un gnomon, el cual está caracterizado por conservar la misma forma gracias a la unidad de crecimiento, aunque el tamaño sea diferente.

Concluimos que la sección áurea es un contexto que potencializa el establecimiento de la *unidad similar* y la *similaridad*, a través de la construcción y análisis de las formas geométricas, teniendo en cuenta en el proceso de enseñanza y aprendizaje la construcción del pensamiento científico, a partir de las etapas de conocimiento inter, intra y trans-operacional, que permita el desarrollo de ésta.

REFERENCIAS

Becerra, M. & Romero, J. (2008). Unidad similar en la construcción de la multiplicación: una mirada a los elementos. *Memorias IX Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. Valledupar: Asocolme-Gaia.

Confrey, J. (1994). Splitting, Similarity and Rate of Chance: A New Approach to Multiplication and Exponential functions. *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp.291-330). Albany: New York press.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá: MEN.

Piaget, J & García, R (1984). *Psicogénesis e historia de la ciencia.* México: Siglo XXI.

Volver al índice Comunicaciones Breves

Conjuntos suma pequeños en grupos finitos no abelianos

Andrés Fernando Jaramillo Mejía
Euclides Díaz Arcos
Universidad de Nariño

Resumen. **El objetivo principal de esta propuesta es socializar** el "Problema de los conjuntos suma pequeños" y dar una introducción de **algunos resultados obtenidos por** Eliahou y Kervaire en ciertos grupos finitos no abelianos concernientes a esta problemática, además presentamos algoritmos desarrollados en el sistema de algebra computacional GAP, los cuales permiten observar la dificultad para hallar los valores de la función μ_G, debido al gran número de operaciones que se deben realizar. Por tal motivo, adquiere importancia la búsqueda de una fórmula explicita que modele μ_G y cuyo calculo no sea difícil de encontrar.

1. INTRODUCCIÓN

Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de un grupo G. ***El conjunto suma (o producto)* de** A **y** B, denotado con $A \cdot B$, es el conjunto de todos los elementos de G que se pueden expresar, por lo menos de una forma, como producto de un elemento $a \in A$ por un elemento $b \in B$, es decir

$$A \cdot B = \{a \cdot b : a \in A \ \ y \ \ b \in B\}$$

En matemática, la Teoría Aditiva de Números es un campo de estudio en el cual se han hecho avances significativos en los últimos tiempos, entre los diversos problemas que aquí se estudian, es de gran interés encontrar una cota inferior para $|A \cdot B|$ en términos de A y B, donde A y B son subconjuntos no vacíos de un grupo G. Dentro de este contexto un problema de interés denominado el Problema de los Conjuntos Suma Pequeños es determinar una fórmula explícita que permita calcular el mínimo de los cardinales $|A \cdot B|$ donde A y B son subconjuntos finitos de un grupo G sujetos a las condiciones $|A| = r$ y $|B| = s$, es decir se desea calcular los valores de la función

$$\mu_G(r, s) = min\{|A \cdot B| : A, B \subseteq G, |A| = r \ y \ |B| = s\},$$

donde r y s son enteros positivos tales que $r, s \leq |G|$.

Evaluar directamente el valor de μ_G es un proceso complicado debido al gran número de operaciones que se deben realizar, aún utilizando métodos computacionales. En verdad no existe un algoritmo en tiempo polinomial que permita calcular los valores de la función μ_G, por tal motivo, adquiere importancia la búsqueda de una fórmula explícita que facilite su cálculo.

Uno de los primeros resultados obtenidos en esta problemática puede remontarse a 1813 cuando Cauchy en [4] probó que en el grupo cíclico $G=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de orden *p*, con *p* primo, se satisface la ecuación

$\mu_G(r,s)=\min\{p, r+s-1\}$ para todo $1\leq r,s\leq p$

Resultado que fue redescubierto por Davenport [5] en 1935, por lo que se conoce como el teorema de Cauchy-Davenport.

Plagne en [6] probó que en el grupo cíclico $G=\dfrac{\mathbf{Z}}{n\mathbf{Z}}$ de orden n se satisface la siguiente formula:

$$\mu_G(r,s)=\min_{d|n}\{(\lceil r/d\rceil+\lceil s/d\rceil-1)d\}$$

Posteriormente Eliahou, Kervaire y Plagne en [7] usando el teorema de Kneser extendieron este resultado a la clase de grupos abelianos finitos, en verdad ellos probaron el siguiente teorema:

Teorema 1 *Sean G un grupo abeliano finito y r, s dos enteros que satisfacen* $1\leq r,s\leq |G|$

$$\mu_G(r,s)=\min_{d\,||G|}\{(\lceil r/d\rceil+\lceil s/d\rceil-1)d\}$$

En 2005, Eliahou, Kervaire en [8] y Plagne en[9] trabajando en forma independiente lograron determinar una fórmula explícita que modela la función μ_G donde G es un grupo abeliano arbitrario, en términos de la función

$$\kappa_G(r,s)=\min_{h\in\mathcal{H}(G)}\left\{\left(\left\lceil\frac{r}{h}\right\rceil+\left\lceil\frac{s}{h}\right\rceil-1\right)h\right\} \qquad (1)$$

donde $\mathcal{H}(G)=\{h\in\mathbf{N}: h \text{ es el orden de un subgrupo de } G\}$. Este resultado se enuncia a continuación.

Teorema 2 *Si G es un grupo abeliano arbitrario entonces* $\mu_G(r,s)=\kappa_G(r,s)$*, para todo* $r,s\in\mathbf{Z}^+$ *tales que* $r,s\leq|G|$.

Es de notar que para grupos no abelianos la ecuación (1) en general no se cumple, por ejemplo para el grupo alternante $G=\mathcal{A}_4$ de orden 12 (grupo de permutaciones pares en S_4), tomando $\mu_G=\kappa_G$ tenemos:

$$\mu_G(6,6)=\min_{h\in\mathcal{H}(\mathcal{A}_4)}\{(\lceil 6/h\rceil+\lceil 6/h\rceil-1)h\}=9\neq 6=\min_{d|12}\{(\lceil 6/d\rceil+\lceil 6/d\rceil-1)d\}$$

dado que $\mathcal{A}_4$ no tiene subgrupos de orden 6, es decir, D(12) = {1, 2, 3, 4, 6, 12} $\neq$ H($\mathcal{A}_4$) = {1, 2, 3, 4, 12}.

2. ALGUNOS RESULTADOS EN GRUPOS NO ABELIANOS

Cabe resaltar que se han hecho avances significativos en los últimos tiempos en torno a esta problemática para grupos finitos no abelianos, por ejemplo en [10] Eliahou y Kervaire prueban que si G es un grupo soluble finito de orden n, entonces $\mu_G(r,s)\leq\kappa_G(r,s)$, para todo par de enteros $1\leq r,s\leq n$. Después, ellos en [11] demostraron que para el grupo diédrico $G=D_{p^n}$ de orden $2p^n$, con *p* primo, se satisface la ecuación:

$\mu_G(r,s) = \kappa_G(r,s)$ para todo par de enteros r y s tales que $1 \leq r, s \leq 2p^n$.

En [12] Eliahou y Kervaire prueban que si *G* es un grupo soluble, se tiene $\mu_G(r,s) \leq \mathcal{N}_{\kappa_G}(r,s)$, donde

$$\mathcal{N}_{\kappa_G}(r,s) = \min_{h \,\in\, \mathcal{N}(G)} \left\{ \left(\left\lceil \frac{r}{h} \right\rceil + \left\lceil \frac{s}{h} \right\rceil - 1 \right) h \right\}$$

y $\mathcal{N}(G) = \{h \in \mathbf{N} : h \text{ es el orden de un subgrupo normal de } G\}$, contribuyendo de alguna manera a acotar μ_G superiormente para una subclase particular de grupos no abelianos.

3. ALGORITMOS DE LA FUNCIÓN μ_G

Presentamos en esta sección algoritmos en GAP desarrollados durante la investigación, los cuales serán de gran ayuda para contribuir a una posible solución del problema, ya que estos permiten observar posibles resultados que posteriormente se trataran de probar o refurar.

```
> m_miu:=function(mGru,r,s)              #algoritmo de fuerza bruta para obtener miu(r,s).
  local n, m, cd1, cd2, Tin, Tfi;
  Tin:=Runtime();
  GrCn:=Set(mGru);                       #Convierte mGru de grupo a Conjunto.
  gr1:=Combinations(GrCn,r);             #gr1 es el conjunto de todos los subconjuntos de G de cardinal r.
  gr2:=Combinations(GrCn,s);             #gr2 es el conjunto de todos los subconjuntos de G de cardinal s.
  cd1:=Number(gr1); cd2:=Number(gr2);    #Cardinales de gr1 y gr2.
  n:=Number(GrCn);
  for i in [1..cd1] do
    conj1:=gr1[i];
    for j in [1..cd2] do
      conj2:=gr2[j];
      m:=CarDi(conj1, conj2);
     if m<n then n:=m; fi;
    od; Print (n,"\n");
  od;
  Tfi:=StringTime(HMSMSec(Runtime()-Tin));
  return [n,Tfi];
  end;
[ function( mGru, r, s ) ... end
```

```
>m_kappa:=function(g,r,s)          #Funcion Kappa donde g es el orden de un grupo abeliano
 if r+s>g then return g;           #y r, s son los cardinales de conjuntos A y B.
 else
 K:=g;
 L:=DivisorsInt(g); for i in L do
 K1:=(techo(r,i)+techo(s,i)-1)*i; Print(K1, "\n");
 if K1<K then K:=K1;
 fi;
 od;
 return K;
 fi;
 end;

[ function( g, r, s ) ... end
>mOrden:=function(mGru)     #Esta funcion obtiene el conjunto de ordenes de subgrupos del grupo mGru
 local nH, GnAll, mH;
 nH:=[];
 GnAll:=Combinations(GeneratorsOfGroup(mGru));  #Aqui se encuentra la lista de todos los posibles generadores de mGru
 for j in GnAll do
     mH:=Subgroup(mGru,j);                 #mH es el subgrupo generado por el generador j en GnAll
     nH:=Union(nH,[Order(mH)]);            #Por este metodo se recogen todos los ordenes de los subgrupos en mGru
 od; return(nH);
 end;

[ function( mGru ) ... end
>mOrdenN:=function(mGru)     #Esta funcion obtiene el conjunto de ordenes de subgrupos Normales del grupo mGru
 local nH, GnAll, mH;
 nH:=[];
 GnAll:=Combinations(GeneratorsOfGroup(mGru));  #Aqui se encuentra la lista de todos los posibles generadores de mGru
 for j in GnAll do
     mH:=Subgroup(mGru,j);                 #mH es el subgrupo generado por el generador j en GnAll
     if IsNormal(mGru,mH) then
     nH:=Union(nH,[Order(mH)]);            #Por este metodo se recogen todos los ordenes de los subgrupos Normales en mGru
     fi;
 od; return(nH);
 end;
[ function( mGru ) ... end
>mOrdenN(G); mOrden(G);
[ [ 1, 4, 8, 13, 26, 52, 104, 208, 416 ]
[ [ 1, 2, 4, 8, 13, 16, 26, 52, 104, 208, 416 ]
>Order(G);
```

REFERENCIAS

[1] Y. O. Hamidoune, An Isoperimetric Method in Additive Theory. *Journal of Algebra* **179.** (1996) 622-330.

[2] Shalom Eliahou; Michel Kervaire, Minimal sumsets in infinite abelian groups. *Journal of Algebra* **287.** (2005) 449-457

[3] Eric Balandraud, The isoperimetric method in non-abelian Groups with an application to optimally small sumsets. *International Journal of Number Theory* **Vol. 4, No. 6.** (2008) 927-958

[4] A.L. Cauchy, Recherches sur les nombres, J. Ecole Polytechnique 9 (1813) 99-123.

[5] H. Davenport, On the addition of residue classes, J. London Math. Soc 10 (1935) 30-32.

[6] A. Plagne, Additive number theory sheds extra light on the Hopf-Stiefel function, Enseign.Math. (2) 49 (2003) 109-116.

[7] S. Eliahou, M. Kervaire and A. Plagne, Optimally small sumsets in finite abelian groups, J. Number Theory 101 (2003) 338-348.

[8] Eliahou, Shalom; Kervaire, Michel. Minimal sumsets in infinite abelian groups. J. Algebra 287 (2005), no. 2, 449-457.

[9] Plagne, Alain. Optimally small sumsets in general Abelian groups. Adv. in Appl. Math. 38 (2007),no. 3, 324-326.

[10] S. Eliahou and M. Kervaire, The small sumsets property for solvable finite groups, Eur. J. Combinatorics 27 (2006) 1102-1110.

[11] S. Eliahou and M. Kervaire, Michel. Sumsets in dihedral groups. European Journal of Combinatorics. 27 (2006), no.4, 617-628.

[12] S. Eliahou and M. Kervaire, Bounds on the minimal sumset size function in groups, J. Number Theory 4 (2007) 503-511.

Volver al índice Comunicaciones Breves

Simple permutations with order 4n+2

Eduardo Martínez
Universidad Sergio Arboleda

Abstract. The problem of genealogy of permutations has been solved par- tially by Stefan (odd order) and Acosta-Humánez & Bernhardt (power of two). It is well known that Sharkovskii's theorem shows the relationship between the cardinal of the set of periodic points of a continuous map, but simple permutations will show the behavior of those periodic points. This short comunication will present the basics of combinatorial dynamics and the solutions to the Genealogy's problem discovered up to these days.

1. Introduction

According to the Encyclopædia Brittanica, genealogy is "the study of family origins and history". In this paper we are going to show the transposition of this idea to the context of combinatorial dynamics and particulary, how genealogy can be used as a way to understand forcing relationships between periodic points.

The Combinatorial Dynamics as a field appears in 1964 with the paper "Co-Existence of Cycles of a Continuous Mapping of a Line onto Itself" written by Oleksandr Mikolaiovich Sharkovskii. From this point and on, the study of algebraic and topological relationships of continuous functions in R becomes important. In this context, permutations can be used to show minimal orbits.

Subsequently, Louis Block defined a special kind of permutations called simple orbits (also known as Block's Orbits). In this definition Block emphasizes in the three different kinds of orbits related to the three different "tails" in Sharkovskii's order. The odd order simple permutations are also known as Stefan Orbits. There exist two per order and its forcing (genealogy) can be described as two separated lines according to the first permutation.

Chris Bernhardt suggested the study of predecessors and successors of a simple permutation in his paper "Simple permutations with order a power of two" in which he describes a procedure to find the predecessor and the successor of any permutation of order a power of two by using transpositions, rising up a tree with this partial ordering.

Recently the second author gave a new perspective to Bernhardt's results, by including the operations Pasting and Reversing in order to obtain a recursive al- gorithm that produces the genealogy lines in order a power of two. From this point and on, Pasting and Reversing becomes an important way to study the genealogy problem in the remaining order: Mixed Order.

2. Combinatorial Dynamics

In this section basic ideas about Combinatorial Dynamics will be expsosed: fixed point, periodic point, permutations set of a function, forcing between permutations ans Sharkovskii's theorem.

3. Genealogy of Permutations

In this section the problem of genealogy of permutations will be explained, starting with the definition of simple permutation or Block's orbit.

This section will describe the results obtained by Stefan and Block about odd order permutations.

3.1. Order a Power of Two

This section will present the results obtained by Bernhardt and Acosta-Humanez about simple permutations with order a power of two.

4. Final Remarks and Open Questions: Mixed Order

Finally, i will present the open problem of Simple Permutations with order 4n+2, the first case of the mixed order.

References

Acosta-Humánez, P. (2008). Genealogía de Permutaciones Simples de Orden una Potencia de Dos. *Revista Colombiana de Matemáticas*.

Acosta-Humánez, P. (2003). La Operación Pegamiento y el Cuadrado de los Números Naturales. *Civilizar.*

Acosta-Humánez, P. Chuquén, A. Rodríguez, Á. (2010). *On Pasting and Reversing operations over some rings*, Preprint http://arxiv.org/abs/1010.1967

Acosta-Humánez, P. Martínez, E. (2010). *Simple Permutations with Order 4n+2,* Preprint http://arxiv.org/abs/1012.2076

Alseda, LL. Llibre, J., Misiurewicz, M. (2005). *Combinatorial dynamics and entropy in dimension one, Advanced Series in Nonlinear Dynamics*, second edition, World Scientific publishing Vol 5, 15.

Alseda. Ll., Llibre, J., Serra, R. (1977), Minimal periodic orbits for continuous maps of the interval, *Transactions of the American Mathematical Society*, *286*, Issue 2, 2.

Bernhardt, C. (1984), Simple permutations with order a power of two. Ergodic Theory and Dynamic Systems.

Block, L. (1986). *Dynamic in one dimension, Lecture Notes in Mathematics*. New York: Springer Verlag.

Block, L. (1979). Simple periodic orbits or mappings of the interval. *Transactions of the American Mathematical Society, 254.*

Devaney, R. (2003). *An Introduction to Chaotic Dynamic Systems*, Colorado: Westview Press.

Ho, C. (s.f.). On the structure of minimum orbits of periodic points for maps on the real line, Preprint.

Misiurewicz, M. (1995). *Thirty years after Sharkovskii's theorem: new perspectives.* Murcia.

Sharkovskii, A. (1964), Coexistence of cycles of a continuous map of the line into itself, Ukrain Mat. Zh.

Stefan, P. (1977). *A theorem of Sharkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endomorphisms of the real line, Communications in mathematical physics*. New York:Springer Verlag.

Volver al índice Comunicaciones Breves

Sistemas Iterados de Funciones a partir de Sistemas Dinámicos

Cristian Camilo Espitia Morillo
Universidad Industrial de Santander

Resumen. El objetivo de la exposición es mostrar una relación entre Conjuntos de Julia y Sistemas Iterados de Funciones (SIF's). Para esto, se presentan inicialmente conceptos básicos de la teoría de Sistemas Dinámicos discretos y de la teoría de los SIF's. Posteriormente se muestran algunos ejemplos de Sistemas Dinámicos cuyo correspondiente Conjunto de Julia es el atractor de un SIF y, finalmente, algunos teoremas que generalizan los ejemplos.

INTRODUCCIÓN

Los sistemas iterados de funciones y los sistemas dinámicos discretos constituyen dos métodos en cierta forma "duales" para construir fractales, como el atractor de un *SIF* o el Conjunto de Julia asociado a un sistema dinámico discreto. Para esto se presentan algunas definiciones necesarias para establecer una relación entre dichos métodos.

Definición 1. Sea $\{X; w_n, n = 1,..., N\}$ un *SIF* totalmente disconexo con atractor A. La transformación Shift asociada a *A* es la transformación $S : A \to A$ definida por $S(a) : w_n^{-1}(a)$ para a en $w_n(A)$. Donde w_n es vista como una transformación sobre *A*. El sistema dinámico $\{A, S\}$ es llamado el Sistema Dinámico Shift asociado al *SIF*.

Definición 2. Sea $f : \hat{C} \to \hat{C}$ un polinomio de grado mayor que 1. $F(f)$ denota el conjunto de puntos en C cuyas órbitas no convergen a infinito. Esto es $F(f) = \{z \in C : \{f^{\circ n}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ es acotada$\}$. Este conjunto es llamado *Conjunto de Julia Lleno* asociado con el polinomio *f*. La frontera de $F(f)$ es llamada el *Conjunto de Julia* del polinomio *f*, y se denota como $J(f)$.

A continuación se construye un *SIF*, a partir del sistema dinámico correspondiente a la curva de Koch.

Considere el sistema dinámico $\{R^2; f\}$ donde *f* es definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} (3x, 3y) & \text{si } x \leq \frac{1}{3}, \\ (\frac{3}{2}x + \frac{3\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{2}, \frac{3}{2}y - \frac{3\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}), & \text{si } \frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2}, \\ (\frac{3}{2}x - \frac{3\sqrt{3}}{2}y, \frac{3}{2}y - \frac{3\sqrt{3}}{2}x - \sqrt{3}) & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq \frac{2}{3}, \\ (3x - 2, 3y) & \text{si } x > \frac{2}{3} \end{cases}$$

Este sistema dinámico genera la curva de Koch *(K)*, el cual esta relacionado al *SIF* $\{R^2; w_1, w_2, w_3, w_4\}$

donde $w_1(x,y) = \left(\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y\right)$, $w_2(x,y) = \left(\frac{1}{6}x - \frac{\sqrt{3}}{6}y, \frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{6}y\right)$,

$w_3(x,y) = \left(\frac{1}{6}x + \frac{\sqrt{3}}{6}y + \frac{1}{2}, \frac{1}{6}y - \frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$ y $w_4(x,y) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}y\right)$

La relación entre el sistema dinámico $\{R^2; f\}$ y el *SIF* $\{R^2; w_1, w_2, w_3, w_4\}$ es que $\{K; f\}$ es el sistema dinámico Shift asociado con el *SIF*.

En el mismo sentido (*SIF* obtenido a partir de un sistema dinámico), pero ahora con otro tipo de funciones de variable compleja y valor complejo se tiene el siguiente teorema, tomado de [1] (capítulo 7, página 268).

Teorema 1. Suponga que el sistema $\{\hat{C}; f(z) = z^2 - \lambda, \lambda \in C\}$, posee un ciclo atractivo $\{z_1, z_2, ..., z_p\}$ en C. Sea *X* la esfera de Riemann *C* con *p+1* bolas abiertas de radio ε removidas, centradas en cada punto del ciclo y en infinito. Defina el *SIF* como $\{X; w_1(z) = \sqrt{z+\lambda}, w_2(z) = -\sqrt{z+\lambda}\}$

La función *W* sobre *H(X)*, definida por $W(K) = w_1(K) \cup w_2(K) \quad \forall K \in H(X)$. Lleva *H(X)* en sí mismo, de forma continua con respecto a la métrica de Hausdorff sobre *H(X).* Además $W: H(X) \to H(X)$ posee un único punto fijo, J_λ el Conjunto de Julia para z^2-λ y esta dado por $\lim_{n\to\infty} W^{\circ n}(K) = J_\lambda \quad \forall K \in H(X)$. Esto se tienen si la órbita del origen $f^{\circ n}(O)$ converge a infinito y $X = C \setminus B(\infty, \varepsilon)$.

CONCLUSIONES.

- En algunos casos particulares es posible obtener, a partir de un sistema dinámico, el sistema iterado de funciones cuyo atractor es precisamente el conjunto de Julia del sistema dinámico inicial.
- En la exposición se plantea el camino *SD* (Sistema Dinámico) → *SIF* (Sistema Iterado de Funciones). Es natural preguntarse por el camino inverso ¿Dado un *SIF*, existe un *SD* cuyo conjunto de Julia es el atractor del *SIF* original?
- Con el objeto de ser establecida formalmente la dualidad "atractor de un *SIF* Vs. Conjunto de Julia de un *SD*", desde un punto de vista matemático, se pretende mostrar resultados que permitan establecer características, bajo las cuales se asegure la existencia de tal dualidad.

REFERENCIAS

Barnsley, M. (1993). *Fractals everywhere,* second edition, San Diego: Academic Press.

Barnsley, M. (2006). *Superfractals*. New York: Cambridge University Press.

Falconer, K. (2003). *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*. England: Wiley.

Peitgen, O. H. (1990). *Fractals and Chaos, new frontiers of science.* New York: Springer Verlag.

Sabogal, S & Arenas, G. (2011). *Una introducción a la geometría fractal*. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander.

Volver al índice Comunicaciones Breves

Modelos financieros estocásticos y valoración de activos contingentes

Jhon Freddy Moreno Trujillo, jhon.moreno@uexternado.edu.co
Universidad Externado de Colombia

Resumen. Las finanzas modernas o la modelación financiera moderna, inician con el trabajo doctoral de Louis Bachelier, presentado en la Sorbona en el año 1900 y titulado *Teoría de la Especulación*. En este trabajo y bajo la dirección de Henri Poincaré, Bachelier propone un modelo para el comportamiento del precio de activos financieros en la bolsa de París, donde el ruido asociado a los cambios aleatorios en el precio es modelado mediante el movimiento Browniano. Aunque el modelo de Bachelier presenta errores, pues es posible que los precios de los activos sean negativos, sienta las bases para un amplio campo de desarrollos posteriores que llevan a resultados como el presentado en los años 70 del siglo pasado por Fisher Black, Myron Scholes y Robert Merton, que permite la valoración de opciones financieras de compra y venta de tipo europeo.

La hipótesis central del modelo Black-Scholes-Merton es que los precios de los activos (S) se comportan de acuerdo con un movimiento Browniano geométrico, es decir:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW(t)$$

donde μ es la tasa instantánea de retorno del activo, σ es la volatilidad y $W(t)$ es un movimiento Browniano estándar. Aplicando técnicas de cálculo estocástico y el principio de replicación se llega a la siguiente ecuación diferencial parcial de segundo orden parabólica:

$$c_t(t,x) + rc_x(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t)x^2 c_{xx}(t,x) = rc(t,x)$$

donde $c(t,x)$ es la función que denota el valor de un activo contingente en el instante t cuando el precio del activo subyacente es x.

La solución a esta ecuación diferencial parcial cuando se considera la condición de frontera $C(T.S(T)) = \max\{S(T) - K, 0\}$, (que es la condición de frontera para el caso de una opción call europea con precio de ejercicio K), lleva a la conocida formula de valoración de Black, Scholes y Merton.

$$c(t,x) = xN(d_1) - e^{\ r\tau} KN(d_2)$$

El mercado y la academia han avanzado en el desarrollo de modelos más generales que involucren aspectos como volatilidades estocásticas o saltos. Lo se quiere es presentar es una breve construcción del modelo para el comportamiento del precio de los activos, tres formas diferentes en las que se puede llegar al resultado obtenido por Black, Scholes y Merton y dos potenciales extensiones a modelos que incluyen volatilidades estocásticas y saltos.

Volver al índice Comunicaciones Breves

La Transformada de Radon y su aplicación en Tomografía Computarizada

Jaime Alfredo Burgos Díaz
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

José Manuel Higuera Aparicio
Universidad DistritalFrancisco José de Caldas

Resumen. La Tomografía Computarizada es uno de los procedimientos médicos más útiles en la actualidad, ya que permite obtener imágenes de secciones transversales del cuerpo humano, aplicando Rayos X, las cuales permiten realizar el diagnóstico de manera no invasiva. El proceso mediante el cual se obtienen las imágenes a partir de proyecciones, es una aplicación directa de la Transformada de Radon.

1. ECUACIÓN POLAR DE UNA RECTA

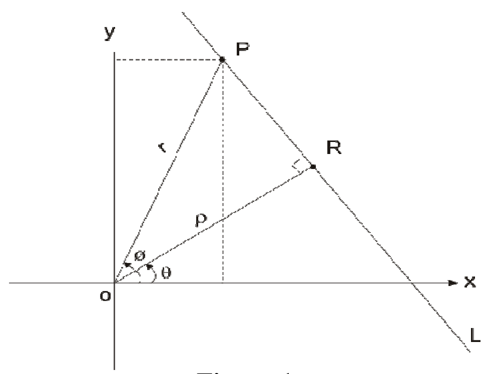


Figura 1

De acuerdo con la Figura 1, el segmento $\overline{OR}$ es perpendicular a la recta *L,* por lo tanto la distancia del origen a *L* es ρ, el ángulo que forma el segmento $\overline{OR}$ con el eje polar (o eje *x*) es θ, un punto $P = (r, \phi)$ de la recta *L* satisface la condición $\rho = r \cdot \cos(\phi - \theta)$ de donde:

$$\rho - r \cdot \cos(\phi)\cos(\theta) + r \cdot sen(\phi) sen(\theta)$$

Si las coordenadas rectangulares de *P* son $(x, y) = (r \cdot \cos(\phi), r \cdot sen(\phi))$ la ecuación de la recta será: $x \cdot \cos(\theta) + y \cdot sen(\theta) - \rho$

Para valores de ρ y θ dados todos los puntos $(x, y) \in \mathbf{R}$ que cumplan esa condición, representan la recta *L*.

Si asumimos $\vec{n}$ como el vector unitario normal a la recta *L*, ésta se puede definir como la recta con vector normal $\vec{n} = (\cos(\theta), sen(\theta))$ cuya distancia al origen es ρ, medida en la dirección de $\vec{n}$ si $\rho > 0$, o en la dirección de $-\vec{n}$ si $\rho < 0$.

Asumiendo *P* como un vector $\vec{P} = (x, y)$, la recta *L* se puede definir como:

$$L(\rho, \theta) = \{\vec{P} \in \mathbf{R}^2 : \vec{P} \cdot \vec{n} = \rho\}$$

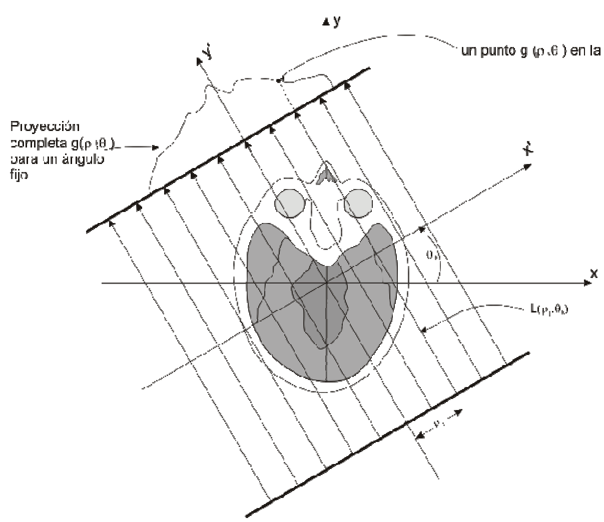


Figura 2

De acuerdo con la Figura 2, un haz de rayos paralelos puede ser modelado utilizando un conjunto de rectas expresadas en forma polar. La *proyección* de cada rayo es una medida de la atenuación que experimenta cuando atraviesa una región.

Si un rayo es representado por la recta $L(\rho_j, \theta_k)$, $f(x, y)$ representa la densidad en (x, y) y $g(\rho_j, \theta_k)$ representa la proyección de ese rayo, entonces $g(\rho_j, \theta_k)$ se puede estimar calculando la integral de línea de $f(x, y)$ sobre la recta $L(\rho_j, \theta_k)$.

Para un ángulo fijo θ_k la proyección de un haz de rayos, el cual es representado por el conjunto de rectas $L(\rho, \theta_k)$ con $\rho \in \mathbf{R}$ será: $g(\rho, \theta_k) = \int_{\infty}^{\infty} f(x(\rho), y(\rho)) d\rho$

Si consideramos las proyecciones de todos los haces de rayos, es decir las que se obtienen para todos los ángulos θ, entonces

$$g(\rho,\theta) = \int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x(\rho,\theta), y(\rho,\theta))d\rho\, d\theta$$

Que nos da el valor de la integral de línea (proyección) de $f(x,y)$ a lo largo de una recta arbitraria $L(\rho,\theta)$ en el plano *x-y*, y se denomina la *Transformada de Radon* de $f(x,y)$ y se representa *Rf,* que es la base de la reconstrucción de imágenes a partir de proyecciones y su aplicación más importante es la Tomografía Computarizada (TC).

2. TOMOGRAFÍA COMPUTARIZADA

Una imagen puede ser definida como una función bidimensional $f(x,y)$ donde x y y son las coordenadas en el plano y el valor de f para cualquier par (x,y)es la intensidad o nivel de gris en ese punto, si $f(x,y)$ representa la densidad de los tejidos de un cuerpo y hacemos pasar a través de él un haz de Rayos X paralelos, la intensidad de dichos rayos disminuirá en forma proporcional a esa densidad. La atenuación de la intensidad de un rayo al pasar por el cuerpo se puede aproximar calculando la integral de $f(x,y)$ sobre la línea recta que representa su trayectoria, lo que equivale a calcular la Transformada de Radon para un valor (ρ_j,θ_k). Una tomografía es la imagen que se obtiene a partir de la medición de esas atenuaciones para todos los rayos, es decir la recuperación de $f(x,y)$ a partir de valores $g(\rho_j,\theta_k)$ medidos.

El procedimiento básico para recuperar $f(x,y)$, es construir una imagen a partir de cada proyección obtenida para un ángulo fijo θ_k, que representaremos $f_{\theta_k}(x,y)$ y luego sumar todas estas imágenes, es decir las $f_{\theta_k}(x,y)$ para todos los valores de θ_k medidos. Mientras más proyecciones utilicemos para reconstruir $f(x,y)$ más aproximada será la imagen obtenida. Es decir:

$$f(x,y) \cong \sum_{\theta_k=0}^{2\pi} f_{\theta_k}(x,y)$$

Si los valores de θ fueran continuos, entonces: $f(x,y) = \int_0^{2\pi} f_\theta(x,y)d\theta$

Debido a la simetría, los valores de $f_{\theta_k}(x,y)$ para $\pi \le \theta < 2\pi$ se pueden obtener a partir de los valores de $f_{\theta_k}(x,y)$ para $0 \le \theta < \pi$ por lo tanto podemos decir que

$$f(x,y) \cong \sum_{\theta_k=0}^{\pi} f_{\theta_k}(x,y)$$

Y que

$$f(x,y) = \int_0^{\pi} f_\theta(x,y)d\theta$$

Cada imagen $f_{\theta_k}(x,y)$ se obtiene "proyectando" hacia atrás la función $g(\rho,\theta_k)$ en el plano $x' - y'$, obtenido al rotar el plano *x-y* un ángulo θ_k, y se denomina la *retroproyección* de $g(\rho,\theta)$ para θ_k.

Las imágenes obtenidas con este procedimiento son borrosas, por lo tanto, hay que mejorarlo.

3. TEOREMA DE LA REBANADA DE FOURIER (FOURIER – SLICE)

Este teorema es la base de los métodos de reconstrucción de imágenes, que tienen la posibilidad de mejorar las imágenes borrosas.

La Transformada unidimensional de Fourier, respecto a ρ, de una proyección para un valor fijo de θ es

$$G(\omega,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\rho,\theta)\cdot e^{-j2\pi\omega\rho}\,d\rho$$

Remplazando $g(\rho,\theta)$ tendremos

$$G(\omega,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\rho,\theta)\cdot e^{-j2\pi\omega\rho}\,d\rho$$

Teniendo en cuenta que $g(\rho,\theta)$ es una integral de línea para ρ y θ dados, podemos escribir

$$g(\rho,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [f(x,y)\cdot \delta(\square]x\cdot\cos(\theta) + y\cdot sen(\theta) - \rho)dxdy$$

Donde δ es la "función" *Delta de Dirac* bidimensional, y remplazando $g(\rho,\theta)$ en $G(\omega,\theta)$ tendremos que

$$G(\omega,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [f(x,y)\cdot \delta(\square]x\cdot\cos(\theta) + y\cdot sen(\theta) - \rho)\cdot e^{-j2\pi\omega\rho}\,dxdyd\rho$$

De donde

$$G(\omega,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\cdot e^{-j2\pi\omega(x\cdot\cos(\theta)+y\cdot sen(\theta))}\,dxdy$$

Y haciendo $u = \omega\cdot\cos(\theta)$ y $v = \omega\cdot sen(\theta)$ se tiene que

$$G(\omega,\theta) = \left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\cdot e^{-j2\pi(ux+vy)}\,dxdy\right]_{u=\omega\cdot\cos(\theta),\,v=\omega\cdot sen(\theta)}$$

Y como la expresión entre corchetes es la Transformada Bidimensional de Fourier de $f(x,y)$, que se representa $F(u,v)$ entonces

$$G(\omega,\theta) = F(u,v) \quad \text{donde} \quad u = \omega\cdot\cos(\theta) \;\; \text{y} \;\; v = \omega\cdot sen(\theta)$$

En conclusión este teorema afirma que la Transformada de Fourier unidimensional de una proyección $g(\rho,\theta_k)$ es una "rebanada" de la Transformada de Fourier Bidimensional de la función $f(x,y)$ de la cual fue obtenida la proyección para un ángulo fijo θ_k.

Si $F(u.v)$ representa la Transformada Bidimensional de Fourier para una función $f(x.y)$ entonces la Transformada Bidimensional Inversa de Fourier para $F(u,v)$ está dada por

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v) \cdot e^{j2\pi(ux+vy)} dxdy$$

Expresando las variables u y v en coordenadas polares como $u = \omega \cdot \cos(\theta)$ y $v = \omega \cdot sen(\theta)$ entonces $dxdy = \omega d\omega d\theta$, por lo tanto

$$f(x,y) = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} [F(\omega \cdot \cos(\theta),]\omega \cdot sen(\theta)) \cdot e^{j2\pi\omega(x\cdot\cos(\theta)+y\cdot sen(\theta))} \omega d\omega d\theta$$

Aplicando el Teorema de la Rebanada de Fourier

$$f(x.y) = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} G(\omega.\theta) \cdot e^{j2\pi\omega(x\cdot\cos(\theta)+y\cdot sen(\theta))} \omega d\omega d\theta$$

Donde $G(\omega,\theta)$ es la Transformada Unidimensional de Fourier de la proyección $g(\rho,\theta)$ correspondiente a la función $f(x,y)$ para un ángulo fijo θ. Además se tiene que

$$f(x,y) = \int_{0}^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\omega| G(\omega,\theta) \cdot e^{j2\pi\omega(x\cdot\cos(\theta)+y\cdot sen(\theta))} d\omega d\theta$$

Que se puede escribir como

$$f(x,y) = \int_{0}^{\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} |\omega| G(\omega,\theta) \cdot e^{j2\pi\omega\rho}\, d\omega\right] d\theta$$

Donde $\rho - x \cdot \cos(\theta) + y \cdot sen(\theta)$. La expresión entre corchetes es la Transformada Inversa Unidimensional de Fourier para $|\omega| \cdot G(\omega,\theta)$ que se puede interpretar como una señal filtrada, con el inconveniente de que $|\omega| \to \infty$ cuando $\omega \to \infty$ y su transformada inversa de Fourier estaría indefinida.

En la práctica se remplaza $|\omega|$ por la función

$$R(\omega) = \begin{Bmatrix} |\omega| \; si \; |\omega| < \omega_c \\ 0 \; si \; |\omega| > \omega_c \end{Bmatrix}$$

Que debido a su gráfica se denomina *Filtro Rampa.*

Este método para reconstruir imágenes a partir de sus proyecciones se conoce como el *Método de las Retroproyecciones Filtradas*, y permite obtener imágenes de mejor calidad.

REFERENCIAS

González R. Woods R. 2008). *Image Procesing*. 3 Ed. Pearson.

Volver al índice Comunicaciones Breves

Obtención de estrellas mediante congruencias lineales y derive

Pedro Fernando Fernández Espinoza
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Gabriel Córdoba Suárez
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Resumen. En el presente artículo se da a conocer un algoritmo para graficar estrellas de m puntas por medio de congruencias lineales, se estudian algunas propiedades de dichas estrellas, y al final se presenta una implementación en el programa Derive 6.

Palabras Clave. Congruencia, Función Phi de Euler, Derive, Teoría de Números, Estrellas de m puntas, Diseños Modulares.

1. INTRODUCCIÓN

En un curso elemental de teoría de números, asignatura típica de toda carrera de matemáticas, suele apoyarse el aprendizaje con un software matemático debido a que éste brinda al estudiante verificación de resultados teóricos; exploración de conjeturas y recreación visual. La formación integral en este terreno parece garantizarse.

El paquete Derive, por ser creado para usos matemáticos, tiene palabras primitivas simples y sentencias lógicas rápidamente comprensibles por los estudiosos con lo cual éstos, al trabajar con Derive, perciben un ambiente amigable.

El artículo trata el tema de congruencia, y aplicaciones y enfatiza en una de ellas: construcción de estrellas con Derive.

Para construir una estrella se marcan en una circunferencia los puntos 0, 1, 2,..., (m-1) de tal suerte que 0 y 1; 1 y 2;…; m-2 y m-1; m-1 y 0 estén idénticamente distanciados. Estos puntos se conectan siguiendo un orden establecido por una congruencia. Este procedimiento generará configuraciones en forma de estrella como se muestra a continuación.

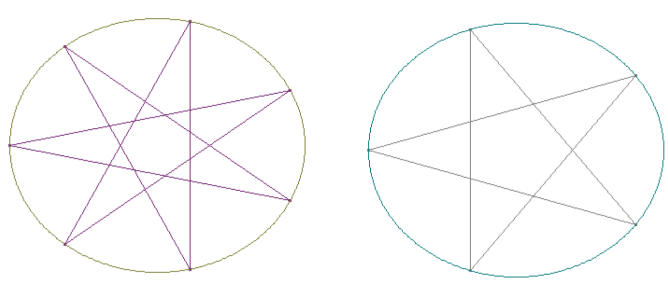


Figura 1. Estrellas de 7 y 5 puntas respectivamente

En el documento se desarrolla el tema de la siguiente forma: En una primera sección se presenta la definición de congruencia y se dan propiedades; en la siguiente sección se presenta la función phi de Euler y algunas de sus propiedades y; a continuación se muestra el proceso de construcción de estrellas de m puntas; se enuncian y responden algunas preguntas que surgen en dicho proceso, por último se implementa en el software Derive una rutina para la construcción de estrellas.

2. CONCEPTOS BÁSICOS

2.1 CONGRUENCIAS

Una de las relaciones más notables en la teoría de los números es la relación de congruencia, introducida y desarrollado por el matemático alemán Karl Friedrich Gauss. Gauss, conocido como "el príncipe de las matemáticas" quien presentó la teoría de congruencias, como parte de la teoría de la divisibilidad en su trabajo excepcional Disquistiones Arithmeticae, publicada en 1801 cuando tenía tan sólo 24 años. La relación de congruencia, comparte muchas propiedades interesantes con la relación de igualdad, y facilita el estudio de teoría de divisibilidad además que tiene muchos usos fascinantes. A continuación se presenta la definición de congruencias junto con una aplicación.

Definición. Sean a y b enteros cualesquiera y m un entero positivo. Si m|(a-b) se dice que a y b son congruentes módulo m y se nota:

$$a \equiv b \bmod m$$

Si a no es congruente con b en módulo m se afirma que a no es congruente con b en módulo m que se denota como:

$$a \not\equiv b \bmod m$$

3. ESTRELLAS DE M PUNTAS

Las aplicaciones de las congruencias son parte de la vida diaria. Las aplicaciones incluyen pruebas de divisibilidad, interesantes acertijos, diseños modulares, calendarios perpetuos, series de billetes en los bancos entre muchos otros más. A continuación se presentará, dentro de la aplicación conocida como diseños modulares las denominadas estrellas de m puntas. Se ilustrará su construcción mediante ejemplos, se tratará de responder a algunas preguntas que surgieron durante su construcción y por último se presentará una rutina para su construcción en el programa Derive.

4. PROCESO

Para construir una estrella de m puntas, se seguirán los siguientes pasos:

- Se marcarán m puntos equidistantes en una circunferencia que corresponden a los vértices de un polígono regular.
- Con los residuos 0 a m-1 módulo m.
- Ahora se escogerá un mínimo residuo i módulo m tal que (i,m)=1.
- Por último se seleccionará un punto x y se unirá con el punto $x + \; i \bmod m.$
- Pero se tendrán en cuenta las siguientes restricciones para m y para i:

  1. $m \neq 6$ *y* $m > 4$.

  2. $i \neq 1$ *y además* $i \neq m-1$

Cabe notar que se restringirá i y m para evitar caer en la construcción de polígonos regulares. Durante el estudio de estas estrellas surgieron tres preguntas, que se tratarán de responder a continuación:

- ¿Por medio de cuántos trazos diferentes se puede construir la misma estrella de m puntas?
- ¿De cuántas maneras gráficas se puede construir una estrella de m puntas?
- ¿Qué estrellas son imposibles de hacer?

Para iniciar se tendrá en cuenta que la cantidad de trazos diferentes con los que se puede construir la misma estrella está dada por:

$$m(\varphi(m)-2)$$

Ya que con la función φ se seleccionarán los números i menores o iguales a m, tales que (m,i)=1 luego se restarán dos para extraer los casos en que i=1 ó i=m-1, y se multiplicará por el número de puntas, ya que estos serán los puntos por los cuales podremos arrancar la construcción.

Ahora usando el mismo razonamiento se afirmara que el número de maneras gráficas diferentes de hacer una estrella de m puntas, estará dada por:

$$\frac{\varphi(m)-2}{2}$$

Usando la proposición anterior se obtendrá que la única estrella imposible de hacer es la de 6 puntas ya que:

$$\begin{aligned} &= \frac{\varphi(6)-2}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Lo anterior también se puede verificar usando teoría de grafos. A continuación se presenta la implementación de esta teoría en el software Derive 6, dicha implementación estará basada en una relación directa entre las coordenadas polares y las congruencias.

```
f(x, i, m):=IF(x + i = m, x + i, MOD(x + i, m))
g(i, m):=RECURRENCE(f(w_1,i,m), w, [0], m + i)
estrella(m, x, i):=VECTOR([1, (2k\pi)/m], k, g(i, m))
```

REFERENCIAS

Burton, D. (1980). *Elementary Number Theory*. University of New Hampshire, 1980.

Koshy, T. (2007). *Elementary Number Theory With Applications.* Academic Press.

Ochoa, C. *Momento Geométrico*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 1999.

Rosen, K. (2004). *Matemática Discreta y sus Aplicaciones*. Mc Graw Hill.

Rubiano, G. (2004). *Teoría de Números para principiantes*, Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Schroeder, M. (1986). *Number Theory in Science and Communication*. second edition. Springer.

Volver al índice Comunicaciones Breves

Propuesta de enseñanza-aprendizaje sobre la interpretación de la relación de igualdad en el álgebra con el uso de la visualización matemática de representaciones pictóricas

Fredy Ávila Sánchez
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Diana Carolina Sierra Caro
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Resumen. En el siguiente se presenta un avance del desarrollo realizado por estudiantes de grado octavo en un colegio de Bogotá entorno a la interpretación de la relación de igualdad, llevado a cabo en el marco de la elaboración de la tesis de pregrado —Propuesta de enseñanza-aprendizaje sobre la interpretación de la relación de igualdad en el álgebra con el uso de la visualización matemática de representaciones pictóricas— la cual se vale de representaciones pictóricas que permiten la visualización matemática como medio para dotar de significado.

Se considera importante hacer un tratamiento sobre este tema, dadas las dificultades que sobre la relación de igualdad se presentan al momento de la transición aritmética-álgebra.

El trabajo expuesto corresponde al desarrollo general de la tesis que implica las interacciones entre las temáticas de: visualización, representación, e igualdad y las conjeturas que hasta el momento se han elaborado sobre las interpretaciones que los estudiantes manifiestan.

Palabras clave: igualdad, álgebra, visualización

1. PRESENTACIÓN DEL ESTUDIO

A lo largo de nuestra formación docente hemos podido percibir muchas de las problemáticas actuales en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra; algunas de ellas tienen sus raíces en la transición aritmética-álgebra, tal y como lo señalan autores como: (Lazcano, s.f), (Tinjaca s.f.), (Socas et al., 1996), entre otros. Por tal razón, se consideró importante reflexionar sobre la tensión existente en la transición aritmética-álgebra; en este sentido, el grupo Pretexto (2002) de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, propone que para que dicha tensión disminuya se deben "*proponer trabajos con la igualdad como relación de equivalencia*."

Además, es importante resaltar que también desde los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), se menciona que dentro de las actividades inherentes al álgebra "*se deben involucrar, entre otros aspectos de la comprensión de la variable y sus diferentes significados, la interpretación y modelación de la igualdad.*"

Por otra parte (Sessa, 2005, pág. 11), sobre el álgebra manifiesta:

> […] para los profesores, el álgebra representa la herramienta por excelencia de la matemática; se podría decir que los profesores se forman en una matemática algebrizada. Del lado de los alumnos, el álgebra se presenta como una fuente inagotable de pérdida de sentido y de dificultades operatorias muy difíciles de superar […]

Con referencia a lo expuesto anteriormente, se destaca que existe la problemática en relación con la interpretación del signo igual, que a su vez se constituye en una dificultad para la comprensión de otros aspectos que conciernen al álgebra escolar.

Teniendo en cuenta lo anterior, en el trabajo se determinó como propósito: Elaborar e implementar una propuesta que permita la interpretación de la relación de igualdad, utilizando la visualización de representaciones pictóricas.

2. BASES DEL ESTUDIO

Para el desarrollo del estudio se han establecido dos marcos de referencia: el teórico (en el cual se indagó sobre las temáticas del estudio), y el metodológico (en éste, se buscó información sobre cómo estructurar el trabajo), a continuación se mostrará de manera concisa el trabajo que se desarrolló.

Marco de referencia teórico; dentro de las categorías conceptuales que abarca la propuesta es importante definir los conceptos de visualización, representaciones y la relación de igualdad; por ende dichos conceptos serán tratados a continuación:

Es importante resaltar que al trabajar a partir de la visualización; se hace referencia al entendimiento de un enunciado y el trabajo activo sobre una actividad, que si bien no llevará a una respuesta inmediata al estudiante tal vez sí puede llevarlo a profundizar en la situación de la cual se está tratando. La idea de visualización tomada de (Guzmán, 1996) refiere a la construcción de una representación que se comporte igual al objeto matemático en cuanto a sus propiedades, es decir, que las representaciones visuales puedan ser en cualquier momento correspondidas con las relaciones matemáticas abstractas que representan.

El enfoque dado a la representación está guiado por las ideas de Duval, quien plantea tres actividades fundamentales en cualquier representación (representación, tratamiento y conversión).

> Representación de alguna cosa: Debe ser en un medio específico. Transformación de la representación: Para que éstas puedan ser comparadas y se obtengan otro tipo de representaciones con las que se construyeron inicialmente, se debe generar también algún avance en su conocimiento o concepto.
>
> Convertir las representaciones: Éstas, deben concluir en una explicación coherente, permitir el paso de una representación semiótica en otro medio específico; y pueda manifestar los significados de lo que se ha representado (Duval, 1999, p. 29).

Para la igualdad tendremos en cuenta que matemáticamente la igualdad puede verse desde dos puntos de vista según (Camargo, 1994): Estudiando el significado formal del signo igual o estudiando el signo de la igualdad como una convención para expresar la relación “SER IGUAL A…” con sus respectivas reglas.

Marco de referencia metodológico: Por otra parte y con el propósito de responder de manera ordenada a lo anteriormente expuesto, el trabajo se realizó bajo la metodología de investigación cualitativa; “*la investigación cualitativa intenta ser una aproximación global de las situaciones sociales para explorarlas, describirlas y comprenderlas de manera inductiva*” (Bonilla 1989, Pág. 70), por lo cual se hizo necesario hacer triangulaciones entre los diferentes puntos vista del entorno escolar y realizar un análisis más crítico y constructivo.

Como el propósito del trabajo desarrollado es elaborar e implementar una propuesta, se tuvieron en cuenta los siguientes ciclos tomados de la investigación acción:

- Planear un cambio: momento en el cual se elaboró el objetivo del estudio ya mencionado.
- Actuar y observar el proceso y las consecuencias del cambio: se construyeron los referentes, las actividades y se realizó un pilotaje.
- Reflexionar: en este momento del ciclo se analizaron los resultados del pilotaje y se buscó la asesoría de un experto (profesor de matemáticas avanzadas de la LEBEM, en la universidad Distrital Francisco José de Caldas), sobre la estructura de la prueba aplicada.
- Y entonces re-planear: se refuerza el marco de referencia teórico, se reestructuran actividades y categorías del estudio.
- Nuevamente actuar y observar: se aplicaron las actividades reestructuradas en un curso de grado octavo de la ciudad de Bogotá.
- Y re-reflexionar: proceso en el cual con base en categorías construidas sobre las temáticas del estudio, se clasificaron las respuestas del los estudiantes en 9 formas de actuar.

3. ANÁLISIS Y CONCLUSIONES DE LAS ESTRATEGIAS ENCONTRADAS

El actuar de los estudiantes frente a las actividades elaboradas se clasificó teniendo en cuenta tres aspectos:

- Cómo se hace el tratamiento y la conversión entre los registros.
- Cómo la visualización influyó en dicho proceso.
- Las formas en que fue usada la relación de igualdad.

Esta forma de clasificar dio como resultado 9 diferentes estrategias que son expuestas a continuación:

1. Pasar al otro lado de la igualdad: tratamiento empleado cuando despeja una variable en una sentencia numérica o algebraica; caracterizado porque se obvian, o no se mencionan algunos pasos del proceso y que puede generar dificultades en la comprensión de la estructura del sistema en la cual se usa.

2. Operar a un lado y tantear al otro: es otro proceso de tratamiento, en el cual se atienden las dos expresiones relacionadas con el signo igual, comparando los resultados obtenidos tras realizar las operaciones de cada lado. Se encuentra una tendencia a usar el tanteo en el desarrollo de la expresión que contiene variables, generando que en expresiones complejas los resultados no sean establecidos o imprecisos.

3. Entorno a la transitividad: estrategia en la cual aparece la característica transitiva de la relación de igualdad para poder explicar algunas relaciones entre los elementos de la situación o entre representaciones pictóricas, pero que también puede ser usada en ocasiones para mostrar un proceso de desarrollo, a lo que Molina (2006) denomina el uso de la igualdad como *separador*.

4. Establecimiento de relaciones que se pueden traducir matemáticamente: categoría que se establece de respuestas en las cuales el manejo sobre los registros pictóricos empleaba propiedades de las estructuras algebraicas, como por ejemplo la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma.

5. Referente al tratamiento del registro: se corresponde con los estudiantes que frente a un registro pictórico lo manipulan y lograban dar respuestas a la situación, sin hacer ningún tipo de conversión.

6. El registro pictórico es evaluado en aspectos no relevantes para establecer relaciones matemáticas: se determinó que algunos estudiantes asocian las imágenes del registro pictórico con otros temas que manejan y esto desvía el trabajo del concepto que se quiere tratar, en este caso la relación de igualdad.

7. Conversión abusiva: cuando se trata de convertir un registro, pero no bajo las relaciones que lo sustentan, sino bajo una idea que tiene el estudiante del registro. El término "abusivo" es usado tratando de comparar ésta forma de actuar con una de las dificultades de la generalización en el álgebra "la generalización abusiva" que consideramos se asemeja, dado que la relación obtenida, producto del análisis de la situación, se genera al tratar de extender una propiedad o ley que se conocía, a otro campo.

8. Problemas de la interpretación de la letra: se asume el uso de las letras dentro del registro algebraico como la idea de que éstas representan un objeto, retomando la idea de las interpretaciones de la letra pretexto (2002, p. 32) menciona *"la letra es vista como un nombre para un objeto o el objeto propiamente dicho"* a considerar que las representaciones pueden acentuar éste problema al dotarles de significado el objeto al cual refiere la letra.

9. nferencias sin tratamiento o conversión: algunos estudiantes pueden dar respuestas o hacer inferencias sin considerar las representaciones pictóricas que se le presenten, es decir, la representación es ignorada.

REFERENCIAS

Bonilla. E, y Rodríguez. P (1997). *Más allá del dilema de los métodos: la investigación en ciencias sociales.* Norma, Bogotá, 2a edición.

Camargo, L. (1994). Errores de significado y uso de la igualdad en estudiantes de educación básica secundaria. Tesis de especialización de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia.

Guzmán, M. de. El Rincón de la Pizarra. (1996). Ensayos de visualización en análisis matemático. Ediciones Pirámide. 1996.

Molina. M. (2006). *Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero en educación primaria,* tesis doctoral*,* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Rojas, P.; Rodríguez, J.; Romero, J.; Castillo, E. & Mora, O. (2002). *La Transición Aritmética Álgebra,* 3ª Edición. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas - Gaia.

Socas. M, Camacho. M. Palarea. M, Hernández. J. (1996). *Iniciación al álgebra,* editorial síntesis.

Tinjaca, P. (s.f.). *Consideraciones epistemológicas al Libro II de Euclides y el arte analítico de vista como parte de la reflexión didáctica de la autora en el álgebra escolar*, tesis de especialización (no publicada) Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Volver al índice Comunicaciones Breves

Matemáticas en movimiento

Nohora del Carmen Bastidas R.
Institución Educativa Municipal Ciudad de Pasto

Matemáticas en Movimiento, se ha convertido en el proyecto de mi vida de docente, pretendo movilizar conocimientos, movilizar al cambio, utilizar los objetos y representaciones en movimiento que nos muestran los computadores y calculadoras, la geometría, los diferentes tipos de juegos matemáticos, el origami, los teselados… y potenciar así el pensamiento matemático de niño y del joven en un ambiente lúdico, de trabajo, respeto, confianza y creatividad. Este Proyecto fue elegido como experiencia significativa ganadora en la categoría de experiencia guía en la convocatoria Pasto Educa Más.

Matemáticas en movimiento surge en el año 2001, con la necesidad de introducir al aula de matemáticas las nuevas tecnologías representadas en la calculadora TI – 92 y el computador con el movimiento y la ejecutabilidad de los objetos matemáticos y geométricos, tan estáticos y fríos hasta entonces, la necesidad de retomar la geometría abandonada en esa época y la nueva tendencia de la Educación matemática que rescata el valor de lo empírico, lo intuitivo en los procesos de construcción del conocimiento y la convicción de tratar de solucionar muchos problemas detectados en mi carrera de docente en el área de matemáticas.

En colaboración con docentes y directivos de la Institución donde trabajo, tengo en ejecución un proyecto de aula: GEOMETRÍA EN ACCIÓN, TECNOLOGÍA Y MOVIMIENTO un proyecto que transversa matemáticas, física, tecnología y utiliza las nuevas tecnologías de la información y la comunicación en el aula. Hemos construido secuencias didácticas: Teselados como una aplicación de la congruencia y semejanza, desarrollada en el grado noveno y en un taller con docentes de Pasto, en abril de 2010, este trabajo lo realizamos con Yolanda Bastidas.

¿POR QUÉ GEOMETRÍA EN ÁCCION?

En el año 2001 trabajé la función lineal y la función cuadrática con estudiantes el grado noveno, haciendo énfasis en la mediación instrumental, la manipulación de objetos, la observación de realidades, según afirma Kant (Introducción Crítica de la razón pura):

> "No hay duda alguna de que todo nuestro conocimiento comienza con la experiencia"

Pasando luego a la parte gráfica e intuitiva para llegar así a la conceptualización. Con este grupo de alumnos continué trabajando hasta el grado once obteniendo muy buenos resultados. Pero faltaba algo los chicos a pesar de tener en la pantalla de la calculadora los objetos matemáticos y sus diferentes representaciones parecía que no los veían y tenían serias dificultades para modelar y resolver problemas.

Una de las causas y fundamental en esta situación era el abandono de la geometría en los niveles de la básica primaria y en los primeros años del bachillerato, época en la cual el niño está aun en la etapa de las operaciones concretas, situación que también constatamos cuando en el año 2003 elaboramos una secuencia didáctica: Teselados como una aplicación de semejanza y congruencia y trabajo con origami, para abordar la temática correspondiente a las transformaciones en el plano, tuvimos dificultades en la ejecución, los estudiantes de grado noveno no tenían los conocimientos básicos para desarrollar lo planeado, comenzando casi de cero logramos lo propuesto y presentamos los trabajos elaborados por los estudiantes en la feria de la Ciencia La cultura y la Productividad que se realizo en la Institución ese año teniendo mucho éxito.

La geometría es la matemática que se ve, nuestro mundo es inherentemente geométrico entonces los docentes de matemáticas debemos proporcionarle al niño las herramientas que lo orienten, lo guíen y diseñar actividades que le permitan comprender y luego reflexionar sobre diferentes situaciones de conocimiento tendiente a la formación de conceptos y no la simple repetición de fórmulas y expresiones verbales; se pretende entonces: Aprender geometría haciendo geometría.

Los sistemas geométricos deben construirse de forma activa, esta es la tendencia de la Educación Matemática actual, rescatar el valor de lo empírico, lo intuitivo en los procesos de construcción del conocimiento, partiendo de la manipulación de objetos, la visualización, la exploración que conducen a la comprensión, llevando al niño a la reflexión sobre propiedades geométricas abstractas tomando como sistema de referencia sus representaciones mentales hasta la adquisición de conocimientos significativos.

Rubem Alves, afirma:

> "La primera tarea de la educación es enseñar a ver. Los niños a través de los ojos tienen el primer contacto con la belleza y fascinación del mundo... Aún tienen los ojos encantados, sus ojos están dotados de aquella cualidad que, para los griegos, era el principio del pensamiento: la capacidad de asombrarse al contemplar lo más simple."

Situación que la he constatado con mis niños a ellos les atrae todo si vamos a trabajar con volúmenes los cubos de madera que tenemos en nuestra aula, los sólidos construidos por otros estudiantes pintados con diferentes colores les llaman mucho la atención y mucho más cuando utilizamos algún programa por ejemplo poly- pro o cuando con un microscopio observamos granos de azúcar, sal y otras sales que muestran sólidos en forma perfecta.
Geometria en accion se basa en la acción niño a diario está en constante actividad: contruye materiales con papel: figuras geométricas, juegos, desarrolla guias que incentivan su creatividad, observa videos, trabaja en equipo, comunica sus ideas utilizando lenguaje matematico y resuelve problemas de aplicación pero no rutinarios enfatizando en conocimientos adquiridos y logrando conocimietos nuevos todo esto en un ambiente ludico donde el respeto y el amor por el conocimiento estan siempre presentes.

La construcción de los sistemas geométricos y espaciales de forma activa,

> "se trata de hacer cosas, de moverse, dibujar, construir, producir y tomar de estos esquemas operatorios el material para la conceptualización o representación interna." (Lineamientos curriculares, 1998, 57)

Utilizando como eje el pensamiento geométrico y los sistemas geométricos, se puede construir el concepto de magnitud, y allí aparece el número

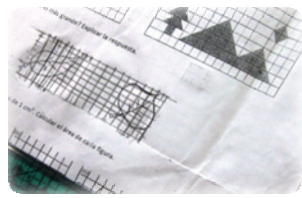
> "como una característica o propiedad perteneciente a los objetos del mundo real y que descubrimos en ellos. Es decir el número parece ser un aspecto inherente al mundo físico que podemos detectar directamente" (Baroody, 1997).

Las actividades de medición relacionan al niño con su entorno, la construcción del concepto de magnitud y la necesidad de estandarizar la medida hacen necesario estudiar este aspecto en relación con la historia, el medio y otras áreas del conocimiento, el sistema métrico decimal es casi universal.

La información matemática que se obtiene de las medidas de las relaciones entre magnitudes, se organiza en tablas, estas se convierten en herramientas necesarias para la comprensión y uso de la variable, pues el uso en fila de la variable indica que puede tomar infinitos valores para reemplazarla, situación que luego utilizara estudiante para obtener fórmulas que describen variación o cambio.

El estudio de la variación desde los primeros años de primaria a partir de la representación de situaciones concretas hace significativo el concepto de variable y si los niños se familiarizan con su uso tendrán menos dificultades para asumir el algebra y las funciones.

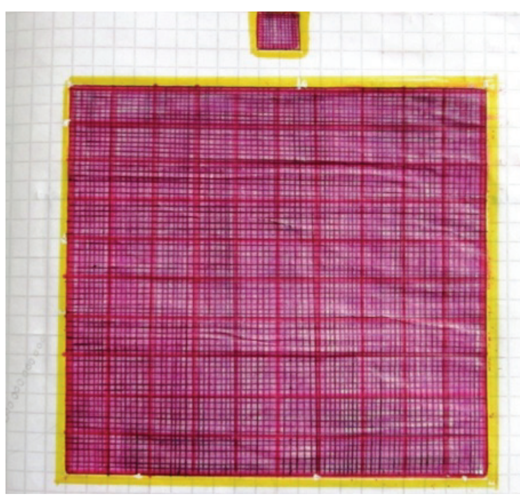
Para ilustrar con un ejemplo asì trabajamos superficie, área, sistemas de medida, variacion y aplicaciones

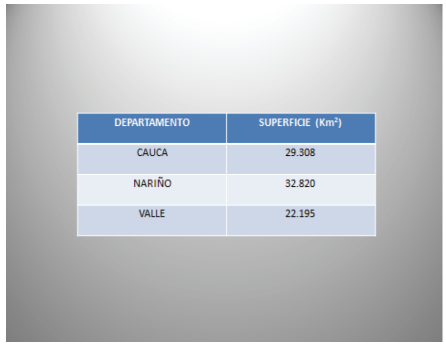


La actividad se orientaba a determinar de alguna manera el tamaño de las hojas que aparecen en el gráfico la mayoría de niños utilizaron la cuadricula, pero varios niños cortaron una de las hojas e hicieron superposición para

Desde la parte histórica surge la necesidad de estandarizar la medida, el conocimiento de las unidades de medida y la relación entre ellas. Construcción elaborada por Karen Tulcán

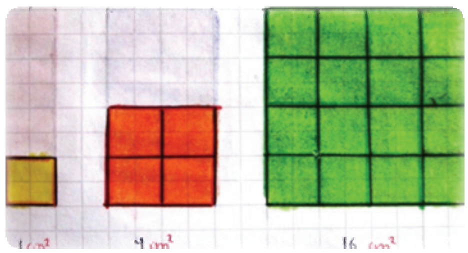
Es una construcción de Karen Tulcán, en la que se evidencia claramente la relación entre $1cm^2$ y $1dm^2$

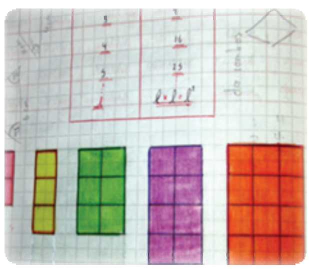


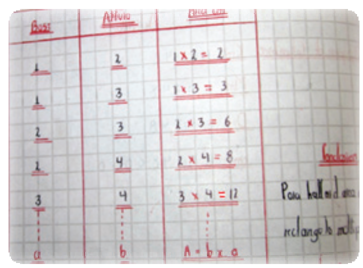


DEPARTAMENTO	SUPERFICIE (Km²)
CAUCA	29.308
NARIÑO	32.820
VALLE	22.195

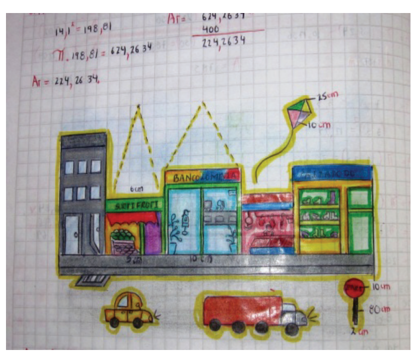
Luego relacionamos con otras aéreas del conocimiento y trabajamos diferentes tipos de situaciones







Calculamos áreas, disponiendo los datos obtenidos en tablas utilizando variables llegando a las conclusiones correspondientes.



Luego los niños resuelven ejercicios y problemas de aplicación

El diseño curricular para grado seis y siete toma como eje el pensamiento espacial y los sistemas geométricos

Desde el año lectivo pasado trabajamos con los alumnos de grado diez **TECNOLOGÍA Y MOVIMIENTO** un proyecto que transversa matemáticas, física y tecnología y utiliza las nuevas tecnologías de la información y la comunicación en el aula. La idea de este proyecto surgió en el área de tecnología con Socorro Bastidas; pero ya desde el año desde el año 2002, en nuestra Institución, se habían desarrollado diferentes experiencias con la utilización de los recursos informáticos, situación que nos ha permitido revisar el plan de Área, las metodologías y lógicamente las estrategias de evaluación y estar acordes a los avances actuales de la Ciencia y la Tecnología, las Nuevas Tecnologías influencian de manera profunda todas las actividades intelectuales, abriendo nuevos caminos al docente y al estudiante en los campos de estudio y la investigación.

Los trabajos que los alumnos realizan los presentaron en un blog que se sube a Internet. Para realizarlos utilizaron diferentes elementos: CBR (detector sónico de movimiento); retroproyector, view screen, cámaras de video, computadores, calculadora TI-92 y aplicación de todos los programas para realizar el blog. En este año el proyecto se trabaja en grado once ya con todos los alumnos que en grupos realizaran un trabajo que muestre la aplicación de una función en una o varias áreas del conocimiento.

La integración con la docente del área de tecnología me ha permitido desarrollar este proyecto que debido a la falta de dotación de equipos en el aula de matemáticas no se había podido implementar ni ejecutar

El amor por lo que hago, convencida de que el conocimiento y la excelencia son la moneda de cambio para el éxito, me permitirán continuar con mi propósito; construir y gestar unas MATEMÁTICAS EN MOVIMIENTO, con la colaboración de la comunidad educativa de mi Institución y de mi ciudad natal

REFERENCIAS

Fernando Soto A. Oscar Narváez. 2004. La calculadora en el aula. UNED

Ministerio de Educación Nacional. (2006a).Estándares básicos de competencias.

Ministerio de educación nacional. (1 998b). Matemáticas, Lineamientos Curriculares. Creamos Alternativas Soc. Ltda., Santa fe de Bogotá.

Ministerio de educación nacional. (1 996c). Educación en Tecnología: Propuesta para la Educación Básica. Creamos Alternativas Soc. Ltda., Santa fe de Bogotá.

Ministerio de educación nacional. (2001d). Seminario Nacional de Formación de Docentes. Uso de Nuevas tecnologías en el Aula de Matemáticas. Santa fe de Bogotá.

Ministerio de educación nacional. (2002e). Tecnologías computacionales en el currículo de matemáticas., Santa fe de Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional, (1994f) Misión de ciencia, educación y desarrollo. Informe conjunto. Colombia: Al Filo de la oportunidad.

Rubem Alves. Educar.http://www.slideboom.com/presentations/100996/Educar-Rubem-Alves

Santillana S.A. 2006. Colección libros de texto para educación básica y media.

Volver al índice Comunicaciones Breves

La Integral: Algunas Interpretaciones de Newton y Leibniz en el Siglo XVII

Cristian Camilo Fuentes Leal
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, cristianfuentes558@hotmail.com

Jeisson Freddy Márquez Garzón
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, yeye8323@hotmail.com

Resumen. En el proceso de enseñanza del concepto integral, es necesario comprender el proceso de evolución de dicho concepto, el cálculo diferencial e integral tuvo un boom en el siglo XVII, a partir de las interpretaciones y avances hechos por los matemáticos europeos, en el presente documento nos centraremos en el estudio de las interpretaciones de ese momento en la historia a partir de algunos aspectos de los aportes a la compresión de este concepto matemático hecho los matemáticos Isaac Newton y Gotfried Leibniz, quienes son considerados como los padres del cálculo diferencia e integral, el análisis que se presentará estará basado en una búsqueda de referentes bibliográficos, en los cuales se evidenciaron tanto notaciones, como representaciones y modos de operar en el cálculo infinitesimal.

1. INTRODUCCIÓN

Los principales adelantos en integración vinieron en el siglo XVII con la formulación del teorema fundamental del cálculo, realizado de manera independiente por Newton y Leibniz. El teorema demuestra una conexión entre la integración y la derivación. El llamado cálculo infinitesimal permitió analizar, de forma precisa, funciones con dominios continuos. Posteriormente, este marco ha evolucionado hacia el cálculo moderno, cuya notación para las integrales procede directamente del trabajo de Leibniz.

De igual forma, Newton y Leibniz fueron los primeros que estudiaron los problemas del análisis infinitesimal elaborando un método general y nuevo, aplicable a muchos tipos de problemas como la reciprocidad entre el problema de las tangentes con el problema de las cuadraturas, a continuación se presentarán algunos de los problemas a los que se enfrentaron los autores:

- *Los Problemas del Siglo XVII que Llevaron a la Construcción del Concepto de Integral*

De acuerdo a Boyer (1986) en el siglo XVII, existieron principalmente 4 problemas que llevaron a la construcción del concepto de integral, los cuales son:

I. Dada la fórmula de la distancia que un cuerpo recorre como función del tiempo, obtener la velocidad y la aceleración en cada instante; y, al revés, dada la fórmula de la aceleración de un cuerpo como función del tiempo, obtener la velocidad y la distancia recorrida. Este problema surge directamente del estudio del movimiento.
II. Obtener la tangente a una curva, como consecuencia de las aplicaciones de la óptica y el estudio del movimiento.

III. Obtener el valor máximo o mínimo de una función para aplicarlo al problema del tiro parabólico y el estudio del movimiento de los planetas.

IV. Obtener longitudes de curvas; las áreas acotadas por curvas; los volúmenes acotados por superficies; los centros de gravedad y la atracción gravitatoria entre cuerpos extensos.

Para la resolución de este tipo de problemas los autores (Newton y Leibniz) utilizaron un sin número de estrategias, heurísticas, representaciones y notaciones de la integral, estas fueron variando dependiendo del tiempo, esto se puede observar en cada uno de los escritos publicados por los autores, a continuación se presentará una análisis de las interpretaciones, heurísticas, representaciones y notaciones implementadas por los autores en cada uno de sus escritos relacionados con el cálculo.

2. INTERPRETACIONES, REPRESENTACIONES Y NOTACIONES DE LA INTEGRAL DE NEWTON

Newton construye una figura que representa la relación entre puntos, líneas y superficies, como una relación entre magnitudes finitas, de esto se puede deducir que Newton observaba las curvas en cuerpos o en funciones como partes de infinitesimales y como poder realizar cálculos con estos, es decir de acá se puede decir que se pueden sumar infinitos como finitos (como un movimiento que se incrementa uniformemente).

2.1 LAS INTERPRETACIONES DE NEWTON EN EL TEXTO “EL DE ANALYSI”

En este documento es evidente el tratamiento al problema III (obtener longitudes de curvas; las áreas acotadas por curvas) y el problema II (obtener la tangente a una curva); pues el autor en el comienzo de las investigaciones sobre las propiedades de las líneas curvas, se apoya principalmente en el método de las tangentes de Descartes, aunque también recurre a la regla de Hudde[1] para la determinación de los extremos.

El De Analysi contiene los fundamentos de su método de las series infinitas que se manipulan mediante operaciones de división y extracción de las raíces. Toma también de la física ciertos conceptos que se revelan útiles para sus métodos infinitesimales y para traducir su concepción cinemática de las curvas.

La integral indefinida de una suma de funciones es la suma de las integrales de cada una de las funciones, de igual forma Newton utiliza series infinitas para integrar curvas utilizando la regla de integración término a término, por ejemplo:

Para integrar $y = \frac{a^2}{b+x}$ divide a a^2 por $b+x$ y se obtiene:

$$y = \frac{a^2}{b} - \frac{a^2x}{b^2} + \frac{a^2x^2}{b^3} - \frac{a^2x^3}{b^4} + \cdots$$

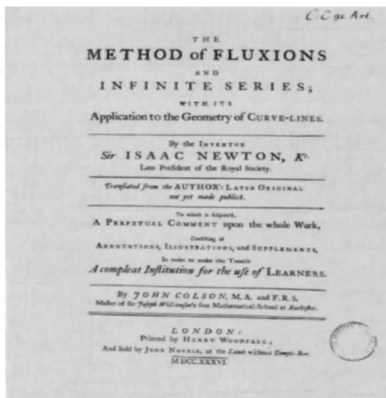
La integral o la cuadratura de la curva se obtiene integrando término a término, y el área es

[1] Descartes produjo un importante método para determinar normales en La Géometrie en 1637 basado en la doble intersección. De Beaune extendió sus métodos y los aplicó a las tangentes; en este caso la doble intesección se traduce en raíces dobles. Hudde descubrió un método más sencillo, llamado la Regla de Hudde, que básicamente involucra a la derivada. El método de Descartes y la Regla de Hudde tuvieron una influencia importante sobre Newton.

$$A = \frac{a^2}{b} - \frac{a^2x^2}{2b^2} - \frac{a^2x^3}{3b^3} - \frac{a^2x^4}{4b^4} + \ldots$$

2.2 LAS INTERPRETACIONES DE NEWTON Y EL MÉTODO DE FLUXIONES

En este libro Newton introduce en sus métodos infinitesimales el producto de fluxión, en este documento se refiere a la reducción de "términos complicados" mediante división y extracción de raíces con el fin de obtener secesiones infinitas.


C. C. 91. Art.

THE
METHOD of FLUXIONS
AND
INFINITE SERIES;
WITH ITS
Application to the Geometry of CURVE-LINES.

By the INVENTOR
Sir ISAAC NEWTON, K
Late President of the Royal Society.

Translated from the AUTHOR's LATIN ORIGINAL
not yet made publick.

To which is subjoin'd,
A PERPETUAL COMMENT upon the whole Work,
Consisting of
ANNOTATIONS, ILLUSTRATIONS, and SUPPLEMENTS,
In order to make this Treatise
A compleat Institution for the use of LEARNERS.

By JOHN COLSON, M.A. and F.R.S.

LONDON:
Printed by HENRY WOODFALL;
M.DCC.XXXVI.

Imagen 2. Portada del manuscrito del Método de Fluxiones de Newton

En el primer problema está relacionado con el problema I, pues este consiste en encontrar la velocidad del movimiento en un tiempo determinado, dada la longitud del espacio descrito. El segundo problema es la inversa del primero. En el artículo 60 se define la noción de fluxión, al respecto de ello el autor dice:

> Llamaré cantidades fluentes o fluentes cantidades que considero que aumentan gradual e indefinidamente; las representaré mediante las ultimas letras del alfabeto v, x, y, z para distinguirla de las otras cantidades que, en las ecuaciones, se consideran como conocidas, y se representan las primeras letras a, b, c. Representaré con las mismas ultimas letras con un punto $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ las velocidades con que las fluentes aumentan por el movimiento que las produce y que, por consiguiente se pueden llamar fluxiones" (Boyer, 1986, p.109).

Es decir sí x, y son cantidades fuentes, entonces $\dot{x}, \dot{y}$ son las fluxiones, y la fluxión de la fluxión sería $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ y así sucesivamente, por ejemplo:

La velocidad $\dot{x}$ por una cantidad infinitamente pequeña *o*, es decir $\dot{x}o$ representa por el momento una cantidad cualesquiera *x*, el proceso de diferenciación hecho por Newton es:

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

Sustituye $x + \dot{x}o$ e $y + \dot{y}o$ en un lugar de *x* e *y* respectivamente:

$$(x + [\dot{x}o)]^3 - (x + [\dot{x}o)]^2 + (x + \dot{x}o)(y + \dot{y}o)(y + [\dot{y}o)]^3 = 0$$

Como $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, se eliminan esos términos en la ecuación anterior desarrollada y luego, después de haber dividido todos los términos que quedan por *o*, se tiene:

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x - 3\dot{y}y^2 + 3\dot{x}x^2ox - 2\dot{x}^2o + a\dot{y}x - 3\dot{y}x^2oy + x^3o^2 + a\dot{x}\dot{y}o - y^3o^2 = 0$$

Se suprimen todos los términos afectados del infinitamente pequeño *o*, lo que proporciona como resultado final:

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x - a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 = 0$$

2.3 LAS INTERPRETACIONES DE NEWTON Y EL DE CUADRATURA CURVARUM

La tercera concepción de Newton aparece en el libro Cuadratura Curvarum, en este libro propone fundamentar el cálculo sobre bases geométricas, con respecto a la tercera concepción de integral, el autor lo llama “primeras y últimas razones”. En la determinación de la fluxión de x^n, Newton procede de la siguiente forma:

Durante el mismo tiempo que la cantidad *x*, fluendo, se convierte en *x*+*o* (*o* es el crecimiento de *x*), la cantidad x^n se convertirá en:

$$x^n + nox^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2}oox^{n-2} + \ ...$$

Por el método del binomio. Ahora, en lugar de proseguir su procedimiento eliminando los términos que contienen *o*, forma la razón de la variación de *x* a la variación de x^n, es decir,

$$nx^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2}ox^{n-2} + \ ...$$

Después deja “desaparecer” el *o* de tal manera que la razón última sea 1: nx^{n-1}. Así la fluxión de la cantidad *x* es la fluxión de la cantidad x^n como 1 es a nx^{n-1}. Sin embargo newton es consciente de las precauciones que hay que tomar para aplicar su método.

El autor menciona también su notación de las fluxiones, de donde da $x, x, x, \dot{x}, \bar{x}$. es decir:

x y x Son notaciones de fluentes (integración)
$\dot{x}, \bar{x}$ Simbolizan fluxiones (diferenciación)

2. INTERPRETACIONES, REPRESENTACIONES Y NOTACIONES DE LA INTEGRAL DE LEIBNIZ

Los aportes de Leibniz se conocen principalmente por los artículos publicados y por sus cartas personales y manuscritos, entre estos documentos están los manuscritos donde Leibniz estudia la cuadratura de curvas dando así principio a desarrollar sus aportes al cálculo diferencial e integral.

2.1 EL TRABAJO CON SERIES INFINITAS

En el proceso de descubrimiento de la integral por parte de Leibniz, inicialmente se basó en desarrollar una transformación general mediante la cual expresa el área de un cuadrante del círculo en términos de una serie infinita.

Leibniz desarrolló también diferentes propiedades de las sucesiones y las series y observó que, si una sucesión de términos $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ los términos disminuyen progresivamente hasta cero, de esta forma dando una primera noción de "calculo de diferencias" para efectuar sumas de series infinitas.

Partiendo de una sucesión de números Leibniz imagina que *x,* representa el orden de los términos, *y* el valor de cada uno de ellos, a continuación, considera la sucesión de los términos como los valores de la *y* y de la función y la diferencia de los dos términos cualesquiera como la diferencia de los valores próximos a *y*. En consecuencia, la cantidad *"dx",* que designa a menudo mediante "a", es siempre *l,* la diferencia de orden de dos términos sucesivos es *e*, y la cantidad *"dy"* representa la primera diferencia de dos términos sucesivos.

2.2 CARTAS Y MANUSCRITOS

Leibniz insistiría en que la relación inversa de la diferenciación y la integración entre esa relación inversa entre sumas y diferencias esto es si queremos sumar los números $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ y cada uno de ellos sabemos que es diferencia de otros dos digamos $a_k = b_{k+1} - b_k$, entonces una simple cancelación sucesiva de los b_k da que $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = b_{n+1} - b_1$.

De esta forma se pueden sumar los números impares,

$$2k + 1 = (k + 1)^2 - k^2$$

De donde

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

El triángulo característico[2] lo utiliza Leibniz para hacer algunos descubrimientos importantes, como su método de transmutación, el cual le permitió entre otras cosas calcular el desarrollo en series para el arco tangente a partir del cual obtuvo su célebre serie para el número π. Lo cual lo llevo a la cuadratura aritmética del círculo.

Leibniz introdujo el signo $\int$, la cual es una estilización de la palabra latina *summa*, para denotar la operación de suma de infinitésimos. Más adelante introdujo la d para denotar diferencias. Inicialmente introdujo la letra en el denominador: esto se obtiene por el cálculo contrario, esto es, supongamos que $\int l = ya$, pongamos $l = \frac{ya}{d}$; entonces justo como $\int$ crece, así d disminuirá las dimensiones. Pero $\int$ significa una suma y d una diferencia, después la d pasa arriba y $\frac{x}{d}$ pasara a denotarse como dx.

Leibniz se preguntaba sobre si seria o no igual $d(xy)$a $dxdy$, o $d\left(\frac{x}{y}\right)$ a $\frac{dx}{dy}$ para concluir que no, aunque tardaría en encontrar las formulas correctas para diferenciar productos y cocientes.

---

[2] Triangulo de Pascal

CONCLUSIONES

A partir de lo observado en diferentes fuentes como lo son textos, artículos y la web podemos evidenciar que diferentes historiadores de la matemática consideran que ambos desarrollaron el cálculo independientemente. Ya que, como podemos observar la escritura de Leibniz era mejor, siendo la que se utiliza en la actualidad pero del mismo modo la metodología de Newton se aplicaba mejor a problemas de aplicación.

Además podemos observar que Newton abordó el desarrollo del cálculo a partir del estudio de la geometría, aplicando sus conocimientos sobre curvas limitadas sobre fluxiones. También buscaba un método el cual le permitiera cuadrar curvas, y hallar relación entre la cuadratura y la teoría de tangentes, donde encuentra que con el método de las tangentes podía ser utilizado para obtener velocidades instantáneas.

Al mismo tiempo de acuerdo con los escritos de Leibniz, luego de estudiar los tratados de Pascal, Leibniz se da cuenta que los problemas inversos de tangentes y los de cuadraturas son equivalentes, también encuentra partiendo de sumas y diferencias de sucesiones una teoría de sumas y diferencias infinitesimales.

De esto podemos concluir que aun cuando los métodos se desarrollaron en paralelo contenían diferencias en cuanto a la forma de abordar sus métodos, es decir los problemas inicialmente no provenían del mismo lado, por otra parte también se puede evidenciar desde sus escritos una simbología diferente, lo cual hace que se puedan ver desarrollos paralelos, los cuales convergen hacia la invención del cálculo infinitesimal.

REFERENCIAS

Boyer C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza.

Collette J. (1995). *Historia de las Matemáticas*. México: XXI Editores.

Duran A. (2004). *Matemáticas y Matemáticos*. Universidad de Sevilla

Duran A.(2006). *La polémica sobre la invención del cálculo infinitesimal.* Barcelona: Crítica.

"Biografías de Newton, Leibniz" http://www.geocities.com/grandesmatematicos/

Sharelook: Matemáticos. (1996) Consultado el 15 de abril de 2011."Cómo se gesto y vino al mundo el cálculo infinitesimal" C:\Documents and Settings\Administrador\Escritorio\calinfenitesimal.mht.

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Coordinación de Innovación Educativa, (2010). Consultado el 20 de abril de 2011

"El descubrimiento del cálculo"

http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/histmatem/calculo/calculo.html.Bartolomé Barceló, Universidad Autónoma de Madrid, (2002). Consultado el 20 de abril de 2011

Volver al índice Comunicaciones Breves

Fundamentos de la trigonometría presentes en los estudios realizados por Ptolomeo en la relación a astronomía

Leidy Ximena Ortiz Rojas
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Constantemente el educador se encuentra indagando y buscando sobre estrategias y metodologías que le permitan, la comprensión del objeto matemático a enseñar, en el presente documento se enfatizara hacia el tratamiento de la trigonometría actualmente, en la cual está dentro de los métodos de aplicación y ejercitación de formulas, siendo parte de una comprensión instrumental y no relacional, donde la segunda hace alusión a la comprensión cognitiva con el saber qué y el por qué del concepto.

Y para ello se plantea buscar estrategias de metodologías y herramientas que permitan al docente la comprensión de las temáticas a trabajar desde un análisis epistemológico, de algunas de las bases en trigonometría como lo es desde Ptolomeo, y del tal forma que se indagué obre los significados, el lenguaje y problemas encontrados, se logré encontrar la contribución de elementos de significado tomadas desde algunas bases que sean desarrollo dentro de la historia, como herramientas para la comprensión y enseñanza por parte de los docentes, desde los referentes epistemológicos en relación a la educación.

La enseñanza de la trigonometría en el ámbito del aula de clase solo se realiza la implementación y aplicación de fórmulas, por lo cual se cree que los estudiantes consideran la trigonometría como la ejercitación de procesos algorítmicos de las relaciones trigonométricas, quienes no llegan a comprender como han sido construidos estos conceptos a lo largo de la historia, como el manejo de la razón, la proporción entre las cuerdas o los arcos, han sido desarrollados desde estudios en astronomía, llevando de esta forma una visión puramente analítica de la trigonometría.

Godino (2003) menciona que este tipo de conocimiento esta clasificando entre lo que se conoce como instrumental, es decir aplicación de formulas, y cuyos resultados son inmediatos y aparentes, pero desde la compresión relacional en donde no únicamente el método sino también el porqué, qué comprender, y cómo lograr la comprensión.

Este tratamiento didáctico de la trigonometría indica cómo, se evidencia una problemática en las deficiencias presentas en la enseñanza de la trigonometría, se puede buscar y plantear estrategias que permitan dicho mejoramiento en los estudiantes, incluyendo fortalecer lo comprensivo y razonamiento de las relaciones trigonométricas, e interpretación de formulas y operaciones trigonométricas, fomentado una asociación en la actividad cognitiva con el saber qué y el por qué del concepto.

El compromiso del educador en matemáticas es generar metodologías y recursos que ayuden en la compresión de objetos matemáticos, y estos con un buen uso llegan a proporcionar privilegios y ventajas intelectuales, para facilitar la enseñanza, buscando conectar conceptos y propiedades desarrolladas en actividades, donde el docente al plantearlas, tenga presente el origen, sentido, y el empleo temático, como parte de la construcción de concomimientos trigonométricos, teniendo en cuenta este conjunto de aspectos se logré transponerlos al contexto escolar, como lo menciona Vergnaud (1990), sobre la importancia que tiene la epistemología para contribuir en la construcción del conocimiento.

Pero no únicamente se puede plantear desde Vergnaud, también hay otras perspectivas que aluden sobre investigación en la enseñanza matemática desde los elementos históricos y epistemológicos, se menciona como el estudio histórico conceptual en el ámbito educativo puede llegar a favorecer la compresión teórica y práctica del docente, es decir conocer las características de aspectos y aplicaciones experimentales dadas por un concepto matemático, en este caso de trigonometría; Pajaus referenciado en la tesis doctoral de Monserrat (2010), señala que la naturaleza o origen de los contenidos en matemáticas no sólo debe reducirse en aspectos técnicos y procedimentales, sino también se puede tener presente referencias históricas, permitiendo la interacción con problemas matemáticos antiguos y construcción de conceptos, que conlleven al razonamiento sobre el desarrollo histórico del tema en matemáticas.

Con lo mencionado hasta el momento como profesores podemos hacer uso de la evolución histórica y epistemológica de los conceptos matemáticos y relaciones que puedan llegar a tener en otros estudios, por ejemplo el estudio sobre trabajos en astronomía que históricamente fueron desarrollando procesos que dieron origen a la trigonometría, permitiendo evidenciar una interpretación sobre la relación existente entre la astronomía y matemáticas, puede llegarse a implementar en la educación, considerándola una metodología, como propuesta de mejoramiento en la enseñanza matemática para los estudiantes, permitiendo relacionar el objeto matemático con avances construidos dentro de otras disciplinas, de esta forma lograr desarrollar competencias para afrontar retos actuales, como lo menciona Agudelo

> En la enseñanza de las Matemáticas se debe garantizar que el estudiante adquiera los elementos suficientes para comprender, analizar y solucionar cualquier tipo de problema, que en ocasiones se ve reflejado en la vida cotidiana. A demás de poder tener las bases para aprender otras ciencias como la Física, Química y para generar una plataforma que permita abordar las problemáticas específicas de un campo profesional determinado y absorber las nuevas tecnologías.

Por tanto a partir de estas investigaciones, se puede continuar fortaleciendo este aspecto proponiendo trabajar sobre un análisis de aspectos epistemológicos de trigonometría, especialmente desde los aportes astronómicos; la cual es una de las ciencias quizás más antiguas, que se han manifestado diferentes fenómenos que son indagados y aplicados desde la matemática, entonces para observar dicha relación se tendrá como base los fundamentos y elementos de significado del trabajo en el libro de Almagesto de Ptolomeo sobre trigonometría esférica, dentro dicho estudio se analizará características, elementos y la relación que contenga con la plana; de tal forma que permita generar el interés y la comprensión de la trigonometría a partir de otras ciencias, y las aplicaciones que estás conllevan.

Para realizar la metodología se tendrá referentes que indaguen sobre investigaciones de tipo análisis histórico–epistemológico, apoyándose en algunas ideas del enfoque ontológico- semiótico, como los son los elementos de significado: lenguaje y generalizaciones, tomando métodos y técnicas para abordar el problema, empleando en cada fase estrategias y documentación que permitan desarrollar técnicas; recoger datos y análisis adecuados, brindado realizar un estudio sobre los elementos que contribuyan a la formación y por supuesto a enseñar.

Para abordar el tema de estudio se plantea la postura de Gómez (2003) sobre el análisis histórico-epistemológico, asumido desde el tipo de génesis epistemológico, tomando un enfoque de los obstáculos epistemológicos, en base a la descripción e interpretación de los significados referidos a trigonometría, presentes en los trabajos realizados sobre astronomía, por el autor Ptolomeo en su libro (I y II) Almagesto.

Sin embargo, dentro del análisis del estudio se fortalece desde Godino (2003, Pág. 23) quien plantea una propuesta de investigación didáctica, desarrolladas dentro un Enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática presentado que se deben combinar diversos métodos y técnicas según la faceta de investigación que se pretende realizar y también depende del tipo de problema matemático plateado para lograr recoger y analizar los datos pertinentes para las conclusiones.

Dentro el proceso de análisis de estudio se requiere registrar de manera sistemática y fiable la trama de hechos didácticos ocurridos: que dentro de esta investigación serna los elementos de significado puestos en juego en cada momento, interacciones.

La investigación en didáctica de las matemáticas se tiene presente según dos criterios:

- El fin de la investigación:

- La caracterización de significados, o semiometría.
- La búsqueda de relaciones entre significados, ecología de significados
- El estudio de los cambios, o dinámica de significados.

- El foco de la investigación:

- Epistémico (significados institucionales)
- Cognitivo (significados personales);

Teniendo dichas características ha permitido establecer alguno de los elementos de los fundamentos epistemológicos de trigonometría desde Ptolomeo, en los cuales a brindando generar la relación entre la aplicación de razones y proporciones entre las cuerdas de un circulo y las vez trabajando desde el análisis numérico, en el cual se puede trabajar también métrico, en elación a la medida de los ángulos y como pueden ser obtenidos.

Ptolomeo ha dejado un legando a partir de sus estudios astronómicos, en el cual aplicaba tablas con determina proporciones y que con el tiempo estas se relacionan con la tablas trigonométricas, y sus lemas han permitido relacionarlo con el teorema de seno, que hoy en día puede ser una herramienta para el docente en la aplicación de la enseñanza y comprensión de dichas temáticas.

Como desde los estudios en relación a las cuerdas de círculos máximos; se plantea en la primera parte los valores respectivos de los arcos de los grandes círculos, quien los asimila como los polos del ecuador y la eclíptica, trabajando desde el sistema sexagesimal, cuyas relaciones entre las cuerdas se implementa la razón por composición y proporción entre magnitudes, para realizar pruebas de lemas los cuales permitirán ser aplicados en teoremas que estén aplicados en las esferas.

Cada una de estas aplicaciones de razones se encuentran relacionadas, con elementos de la astronomía como los son los polos de la eclíptica y el ecuador, estas relaciones puede permitir en la educación una integración entre las ciencias y además la formación académica de los docentes, en el cual no quede únicamente en conocimientos escolares sino también en relaciones a la ciencia, y como estas han contribuido a al desarrollo de las temáticas.

Volver al índice Comunicaciones Breves

Proyecto de aula: ¨la granja¨

Yeimy Rodríguez García
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Dolly Carolina Mora
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Resumen. La granja, es un proyecto de aula implementado en una institución educativa distrital, de carácter oficial, en el grado tercero de educación básica primaria**;** **e**n él se articulan los pensamientos métrico, numérico y aleatorio. Es importante resaltar que dentro del pensamiento métrico, se trabaja magnitudes, en el pensamiento numérico, estructura aditiva y multiplicativa; y la clasificación y organización de datos en tablas, en lo que respecta al pensamiento aleatorio. Los objetos matemáticos a trabajar, están de acuerdo a lo que recomiendan los estándares curriculares del área de matemáticas, para grado tercero de básica primaria. Se propone una secuencia de actividades donde se privilegia el trabajo de tipo manipulativo- experimental, enmarcadas en la metodología de la resolución de problemas. Dicha secuencia se organiza en cuatro fases: introducción, reestructuración, profundización y evaluación

1. PLANTEAMIENTO

Para esta experiencia de aula, se diseña e implementa un proyecto de aula del cual se desprenden diversas situaciones problema en las que los estudiantes deben desarrollar el pensamiento matemático, interactuando con sus pares, con los profesores y con diversos recursos para reconstruir y validar personal y colectivamente el saber. En efecto, los proyectos de aula nacen como una estrategia didáctica (Vergel y otros), que buscan la interdisciplinaridad y la transversalidad para potencializar un aprendizaje significativo en un contexto real.

La granja es un proyecto implementado en una institución educativa, de carácter oficial, en grado tercero de primaria, en la ciudad de Bogotá**.** Articula los pensamientos métrico, numérico y aleatorio, que se proponen en los lineamientos curriculares; teniendo como escenario principal situaciones problema contextualizadas en la granja. Para su aplicación, se ha planificado y diseñado una secuencia de actividades, organizada en cuatro grandes fases: introducción, reestructuración, profundización y evaluación

El proyecto ha sido organizado, de tal manera que los objetos matemáticos trabajados se relacionan entre sí. En ese orden de ideas, se tiene como eje central en el pensamiento métrico, las magnitudes: longitud, masa, peso, capacidad y volumen. Dichas magnitudes son trabajadas a partir de actividades de tipo experimental, donde el estudiante tiene la oportunidad de hacer una recolección de datos que son aprovechados para integrar el pensamiento aleatorio, del que se trabaja, la organización y clasificación de datos en tablas, según determinados criterios. A partir de lo pragmático, también es posible trabajar dentro del pensamiento numérico, la estructura aditiva y multiplicativa.

Del trabajo con magnitudes, aparece primordialmente Chamorro (1994), quien hace énfasis en los estadios de desarrollo evolutivo de la idea de medida, planteados por Piaget; el primero de ellos es el de comparación perceptiva directa entre objetos, aquí se distinguen dos fases: la estimación directa y la analítica, donde no sólo se utiliza el transporte visual, sino también el transporte visual y corporal: “se pasa de una forma primitiva de medición a formas más ligadas a lo que realmente es medir” (Chamorro, 1994).

Según Godino (2002), ¨ la estimación es obtener una medida sin la ayuda de instrumentos, es realizar juicios subjetivos sobre la medida de los objetos¨. Para medir, al principio el niño utiliza las impresiones sensoriales, para pasar a adaptar una unidad de medida.la visualización de una unidad es una estrategia de estimación. En el proyecto de aula, se trabaja la estimación de magnitudes, haciendo uso de unidades de medida no estandarizadas, como las antropométricas, para el caso de la longitud, abriendo paso al establecimiento de relaciones de comparación en función de una magnitud.

El segundo estadio que plantea Piaget, es el desplazamiento de objetos, donde aparece el transporte manual de los cosas a comparar, aquí prácticamente se pegan los elementos entre sí. Ya no se habla de ¨más grande que…¨, sino que se ve un primer avance hacia la construcción de la unidad de medida.

> “Los procesos de estimación en cálculo consisten en modificar los datos de una operación para hacerla más sencilla. Esta modificación se lleva a cabo mediante las técnicas de redondeo, truncamiento o sustitución” (Batanero, Godino & Cid, 2003).

Al principio, en los procesos de medición la adopción de cualquier unidad de medida regular es válida, pero la necesidad de comunicación y el crecimiento de la economía han llevado a la adopción de un sistema legal general en la mayor parte del mundo: el sistema métrico decimal. Por tal razón el proyecto incluye actividades centradas en el uso de unidades de medida estandarizadas:

> “indirectamente con la ayuda de un sistema de elementos intermedios, no estructurado al principio. Necesariamente, el trabajo con estos sistemas ha de extenderse en el tiempo, hasta crear en el alumno la necesidad de utilización de un sistema estructurado, que adquiera su última expresión en la utilización del sistema métrico decimal” (Chamorro, 1994).

En el trabajo con magnitudes, es importante la organización y clasificación de datos, puesto que el empleo cada vez más generalizado de las tablas de datos y de la recopilación de la información codificada llevó al desarrollo de la estadística y la probabilidad (MEN 2006), así se introduce el pensamiento aleatorio desde el conteo y la organización de datos.

En las actividades de estimación y/o medición de magnitudes, está implícito el pensamiento numérico. Se tiene que, la estructura aditiva está compuesta por dos operaciones, la adición y la sustracción, Vergnaud (1991).La primera forma de correspondencia aditiva es cuando se relacionan dos números de la misma naturaleza; las relaciones aditivas, son ternarias: dos estados relativos se componen para dar lugar a un estado relativo.

La multiplicación se trabaja como relación binaria (un sólo espacio de medida) en la cual se relacionan dos magnitudes de la misma naturaleza, es aquí donde la multiplicación puede verse como suma reiterada de conjuntos (Vergnaud, 1991).

En el proyecto “LA GRANJA”, se pretende que los estudiantes puedan relacionar las situaciones problema que se les plantea con el mundo real, es decir que hagan pragmático el conocimiento, y puedan hacer una interiorización de los conocimientos para que el aprendizaje sea significativo.

2. IDEOGRAMA – OBJETOS MATEMÁTICOS

El siguiente ideograma sustenta la integración de los pensamientos métrico, numérico y aleatorio; y los objetos matemáticos trabajados, de acuerdo a lo que recomiendan los estándares curriculares del área de matemáticas, para grado tercero de básica primaria.

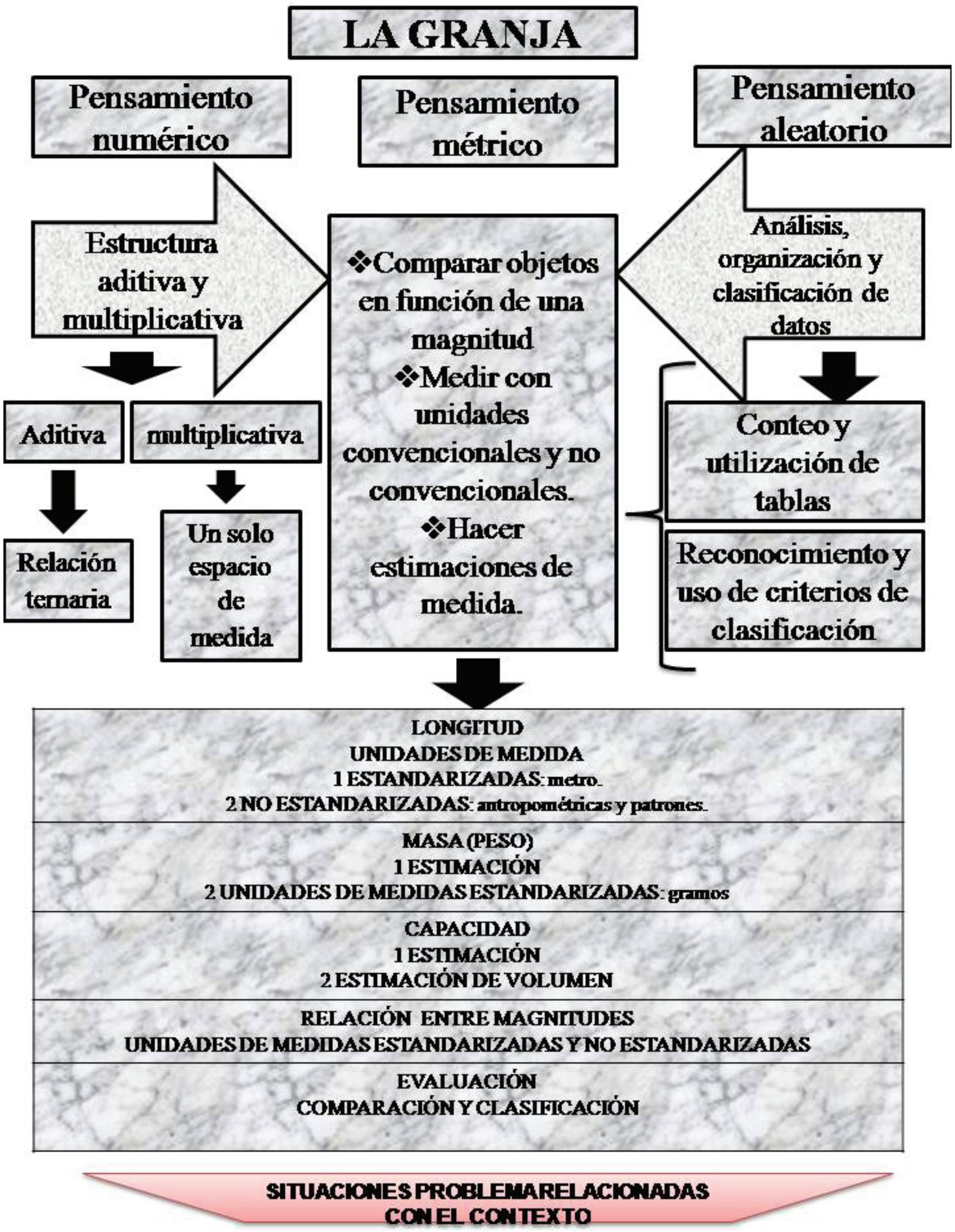
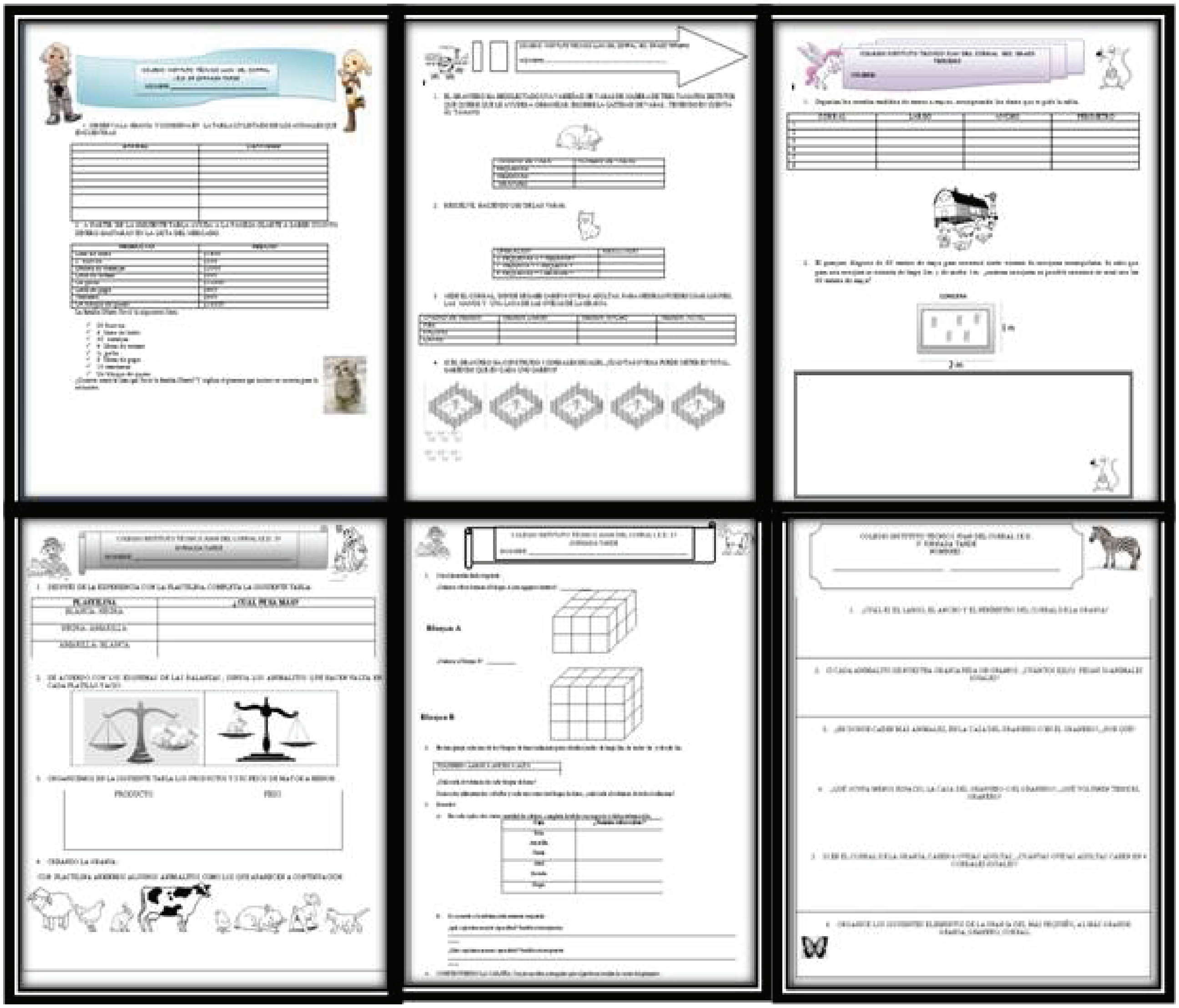


Figura 1. Diagrama



3. EVALUACIÓN

El proyecto de aula ¨la granja¨, fue gestionado en su totalidad, con estudiantes de grado tercero de primaria, haciendo la integración del los pensamientos métrico, numérico y aleatorio; tuvo como escenario principal las situaciones problema desarrolladas en el contexto de la granja.

Con la gestión del proyecto, se dio una constante reflexión sobre la pertinencia de cada uno de los diseños de las actividades implementadas en clase, que fueron acordes con el objetivo específico de obtener como producto final la construcción de una granja, por cada equipo de trabajo conformado.

Figura 2.

El proyecto de aula centró su mirada en el pensamiento métrico, más exactamente en el trabajo con magnitudes, que fue el eje central, incluyendo elementos como estructura aditiva y multiplicativa (en lo numérico), la clasificación y organización de datos en tablas (en el pensamiento aleatorio).Todo ello contextualizado en el escenario de una granja.

El uso de materiales ostensivos de tipo manipulativo, fue importante dentro de la implementación del proyecto; porque permitieron interacción directa con los objetos de estudio.

Las guías de trabajo individual, facilitaron el seguimiento y la observación del proceso de aprendizaje de cada uno de los alumnos, además suministraron los elementos necesarios para llevar a cabo la evaluación de cada actividad.

4. ESTADO FINAL

Teniendo en cuenta los resultados arrojados por la prueba diagnóstico, se puede afirmar que después de la implementación del proyecto de aula, los alumnos obtienen avances significativos en su proceso de aprendizaje.

Inicialmente, para el pensamiento métrico se encontró que debía profundizarse en el uso de unidades de medida estandarizadas y en la conversión.

Los alumnos, en general se hallaban en la fase de estimación directa, es decir que visualizaban y establecían relaciones entre magnitudes de manera intuitiva, haciendo comparaciones como más pesado que…, más grande que…, etc. De lo anterior, se puede decir que los estudiantes, ya no sólo visualizan, sino que hacen desplazamiento de objetos, usan alguna parte de su cuerpo para medir dos cosas y comparar su longitud. También utilizan instrumentos especializados para medir, como la cinta métrica, reconociendo unidades de medida estándar. Se llegan a avances hacia la construcción de la unidad de medida.

El siguiente diagrama, ilustra los resultados obtenidos en cuanto al pensamiento métrico.

Figura 3.

En el pensamiento numérico, inicialmente los estudiantes se valían de la multiplicación como suma reiterada, según Vergnaud (1991). En cuanto a esto se puede decir, que los alumnos entienden la multiplicación como suma reiterara, pero con la diferencia de que ahora, hacen uso de manera más frecuente del algoritmo de la multiplicación para resolver problemas; se evidencia que perciben su practicidad.

El siguiente diagrama, resume los resultados para el pensamiento numérico.

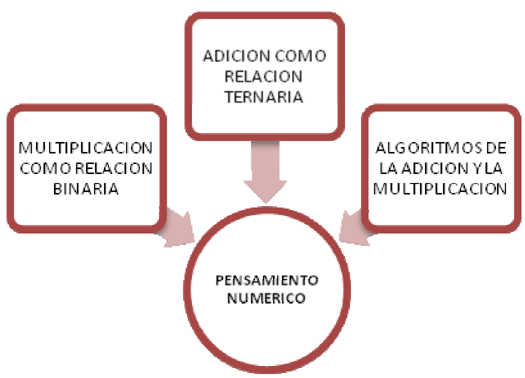


Figura 4.

En un principio, en lo que refiere a la organización y clasificación de datos, dentro del pensamiento aleatorio se manifestaron ciertas dificultades, como que los niños no comprendían del todo las situaciones planteadas, y si las comprendían, no podían aplicar simultáneamente los criterios de clasificación proporcionados. En cuanto a esto, se hizo énfasis en la superación de las falencias que existían, notando grandes avances, como el que los alumnos hacen uso de los criterios de clasificación, seleccionan y organizan datos obtenidos de las experiencias. En resumidas cuentas el siguiente esquema sintetiza los resultados obtenidos.

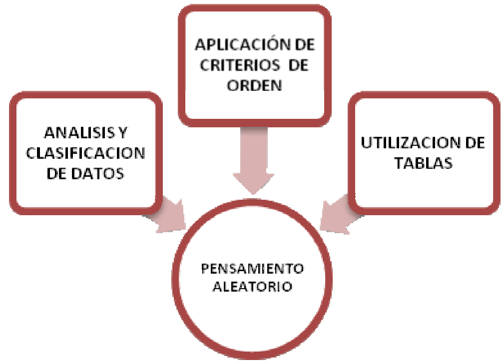


Figura 5.

Por los anteriores resultados, se puede concluir que la aplicación del proyecto de aula ¨la granja¨, en el I.E.D Juan del Corral, en grado tercero, fue pertinente y oportuna, ya que se logró con éxito el aprendizaje esperado en los alumnos.

REFERENCIAS

Chamorro, C. & Belmonte, J. (1988). *El problema de la medida: didáctica de las magnitudes lineales.* Colección Matemáticas: Cultura y Aprendizaje. Madrid. Síntesis.

Del Olmo, M. A., Moreno, F. y Gil, F. (1989). *Superficie y volumen*. Madrid: Síntesis.

Godino, J. D. (2002).¨*Medida de magnitudes y su didáctica para maestros*¨. Universidad de Granada

GODINO. J (1998). Ponencia presentada en el IX seminario de investigación en educación matemática: *Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.*

_________ (2002).¨ *sistemas numéricos y su didáctica para maestros*¨. Granada España

MEN (2007). *Estándares básicos de calidad para el área de matemáticas.* Bogotá: cooperativa editorial Magisterio.

____ (1998). *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas.* Santa Fe de Bogotá: cooperativa editorial Magisterio.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, la realidad y las matemáticas*. México: Trillas.

Vergel. R, Rocha. P & León. O, (2001) *El juego, la resolución de problemas y el proyecto de aula como dispositivo en las didácticas de la matemática y de la estadística.* Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Volver al índice Comunicaciones Breves

“Trigonometría del cuadrado” trascendiendo de lo usual Una propuesta inexplorada de los alcances de la matemática

Camilo Arévalo,[1] kmilo741@hotmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Oscar González, tujavi10@hotmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Yuri Pachón, yurijaz006@hotmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Resumen. Este escrito presenta un estudio dentro del campo de la trigonometría que emerge del análisis de las relaciones e identidades trigonométricas desde un cuadrado de lado dos centrado en el plano cartesiano; se propone el estudio de una nueva trigonometría , aquella que se da con el estudio de la circunferencia unitaria centrada en el plano cartesiano, donde se tendrá en cuenta el estudio de varios conceptos matemáticos como la congruencia y semejanza de triángulos, puntos terminales trigonométricos, sistema de coordenadas cartesianas, etc.

Como parte del proceso en el espacio de formación de Matemática del Movimiento II[2] , se propone un proyecto que consiste en analizar y deducir las razones y funciones trigonométricas que emergen del estudio de un cuadrado; lo innovador es el trabajo analítico para determinar y generar una trigonometría distinta a la que usualmente se da con el estudio de la circunferencia unitaria en el plano cartesiano. Se planea entonces dar a conocer una forma nueva, en la que las relaciones y funciones trigonométricas emerjan con razonamientos de tipo geométrico como semejanza y congruencia de triángulos, puntos terminales y nuevas razones trigonométricas, llamada trigonometría del cuadrado.

Palabras clave. Trigonometría, cuadrado, identidades, funciones.

---

[1] Estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, LEBEM, de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

[2] Espacio de formación del proyecto curricular de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

1. TRIGONOMETRÍA DEL CUADRADO

La trigonometría del cuadrado se considera una modificación de la trigonometría usual donde*:*

> *"se establece un cuadrado con centro en el origen cartesiano (al igual que la trigonometría circular) y un rayo que variará a razón de la circunferencia en radianes*" (Bautista, 2006)

Esta idea se muestra en el siguiente gráfico:

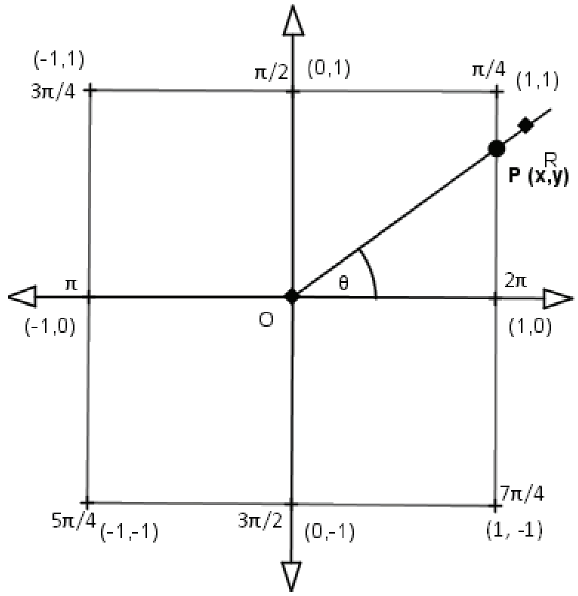


Figura 1. Gráfica del cuadrado trigonometrico

A partir de este gráfico se hace el planteamiento del problema que consiste en tres puntos fundamentales:

- Determinar y analizar las razones trigonométricas que emergen del estudio de este cuadrado, en relación con las ya existentes en donde se considera la circunferencia unitaria.
- Proponer funciones trigonométricas a partir del razonamiento con la trigonometría del cuadrado, realizando y analizando sus respectivas gráficas.
- A partir de las curvas generadas por las nuevas funciones en la trigonometría del cuadrado y de la definición de derivada construir las curvas que representan la derivada de éstas funciones, donde se hará su respectivo análisis.

2. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Partiendo del cuadrado de lado dos y de la circunferencia unitaria centrados ambos en el plano cartesiano, se encontrarán los *puntos terminales* para deducir las razones trigonométricas desde los ángulos que se pueden determinar en el cuadrado con ayuda de la trigonometría usual:

Ejemplo: Para hallar el punto terminal $\frac{\pi}{12}$ o 15° se construye un triángulo equilátero[3]:

[3] El procedimiento para determinar puntos terminales en la trigonometría del cuadrado se tomó de Biddle (1967).

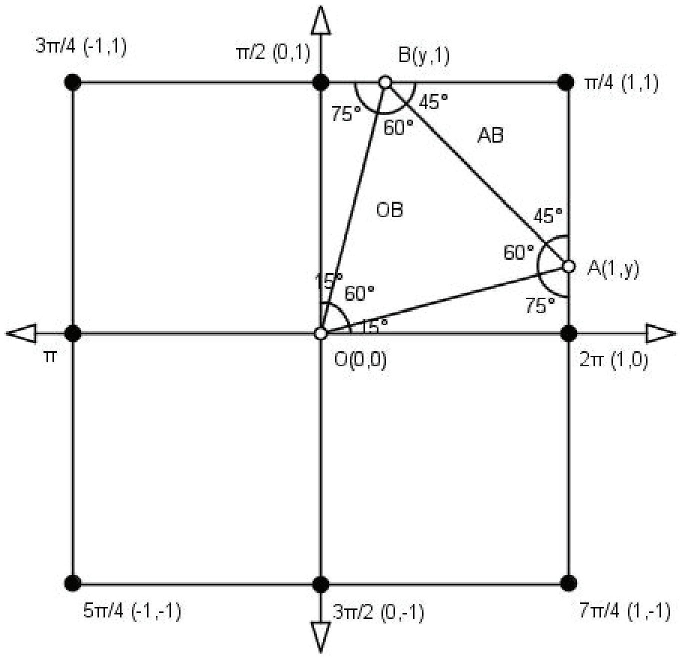


Figura 2. Definiendo el punto terminal $\frac{\pi}{12}$

De la Figura 2 se puede concluir:

$$OA = \sqrt{y^2 + 1}$$
$$OB = \sqrt{(y-1)^2 + (1+y)^2}$$

Como tenemos dos lados iguales y conocemos su representación igualamos las dos expresiones:

$$\sqrt{y^2 + 1} = \sqrt{(y-1)^2 + (1+y)^2}$$
$$y^2 + 1 = 2y^2 - 4y + 2$$
$$y^2 - 4y + 1 = 0$$
$$y_1 = 2 - \sqrt{3} \qquad Y \qquad y_2 = 2 + \sqrt{3}$$

Se descarta y_1 porque el cuadrado que se estableció es de lado 2, decimos que la coordenada para el punto terminal $\frac{\pi}{12}$ es $(1, 2 - \sqrt{3}$).

Si continuamos con este proceso para los siguientes puntos terminales se podrá llegara a plantear la siguiente tabla:[4]

[4] Tomada de Ramírez, C.; Salgado, A.; García, L. y Vargas, L. (2007).

θ	$P(x,y)$	θ	$P(x,y)$
0	$(1,0)$	π	$(-1,0)$
$\pi/_{12}$	$(1, 2-\sqrt{3})$	$13\pi/_{12}$	$(-1, -2+\sqrt{3})$
$\pi/_{6}$	$\left(1, \sqrt{3}/_{3}\right)$	$7\pi/_{6}$	$\left(-1, -\sqrt{3}/_{3}\right)$
$\pi/_{4}$	$(1,1)$	$5\pi/_{4}$	$(-1,-1)$
$\pi/_{3}$	$\left(\sqrt{3}/_{3}, 1\right)$	$4\pi/_{3}$	$\left(-\sqrt{3}/_{3}, -1\right)$
$5\pi/_{12}$	$(2-\sqrt{3},\ \ 1)$	$17\pi/_{12}$	$(-2+\sqrt{3}, -1)$
$\pi/_{2}$	$(0,1)$	$3\pi/_{2}$	$(0,-1)$
$7\pi/_{12}$	$(-2+\sqrt{3},\ \ 1)$	$19\pi/_{12}$	$(2-\sqrt{3}, -1)$
$2\pi/_{3}$	$\left(-\sqrt{3}/_{3}, 1\right)$	$5\pi/_{3}$	$\left(\sqrt{3}/_{3}, -1\right)$
$3\pi/_{4}$	$(-1,1)$	$7\pi/_{4}$	$(1,-1)$
$5\pi/_{6}$	$\left(-1, \sqrt{3}/_{3}\right)$	$11\pi/_{6}$	$\left(1, -\sqrt{3}/_{3}\right)$
$11\pi/_{12}$	$(-1, 2-\sqrt{3})$	$23\pi/_{12}$	$(1, -2+\sqrt{3})$
π	$(-1,0)$	2π	$(1,0)$

Tabla 1. Puntos terminales del cuadrado trigonométrico

3. Razones trigonométricas en el cuadrado

3.1 Razón trigonométrica Sen (ɵ) en el cuadrado

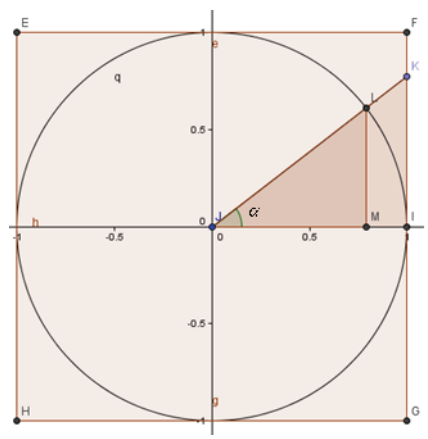


Figura 4. Razón trigonométrica Sen (ɵ) en el cuadrado

Como los triángulos JLM y JKI son semejantes, podemos establecer una razón de proporcionalidad entres sus lados como lo es:

$$\frac{LM}{KI} :: \frac{LJ}{KJ}$$

Por lo tanto:

$$LM = \frac{KI * LJ}{KJ} \qquad Y \qquad LJ = \frac{LM * KJ}{KI}$$

Desde la trigonometría de la circunferencia, el valor del seno del ángulo es:

$$\sin\alpha = \frac{LM}{LJ}$$

Como ya conocemos el valor de KI y KJ en términos de los lados del triángulo LJM, sustituyendo se tiene[5]:

$$\mathrm{Csin}\,\alpha = \frac{LM}{LJ} = \frac{\frac{KI * LJ}{KJ}}{\frac{LM * KJ}{KI}} = \frac{KI^2 * LJ}{KJ^2 * LM}$$

Como $\frac{LJ}{LM}$ es la inversa de $\sin\alpha$. La cual es $\csc\alpha$, tendríamos:

$$\mathrm{Csin}\,\alpha = \frac{KI^2}{KJ^2}\csc\alpha$$

El cual es el seno del ángulo α en términos del cuadrado.

Ahora bien, veamos un ejemplo definiendo un ángulo $\alpha = \frac{\pi}{6}$, teniendo en cuenta el punto terminal del mismo, el cual hallamos anteriormente como $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Determinemos las dimensiones del triángulo que se construye con este ángulo.

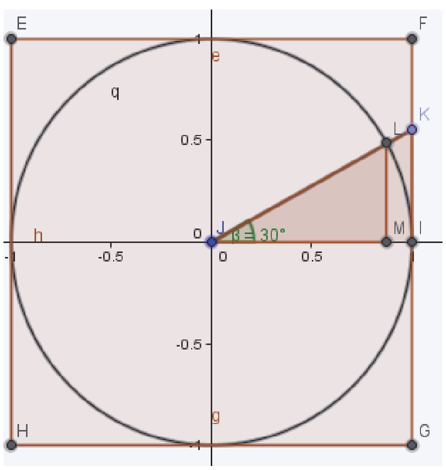


Figura 5. Obtención de Csen 30º

$$KI = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$KJ = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1} = 1.1547$$

$$\mathrm{Csin}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{1.1547^2} * \csc\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.5$$

3.2 Razón trigonométrica Cos (Θ) en el cuadrado

Considerando los mismos razonamientos frente a los triángulos anteriormente construidos, podemos determinar la relación entre los siguientes lados:

[5] Para diferenciar el $\sin\alpha$ de la trigonometría del cuadrado a la de la circunferencia, se antepone una "C" al seno del ángulo en términos de la trigonometría del cuadrado.

$$\frac{JM}{JI} :: \frac{JL}{JK}$$

Por lo tanto:

$$JL = \frac{JM * JK}{JI} \qquad Y \qquad JM = \frac{JI * JL}{JK}$$

Sabemos que desde la trigonometría de la circunferencia, el valor del coseno del ángulo es:

$$\cos\alpha = \frac{JM}{JL}$$

Como ya conocemos el valor de JK e IJ en términos de los lados del triángulo LJM, sustituyendo se tiene:

$$\mathrm{Ccos}\,\alpha = \frac{JM}{JL} = \frac{\frac{JI * JL}{JK}}{\frac{JM * JK}{JI}} = \frac{JI^2 * JL}{JK^2 * JM}$$

Como $\frac{JL}{JM}$ es la inversa del $\cos\alpha$. La cual es $\sec\alpha$, tendríamos:

$$\mathrm{Ccos}\,\alpha = \frac{JI^2}{JK^2}\, Sec\ \alpha$$

El cual es el coseno del ángulo α en términos del cuadrado.

3.3 Razón trigonométrica Tan (Θ) en el cuadrado

Podemos determinar la relación entre los siguientes lados:

$$\frac{LM}{MJ} :: \frac{KI}{IJ}$$

Por lo tanto:

$$LM = \frac{KI * MJ}{IJ} \qquad Y \qquad MJ = \frac{LM * IJ}{KI}$$

Sabemos que desde la trigonometría de la circunferencia, el valor de la tangente del ángulo es:

$$\tan\alpha = \frac{LM}{MJ}$$

Como ya conocemos el valor de KI e IJ en términos de los lados del triángulo LJM, sustituyendo se tiene:

$$\mathrm{Ctan}\,\alpha = \frac{LM}{MJ} = \frac{\frac{KI * MJ}{IJ}}{\frac{LM * IJ}{KI}} = \frac{KI^2 * MJ}{IJ^2 * LM}$$

Como $\frac{MJ}{LM}$ es la inversa de la $\tan\alpha$. La cual es $\cot\alpha$, tendríamos:

$$\mathrm{Ctan}\,\alpha = \frac{KI^2}{IJ^2}\cot\alpha$$

La cual es la tangente del ángulo α en términos del cuadrado.

4. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DEL CUADRADO

Teniendo en cuenta la manera en la cual se determinan las razones trigonométricas en la circunferencia de radio uno, se realizará un análisis partiendo de Seno y Coseno en el cuadrado de lado dos también centrado en el plano.

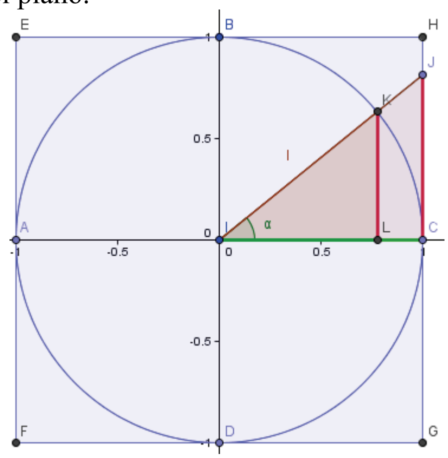


Figura 6. gráfica general de identidades trigonométricas.

4.1 FUNCIÓN SENO DEL CUADRADO

Para los siguiente sintervalos:

$$\left[0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\frac{3\pi}{4,5\pi}}{4}\right)\cup\left(\frac{7\pi}{4,2\pi}\right]$$

Por semejanza de los triángulos KLI y JCI podemos decir que se cumple,

$$\frac{\sin\theta}{cos\theta}=\frac{C\sin\theta}{Ccos\theta}$$

Pero $Ccos\theta$ es igual a uno en estos intervalos pues se mantiene constante, entonces podemos decir que,

$$\frac{\sin\theta}{cos\theta}=\frac{C\sin\theta}{1}$$

$$\tan\theta=Csin\theta$$

Para los intervalos que faltan($\left[\frac{\frac{\pi}{4,3\pi}}{4}\right]$, $\left[\frac{\frac{5\pi}{4,7\pi}}{4}\right]$), el Seno definido como el segmento CJ se mantendrá constante por lo tanto será 1 ó -1, con la siguiente demostración

$$\frac{\sin\theta}{cos\theta}=\frac{C\sin\theta}{C\cos\theta}$$

Pero $Ccos\theta$, como se demostrará en la definición de coseno para el cuadrado, en estos intervalos en específico es $\cot\theta$, entonces,

$$\frac{\sin\theta}{cos\theta}=\frac{C\sin\theta}{\cot\theta}\ ,\frac{\sin\theta*cot\theta}{cos\theta}=C\sin\theta\ , \qquad \frac{\sin\theta*\frac{cos\theta}{sin\theta}}{cos\theta}=C\sin\theta\quad ,1=Csin\theta$$

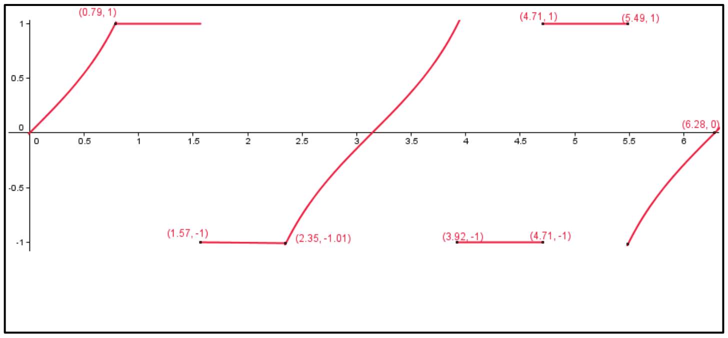


Figura 7. Gráfica de la función Csen

4.2 FUNCIÓN COSENO DEL CUADRADO

Para los siguientes intervalos:

$$\left[0,\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4},2\pi\right]$$

Por semejanza de los triángulos KLY y JCI podemos decir que se cumple,

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{C\sin\theta}{C\cos\theta}$$

$$C\cos\theta = \frac{C\sin\theta\cos\theta}{C\cos\theta}$$

Por demostración anterior del Seno de θ en el cuadrado para los intervalos mencionados aquí, se cumple que $C\sin\theta = \tan\theta$, reemplazando tenemos que

$$C\cos\theta = \frac{\tan\theta\cos\theta}{C\cos\theta}$$

$$C\cos\theta = \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos\theta}{C\cos\theta}$$

$$C\cos\theta = 1$$

Para los intervalos que restantes $\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)\left(\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right)$, el Coseno sí deberá variar ya que el cateto adyacente al ángulo no será siempre 1,

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{C\sin\theta}{C\cos\theta}$$

El seno de θ para el cuadrado en los intervalos mencionados por ser constantes y tener su máxima longitud será de uno, por lo tanto podemos reemplazar en la igualdad,

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{C\cos\theta}$$

$$C\cos\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$C\cos\theta = \cot\theta$$

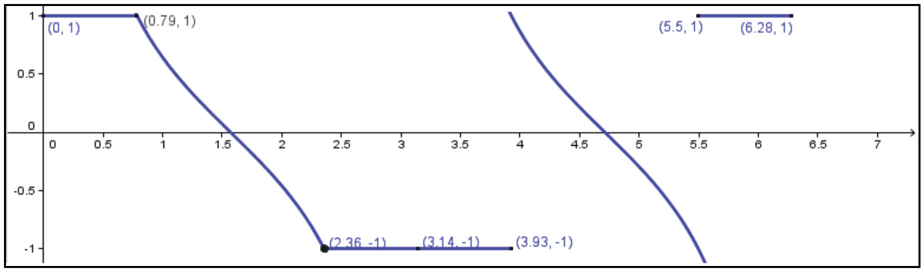


Figura 8. Gráfica de la función Ccos

4.3 FUNCIÓN TANGENTE DEL CUADRADO

Para los siguientes intervalos: $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\frac{3\pi}{4,5\pi}}{4}\right)\cup\left(\frac{7\pi}{4,2\pi}\right]$

$$Ctag\theta=\frac{Csin\theta}{Ccos\theta}$$

Por la primera parte de Seno θ y Coseno θ respectivamente podemos decir que,

$$Ctag\theta=\frac{tag\theta}{1},\qquad Ctag\theta=tag$$

Para los intervalos restantes [$\frac{\frac{\pi}{4,3\pi}}{4}$], [$\frac{\frac{5\pi}{4,7\pi}}{4}$]

El cateto opuesto al ángulo se mantendrá constante, por lo cual el valor que se le dará a la tangente se puede determinar de la siguiente manera, $Ctag\theta=\frac{1}{Ccos\theta}$

Por la demostración del coseno en el cuadrado para estos intervalos podemos decir que,

$$Ctag\theta=\frac{1}{cot\theta}$$

$$Ctag\theta=\frac{sin\theta}{cos\theta}=tag\theta$$

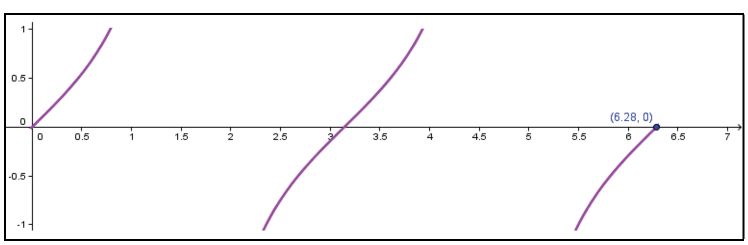


Figura 9. Gráfica de la función Ctan

4.4 DERIVADA DE LA FUNCION $Csin\theta$

Como la función seno en el cuadrado es la funcion tangente en la circunferencia $Csin\theta = \tan\theta$, entonces la derivada de $Csin\theta$ en el cuadrado será la derivada de $\tan\theta$ en la circunferencia es decir $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$, teniendo en cuenta para los valores que se cumple en el caso del cuadrado:

$$f'(x)\begin{cases} \frac{1}{\cos^2(x)} \; en \left[0,\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4,5\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4,2\pi}\right] \\ 0 \; en \left[\frac{\pi}{4,3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4,7\pi}{4}\right] \end{cases}$$

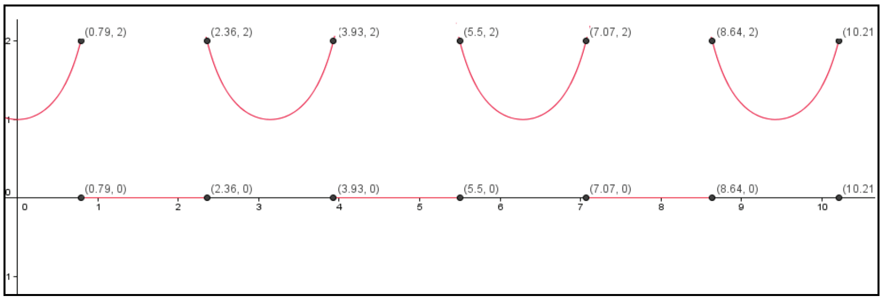


Figura 10. Gráfica de la derivada de la función Csen

4.5 DERIVADA DE LA FUNCION $Ccos\theta$

Como la función coseno en el cuadrado es la funcion cotangente en la circunferencia $Ccos\theta = Cot\theta$, entonces la derivada de $Ccos\theta$ en el cuadrado será la derivada de $Cot\theta$ en la circunferencia es decir $f'(x) = -\frac{1}{sen\theta}$ para los valores que se cumple en el caso del cuadrado:

$$f'(x)\begin{cases} -\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} \; en \left[0,\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4},2\pi\right] \\ 0 \; en \left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right], \left[\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right] \end{cases}$$

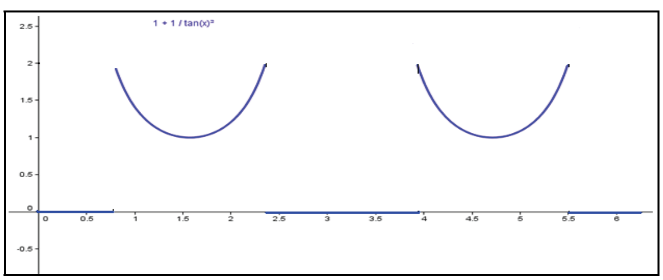


Figura 11. Gráfica de la derivada de la función Ccos

Las demás derivadas de $Ctan(x), Ccot(x), Ccsc(x), Csec(x)$ serán las mismas que en la circunferencia.

5. CONCLUSIONES

- Resaltamos esta experiencia en el sentido de darle importancia a la matemática como ciencia inacabada y con posibilidad de descubrirse y aprenderse, entendiéndola como una ciencia donde se da la oportunidad de inventar, experimentar y generar conocimientos innovadores.
- Por otra parte es necesario crear conciencia de la necesidad de ver la matemática desde otros enfoques y otras miradas con el fin de complementarla y fortalecerla, evidenciando que hay muchas maneras de aprender trigonometría y otras ramas de la matemática además de la usual.
- La trigonometría del cuadrado permitió conocer una forma nueva, en la que las relaciones y funciones trigonométricas emergieron con razonamientos de tipo geométrico como semejanza y congruencia de triángulos, puntos terminales y nuevas razones trigonométricas.
- El razonamiento geométrico permitió dar cuenta de cómo a partir de conocimientos ya adquiridos es posible la construcción de nuevos, por medio de cuestionamientos que se realicen con el trabajo usual.
- Los razonamientos no usuales dentro del campo de la trigonometría con los cuales se han formalizado conceptos como razón y función trigonométrica, dan cuenta que la matemática puede ser vista aun como ciencia que ha de ser explorad

REFERENCIAS

Bautista, L. (2006). Trigonometría del Cuadrado. *En memorias de XVII Encuentro de Geometría y sus aplicaciones y en V Encuentro de Aritmética*. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional y Universidad Sergio Arboleda.

Biddle, J. (1967). The square function: An abstract system for trigonometry. *The Mathematics Teacher*, *60* (2), 121-123).

Ramírez, C.; Salgado, A.; García, L. y Vargas, L. (2007). *La trigonometría del Cuadrado y coordenadas polares* (Trabajo de grado (pregrado). Recuperado de http://www.uces.edu.ar/biblioteca/citas-bibliograficas-APA-2010.pdf

Pérez, J. y Quiralte, V. (2006). *Matemáticas, triángulos y trigonometría, eso. Cuaderno de Ejercicios y problemas 9*. España. L. Vives.

Volver al índice Comunicaciones Breves

Tratamiento de los conceptos estadísticos de Aleatoriedad y Azar en los libros de texto

Duberney Urquina Arce
Universidad de la Amazonia

Resumen. *En este trabajo presento un estudio del significado de los conceptos estadísticos de "Aleatoriedad y azar" en una muestra de 12 libros de educación secundaria de diferentes editoriales.*

Analizo los problemas propuestos, algoritmos, definiciones, propiedades, representaciones y argumentos. Concluyo la variedad de significados presentados en los libros para un mismo concepto, así como la ausencia de algunos elementos que lo harían más significativo para los estudiantes.

Palabras clave. Libros de texto, Aleatoriedad, Azar, significado, comprensión.

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo me intereso por revisar en los libros de texto, los conceptos estadísticos de Aleatoriedad y azar en la educación secundaria, continuando otros trabajos previos (Batanero y Romero, 1995). Está claro que las posibles dificultades que los estudiantes encuentren en el tema dependerán de la enseñanza recibida.

En los últimos años, las investigaciones realizadas en el campo de la estocástica han mostrado su relevante papel tanto en el desarrollo del individuo como en el entorno social. El reconocimiento de la incertidumbre, como una característica de la realidad, y aprender a manejarse con ella, son fundamentales en el desarrollo intelectual de los individuos del siglo XXI.

Cuando queremos reflexionar sobre la dificultad que el aprendizaje de ciertos conceptos tiene para los estudiantes, es necesario comenzar por hacer un análisis epistemológico de su significado.

Como indica Godino (1996, p. 418):

> *«el problema de la comprensión está íntimamente ligado a cómo se concibe el propio conocimiento matemático. Los términos y expresiones matemáticas denotan entidades abstractas cuya naturaleza y origen tenemos que explicitar para poder elaborar una teoría útil y efectiva sobre qué entendemos por comprender tales objetos. Esta explicitación requiere responder a preguntas tales como: ¿Cuál es la estructura del objeto a comprender? ¿Qué formas o modos posibles de comprensión existen para cada concepto?, ¿Qué aspectos o componentes de los conceptos matemáticos es posible y deseable que aprendan los estudiantes en un momento y circunstancias dadas?».*

Aquí me centro exclusivamente en los conceptos de "Aleatoriedad y Azar" siguiendo a Batanero y Serrano (1995): las expresiones "experimento aleatorio", "suceso aleatorio", incluso los sustantivos el "azar", "aleatorio", aparecen con frecuencia, tanto en el lenguaje cotidiano, como en los manuales escolares. Pero su significado, al referirse a una entidad abstracta, no queda unívoca y nítidamente determinado, lo cual creará dificultades de comprensión en los estudiantes.

> “Como afirmamos en Godino y Batanero (1994), el significado de los objetos matemáticos no puede reducirse a su mera definición matemática cuando nos interesamos por los procesos de enseñanza y aprendizaje de los mismos. Las diversas situaciones problemáticas y las prácticas que hacen las personas para resolverlas en distintas instituciones y momentos históricos aportan rasgos característicos de las nociones que en ellas intervienen, los cuales deben ser tenidos en cuenta en la enseñanza.

Como argumentan Konold y Cols. (1991), de hecho, es preferible ver el término "aleatoriedad" como una etiqueta a la que van asociados muchos conceptos, como los de experimento, suceso, espacio muestral, probabilidad, etc. En este sentido, la palabra aleatoriedad nos remite a una colección de conceptos y procedimientos matemáticos que podemos aplicar en muchas situaciones. Por ello, deberíamos pensar en una orientación que tomamos hacia el fenómeno que calificamos de "aleatorio" más que en una cualidad del mismo. Aplicamos un modelo matemático a la situación, porque nos resulta útil para describirla y comprenderla pero no creemos que la situación sea idéntica al modelo.

En este marco teórico, el significado de un concepto matemático varía según la institución considerada y los instrumentos semióticos disponibles en la misma. En la escuela se fijan unos significados determinados para los conceptos a enseñar, pero un estudiante, en un momento de su proceso de aprendizaje, puede asignar a la “Aleatoriedad y azar” un significado que no corresponde exactamente con el anterior. Tampoco el significado en una institución escolar, como, por ejemplo, la enseñanza secundaria, se tiene que corresponder exactamente con el atribuido por los matemáticos profesionales.

En este trabajo tratare de caracterizar los componentes del significado que, de la Aleatoriedad y Azar”, se presenta en los libros de texto de enseñanza secundaria. A continuación presento este análisis, haciendo primero unas breves consideraciones sobre la importancia de los libros de texto y resumiendo brevemente las investigaciones previas más relevantes.

2. FUNDAMENTOS

2.1 IMPORTANCIA DEL LIBRO DE TEXTO.

Mi estudio se justifica por la importancia que el libro de texto tiene como recurso didáctico, señalada ya en el informe Cockroft (1985), *donde se afirma que los libros de texto constituyen una ayuda inestimable para el profesor en el trabajo diario del aula*.

Chevallard (1991) sugiere que *los libros de texto ofrecen una concepción legitimada del saber a enseñar e institucionalizan una forma de progresión del conocimiento de los estudiantes.*

Por otro lado, Robert y Robinet (1989) indican que “el estudio de los libros de texto nos permite conocer, de manera indirecta, la concepción del profesorado sobre un contenido específico, puesto que, al elegir los materiales curriculares que se van a emplear, intervienen muchas variables y al tomar la decisión de utilizar uno u otro texto se está posicionando y compartiendo, al menos parcialmente, lo que éste propone.

Según Ortiz de Haro (1999), un libro de texto se considera como un segundo nivel de transposición didáctica, después del primer nivel, que lo constituirán los currículos y programas oficiales. Si en un texto aparece un significado sesgado, éste puede llegar a transmitirse a los alumnos; el profesor que los usa debería mantener una permanente vigilancia epistemológica sobre el contenido de los libros de texto.

Es importante analizar el significado de los conceptos estadísticos que estos libros transmiten si queremos asegurar que cumplan la función para la que han sido diseñados.

2.2 SÍNTESIS DE INVESTIGACIONES PREVIAS

Son muchas las investigaciones sobre la comprensión de los conceptos de Aleatoriedad y Azar, que, en general indican dificultades en el aprendizaje. Por ejemplo, "*La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas"* de Carmen Batanero Bernabeu, Luis Serrano Romero:

> Encontraron que las cuestiones epistemológicas ocupan un lugar fundamental en la reflexión de las personas interesadas por el aprendizaje de las matemáticas. Ello es debido a que los obstáculos surgidos históricamente en la formación de los conceptos se reproducen, con cierta frecuencia, en los alumnos. Otras veces, los estudios de tipo epistemológico pueden ayudar a comprender las dificultades de los alumnos en el uso de los conceptos para la resolución de problemas.

Batanero y Serrano (1991) presentan una reflexión epistemológica -desde una perspectiva didáctica- sobre la noción de aleatoriedad, la cual, junto con la idea de probabilidad es punto de partida del cálculo de probabilidades. El interés y necesidad de este estudio parece claro, ya que la mayor parte de los nuevos currículos de matemáticas de los niveles de enseñanza obligatoria proponen intensificar el estudio de los fenómenos aleatorios.

"Concepciones de futuros profesores de Primaria sobre la noción de Aleatoriedad" de Azcárate, P., Cardeñoso, J. y Porlán, R. (1998):

> **"**la caracterización de la aleatoriedad de los fenómenos. La aleatoriedad, siendo el núcleo del conocimiento probabilístico, es considerada habitualmente como un concepto «obvio» y su significado no es analizado con profundidad. Sin embargo, podemos suponer que determinados tipos de concepciones sobre ella pueden ser un claro obstáculo para la comprensión de la naturaleza probabilística de ciertos aspectos de la realidad"

La importancia de la noción de *aleatoriedad* estriba en ser un concepto que, de hecho, está implicado directamente con nuestra propia forma de concebir la realidad y el conocimiento.

Como analiza el propio Kyburg (1974, p. 217), "es un concepto relacionado con nuestro cuerpo de conocimiento, el cual de algún modo refleja qué conocemos y qué no conocemos"*;* hay una clara dependencia entre el reconocimiento de un suceso como aleatorio y el cuerpo de conocimiento del observador que esté emitiendo el juicio. Al mismo tiempo, también es importante porque, como apunta Bennett (1993, p. 158), "una clara comprensión del concepto de aleatoriedad es de crucial importancia para dominar ciertos conceptos probabilísticos y estadísticos".

"Tres elemntos de la Complejidad y su relacion con el azar" de Gabriel Conde Arango:

> "Hay que reconocer un establecimiento en la ciencia, el cual guia y determina su propio desarrollo. Explicita o implicitamente se admiten los conceptos y su practica queda determinada por esta aceptacion. Sin embargo cualquier desarrollo visto en este marco sera limitado, pero ademas, el mismo sistema cientifico y de conocimiento provee los medios para que surjan nuevas maneras de advertir y buscar otros caminos. El azar es un concepto que no esta por fuera de tal estructura. Se espera entonces que la teoria y la

practica que involucra el azar, por un lado este limitada por tal organización, pero hay tensiones que generan elemntos “liberadores” que permiten una visionmas alla de cualquier establecimiento. Lo aleatorio (que aquí es sinonimo de azar), ha tenido y tiene una interpretacion teorica o intuitiva, que mas o menos es aceptada por la comunidad cientifica. Sin embargo en las dos ultimas decadas se han manifestado corrientes de pensamiento que cuestionan o por lo menos muestran una percepcion diferente a la interpretacion actualmente generalizada de azar.

Referencias Bibliograficas

Azcárate, P., Cardeñoso, J. y Porlán, R. (1998). Concepciones de futuros profesores de Primaria sobre la noción de Aleatoriedad. *Enseñanza de las Ciencias, 16*(1), 85-97.

Batanero, C. & Serrano, L. (1995). La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. *Revista UNO*, 5, 15-28.

Cockroft (1985), El lenguaje probabilístico en los libros de texto, Juan de Jesús Ortiz.

Godino, J.D., Batanero, C. y Cañizares, M. (1987). *Azar y probabilidad Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Síntesis.

Godino, J. D. Y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 14* (3), 325-355.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Konold, C. y cols. (1991). Concepciones de Futuros profesores de Primaria sobre la noción de aleatoriedad. Citado por Azcárate et al. (1998).

Kyburg, H. (1974). Concepciones de Futuros profesores de Primaria sobre la noción de aleatoriedad. Citado por Azcárate et al. (1998).

Volver al índice Comunicaciones Breves

Concepción de área en estudiantes de grado sexto

Milton Rodríguez Santos, milrod33@yahoo.com,
Danny Jovel Escobar, danny9480@hotmail.com
Universidad del Tolima

Resumen. El presente Trabajo identificará la concepción del concepto de área que poseen los estudiantes de grado sexto. Este estudio nace como respuesta a los escasos conocimientos geométricos, y en particular sobre áreas, que hemos observado en los escolares. Hacemos un acercamiento a través de teorías como las de Artigue, Vinner, la EMR y el Modelo Van Hiele. Clasificamos el conocimiento en tres clases (*formal*, *curricular* y *personal*). Particularmente, el conocimiento personal está referido al estudiante, que es nuestro objetivo. La metodología parte de la premisa que el alumno tiene una concepción sobre los conceptos matemáticos, manifestada en la forma como aborda los problemas y justifica sus procedimientos o afirmaciones relacionados con el concepto.

1. Introducción

El concepto de área es uno de los más básicos y profundos de las matemáticas (Freudenthal, 1983, citado por Turégano, 1989) y su aprendizaje es "un proceso complejo que no puede de ser adquirido inmediatamente" (Carbó, Mántica y Saucedo, 2007). Él exige un alto grado de conceptualización que, según Chamorro (2003), es tanto de orden geométrico como aritmético; ahí está la fuente de la mayoría de los obstáculos y dificultades que constantemente presentan los estudiantes. Además, el concepto de área es de nivel cognoscitivo superior al de longitud, como lo confirma Turégano (1989), quien a su vez recalca que su apropiación conlleva grandes retos didácticos.

Muchos docentes creen que los estudiantes ante una tarea fundamentan sus juicios en definiciones formales de conceptos; pero las investigaciones (Vinner, 1991) muestran que cuando el alumno enfrenta un problema, no utiliza definiciones, sino que realmente evoca la *concepción* que tiene de ellos. Este estudio indagará la concepción de área en estudiantes de grado sexto.

2. La formación de conceptos

Muchos autores en Educación Matemática han contribuido con teorías sobre la "formación de conceptos" (e.g., Skemp, 1980; Tall y Vinner, 1981; Vinner y Dreyfus, 1989; Artigue, 1990; Vergnaud, 1990; Vinner, 1991; Godino y Batanero, 1994; Calvo, 2001; Sotos, 2004; D`Amore, 2001; Turégano, 2006).

Tall y Vinner (1981, citado por Jaime, 1995) distinguen entre el concepto como conocimiento de los matemáticos y como conocimiento de quien lo aprende; este último lo denominan "imagen del concepto". Por su parte, Artigue (1990, citado por Azcárate, 1995) hace la misma distinción pero denomina "concepción" al concepto del aprendiz. Hemos observado diferencias entre el conocimiento del 'matemático' y del estudiante. En este estudio consideramos asociados a un concepto matemático tres tipos de conocimientos: Formal, curricular y personal. El *conocimiento formal* es aquel que, durante la historia de la matemática, han producido los matemáticos sobre el concepto. El *curricular* es el conocimiento formal de un concepto matemático, transformado para ser enseñado. Y el *conocimiento personal* es aquel que de un concepto matemático tiene una persona que lo aprende.

Componentes de un concepto. Según Tall y Vinner (1981, citado por Turégano, 2006), un concepto posee atributos relevantes e irrelevantes. Los *relevantes* son aquellas propiedades que definen el concepto, mientras que los *irrelevantes* son características no necesarias para el concepto (sólo diferencian ejemplos). Artigue (1990, citada por Azcárate, 1995) precisa componentes para un concepto, que llamaremos: Definiciones, problemas, representaciones, teoría y procedimientos.

En matemáticas, las definiciones son uno de los componentes de un concepto, y sólo poseen atributos relevantes. En la imagen del concepto, cuando existen definiciones, además de atributos relevantes, ellas pueden contener atributos irrelevantes. En estudiantes se puede reconocer la presencia de atributos relevantes o irrelevantes cuando ellos realizan, identifican o utilizan ejemplos y contraejemplos. Para ilustrar cambios en atributos de la definición de un concepto enunciaremos una definición formal y una curricular.

Definición formal de área. Apostol (1984) introduce el concepto de área mediante seis axiomas partiendo de una clase M de conjuntos del plano medibles y una función a de dominio M. Toma conjuntos S y T de M, indicando que $S \cup T$, $S \cap T$ y $T - S$ están en M, estableciendo que: Para todo S, $a(S) \geq 0$; si $S \cong T$ entonces $a(S) = a(T)$; si S es rectángulo de lados h y k, entonces $a(S) = hk$; sea $Q \in M \,/\, S \subseteq Q \subseteq T$ (1), si existe uno y sólo un número c / $a(S) \leq c \leq a(T)$ para todo S y T que satisfagan (1), entonces Q es medible y $a(Q) = c$. Además, $a(S \cup T) = a(S) + a(T) - a(S \cap T)$ y $a(T - S) = a(T) - a(S)$.

Definición curricular de área. Ingenio Matemático 6 (2006) dice: "Una línea cerrada determina dos regiones, la interior y la exterior. La medida de la región interior es el área. Calcular el área es hallar la medida de la superficie encerrada por la frontera" (p. 134). Así, en este texto, el área es la medida de la región interior a una línea cerrada. Nótese que área como concepto formal es un concepto primitivo cuyos atributos se introducen mediante axiomas, dentro de éstos nuevamente hay conceptos, como el de función. Sin embargo, área como concepto curricular no es concepto primitivo sino definido mediante otros conceptos, como *región del plano*. En este caso, además de cambios en los atributos, también hay cambio en la naturaleza del concepto.

3. Conocimiento personal de un concepto geométrico

Modelo de Van Hiele. Este modelo –referente teórico para propuestas curriculares de geometría– consta de tres partes: niveles de razonamiento, fases de aprendizaje y propiedades. Según Jaime (1995), los niveles de razonamiento se pueden entender como maneras distintas de comprender un concepto geométrico. Como el Modelo consta de cinco niveles de razonamiento, entonces existen cinco maneras distintas de comprender el concepto, y de su comprensión harían parte, como mínimo, procesos como definir, clasificar, representar, demostrar y, plantear y resolver problemas.

La Educación Matemática Realista (EMR). Para Alsina (2009), la EMR es una propuesta de enseñanza y aprendizaje de la matemática que ha organizado sus elementos teóricos a partir de interrogantes como, por ejemplo, qué es la matemática; cómo y qué se enseña; cómo, cuándo y con quién se aprende[1]. Todo se organiza en seis principios: de actividad, de realidad, de niveles, de reinvención guiada, de interacción y de interconexión. En los niveles de Van Hiele y de la EMR, hay uno inicial y otro final. El nivel inicial (1 para Van Hiele y situacional para la EMR) corresponde a lo que tiene sentido para un estudiante en relación a un concepto, lo que sabe y que ha aprendido –conocimiento personal– dentro y fuera del salón. En el nivel final (4 para Van Hiele y formal para la EMR) también coinciden ambas propuestas. Una enseñanza adecuada (las fases de aprendizaje para Van Hiele y los seis principios para la EMR) permitirá avanzar del nivel inicial al final[2].

4. METODOLOGÍA

Esta investigación estudia la concepción de área en estudiantes de grado sexto, seleccionando un curso de la Institución Educativa El Jardín, que es un colegio urbano de estrato dos de Ibagué. La Institución consta de tres sedes que atienden aproximadamente 2.200; la tasa de mortalidad en bachillerato es aproximadamente del 25% y para el año 2010, los resultados en las pruebas ICFES estuvieron entre 40 y 60 puntos. El curso elegido consta de 48 estudiantes, 23 hombres y 25 mujeres, con un promedio de 12 años de edad. La investigación es de tipo cualitativo. Se hará un Estudio de Casos, seleccionando dos estudiantes, con el fin de profundizar en el análisis de la información, para comprender cómo piensa y razona un estudiante.

Instrumento aplicado. Teniendo en cuenta los componentes de un concepto de Vinner y la definición formal de área (Apostol, 1984) se aplicó un cuestionario cuyo objetivo era indagar si los estudiantes al clasificar y comparar figuras encontraban atributos relevantes para este concepto. A través de las instrucciones dadas se solicitó clasificar todas las figuras bajo un sólo atributo, esperando que fuera relevante en la definición de área. No se esperaba que subdividieran cada figura en unidades de superficie de forma cuadrada, por ejemplo, decir que las figuras 2 y 3 son de igual tamaño por tener siete cuadrados unidad; en cambio se esperaba que, por ejemplo, concluyeran que dichas figuras tenían el mismo tamaño porque eran resultado de una rotación, lo cual equivaldría a la congruencia por rotación en la definición de área de Apostol (1984).

[1] Para otras presentaciones de la EMR ver Bressan, Zalkower y Gallego (2005) y Goffree (2000).

[2] Enseñanza, que para el caso de la educación colombiana, se tienen once años (cinco de primaria y seis de secundaria) para completar los cuatro niveles de comprensión de cualquier concepto matemático.

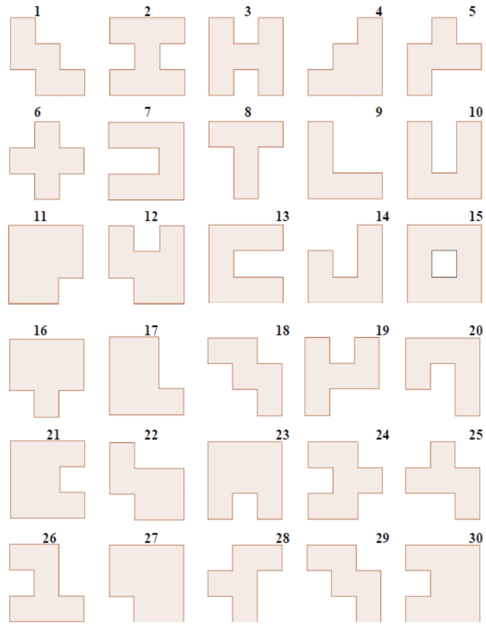


Figura 1. Instrumento para la captación de atributos relevantes en el concepto de área

Análisis. Una observación preliminar mostró que algunos estudiantes al referirse a ciertas figuras decían que "les falta un cuadrado". Con este criterio, de «cuadrados que le faltan» se clasificaron todas las figuras, obteniendo:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
falta 1											x				x						x		x				x			x
falta 2		x	x				x			x		x	x			x	x													
falta 3				x										x					x	x		x		x		x				
falta 4	x				x	x		x	x									x							x			x	x	

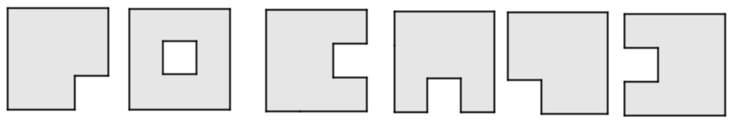
Tabla 2. Clasificación de figuras adoptada para el cuestionario

De acuerdo con lo anterior, tenemos los siguientes conjuntos de figuras:

- Conjunto 1. Está formado por las figuras que 'les falta' un cuadrado (figuras 11, 15, 21, 23, 27, 30).
- Conjunto 2. Está formado por las figuras que 'les faltan' dos cuadrados (figuras 2, 3, 7, 10, 12, 13, 16, 17).
- Conjunto 3. Está formado por las figuras que 'les faltan' tres cuadrados (figuras 4, 14, 19, 20, 22, 24, 26).
- Conjunto 4. Está formado por las figuras que 'les faltan' cuatro cuadrados (figuras 1, 5, 6, 8, 9, 18, 25, 28, 29).

4. Resultados

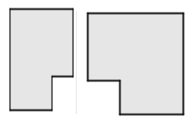
Conjunto 1, alumno 47A. Las figuras del conjunto 1 son:



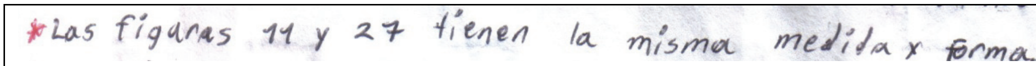
El estudiante no incluyó todas estas figuras en un mismo conjunto, sino que obtuvo los siguientes tres subconjuntos:

- Subconjunto 1A. Figuras 11 y 27
- Subconjunto 2A. Figuras 21, 23 y 30
- Subconjunto 3A. Figura 15.

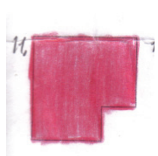
I. **Subconjunto 1A**. Está formado por las figuras 11 y 27:



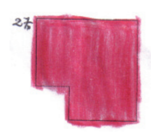
Respecto a estas figuras afirmó lo siguiente:



F11



F27



Al mes y por fuera del aula de clase, al preguntársele sobre lo que quiso decir con misma medida y forma, el estudiante respondió: “Son la misma sino que este lado que tiene acá (señala el lado inferior de la figura 11), éste lo tiene a la derecha (señala el lado inferior de la figura 27)”.

Estrategia. El estudiante aplica *equidescomposición,* ya que muestra como traslada de izquierda a derecha las dos cuadrículas inferiores de la figura 11 para transformarla en la figura 27.

Razonamiento. Su razonamiento es de tipo *deductivo* y se puede describir de la siguiente forma: si traslado los dos cuadros inferiores de la figura 11, entonces obtengo la figura 27.

Destreza. Se observa habilidades *visual* y *lógica* ya que extrae información de las figuras en cuestión y es capaz de ordenar esas ideas para llegar a una conclusión.

Atributos.

Atributos relevantes. Para el área identifica las propiedades de *aditividad*, *diferencia* e *invariancia por congruencia*, puesto que extrae una fracción de la figura y la traslada (agregándola) a otra sección para obtener la otra figura. Reconoce que el segmento al ser trasladado no cambia su ‘tamaño’.

Atributos irrelevantes. El estudiante entiende que tener la misma *forma* y distinta *posición* no altera el tamaño.

La siguiente tabla resume el análisis anterior

CATEGORÍA	Figuras 11 y 27
Estrategia	Equidescomposición
Razonamiento	Deductivo
Atributos	Relevantes: Aditividad, diferencia e invariancia por congruencia Irrelevantes: Forma y posición
Destrezas	Habilidades visual y lógica

Tabla 3. Análisis de la clasificación de las figuras 11 y 27

La siguiente tabla resume el análisis del conjunto 1 para el alumno 47A

CATEGORÍA	Figuras 11 y 27	Figuras 21, 23 y 30	Figura 15
Estrategia	Equidescomposición	Transformación geométrica	Comparación con objetos cotidianos
Razonamiento	Deductivo	Deductivo	Analogía
Atributos	Relevantes: Aditividad, diferencia e invariancia por congruencia Irrelevantes: Forma y posición	Relevantes: Invariancia por congruencia Irrelevantes: Forma y posición	Relevantes: No se observan Irrelevantes: Forma
Destrezas	Habilidades visual Comparación con objetos cotidianos y lógica	Habilidades visual y lógica	Habilidades visual y lógica

Tabla 6. Análisis del conjunto 1 para el alumno 47A

A continuación se clasifican las estrategias utilizadas por el estudiante 47A

ESTRATEGIA	CLASIFICACIÓN
Equidescomposición	Cualitativa
Transformación geométrica	Cualitativa
Comparación con objetos cotidianos	Cualitativa

Tabla 7. Clasificación de las estrategias utilizadas por el estudiante 47A

REFERENCIAS

Alsina, A. (2009). El aprendizaje realista: Una contribución de la Investigación en educación matemática a la formación del profesorado. En: González M. J.; González., M. T. y Murillo, J. (eds.). *Investigación en Educación Matemática XIII*. Santander. SEIEM, pp. 119-127.

Apostol, T. (1984). *Calculus.* Vol. I. Madrid: Reverté, 811 p.

Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didáctique des Mathématiques, 10* (2-3), 241-286.

Azcárate, C. (1995). Sistemas de representación. *Revista UNO,* Nº 4, 53-61.

Bressan, A.; Zolkower, B. y Gallego, M. (2005). Los principios de la Educación Matemática Realista. En: Alagia, H.; Bressan, A. y Sadovsky, P. *Reflexiones Teóricas para la Educación Matemática*. Libros del Zorzal, 69-98.

Carbó, Mantica y Saucedo (2007) *La construcción del concepto de área: Un proceso complejo.* Revista Novedades Educativas. Argentina.

Chamorro, M. C. (2003) *Didáctica de las Matemáticas para primaria.* España: Pearson.

D´Amore, B. (2001). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. La posición "ingenua" de una teoría "realista" «versus» el modelo "antropológico" en una teoría "pragmática". *Revista UNO*, Nº 27, 51-76.

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques,4*(3).

Goffree, F. (2000). Principios y paradigmas de una "Educación Matemática Realista*"*. En: Gorgorio, N.; Deulofeu, J y Bishop, A. (coords). *Matemática y Educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp. 151-168). Barcelona: ICE/Graó.

Gordillo Ardila, J. A. (2006) *Ingenio Matemático 6.* Colombia: Voluntad.

Jaime, A. (1995). Vinner y la formación de conceptos. En: Gutierrez, A. y Jaime, A. *Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática.* México: Iberoamericana-una empresa docente.

Skemp, R. (1980) *Psicologia del aprendizaje de las Matemáticas.* Madrid. Morata.

Sotos, M. (2004) ¿En qué piensa el alumnado cuando decimos número? *Revista UNO*, n. 37, 93-104.

Tall, D. y Vinner, S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12,* 151-169.

Turégano Moratalla, P. (1989). Propuesta metodológica para tratar de subsanar las dificultades didácticas y teóricas que se observan en la adquisición del concepto cualitativo del área. *Ensayos* N° 3, 235-256.

Turégano Moratalla, P. (2006). Una interpretación en la formación de conceptos y su aplicación en el aula. *Ensayos*, N° 21, 35-48.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 10*(2-3), 133-170.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En: Tall, D. (ed.) *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Vinner, S. y Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function.*Journal for Research in Mathematics Education, 20,* 356-366.

Volver al índice Comunicaciones Breves

“Laksaud” recurso didáctico para la enseñanza de la media aritmética

Lindesney Vargas Figueroa [1]
lvargasf@correo.udistrital.edu.co

Yenny Carolina Novoa Parra
ycnovoap@correo.udistrital.edu.co

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Resumen. En esta comunicación se presenta la utilización del laksaud como recurso didáctico para la enseñanza de la media aritmética, trabajo que se llevó a cabo con estudiantes de grado noveno del colegio Instituto Técnico Industrial Francisco José de Caldas, observando ventajas y desventajas que se encuentran en el manejo del recurso didáctico.

Palabras claves: Recurso didáctico, media aritmética.

1. INTRODUCCIÓN

Para la enseñanza de la estadística actualmente, se tienen escasos recursos didácticos que le permitan al profesor de la educación básica facilitar la comprensión de los conceptos estadísticos a partir de la aplicación en la vida cotidiana. Según Godino (1998):

> *“se puede considerar como material didáctico cualquier medio o recurso que se use en la enseñanza y aprendizaje de la estadística, identificando los recursos didácticos como instrumentos semióticos del trabajo estadístico; ya sean manipulativos (u objetos ostensivos), manipulativos tangibles; los cuales ponen en juego la percepción táctil y manipulativos gráfico-textuales-verbales, en los que participan la percepción visual y/o auditiva”*

Por tal motivo, es necesario realizar innovaciones didácticas que permitan al estudiante explorar y observar de manera sencilla diversos conceptos estocásticos a través de la percepción táctil, dando importancia al concepto a enseñar.

---

[1] Estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas.

2. UTILIZACIÓN DEL RECURSO DIDÁCTICO EN LA ENSEÑANZA DE LA MEDIA ARITMÉTICA

Una de las innovaciones en recursos didácticos es el laksaud, el cual se ha estado desarrollando en el proyecto de investigación: "Análisis e interpretación de la trayectoria docente en la enseñanza de la media aritmética", en estudiantes de grado noveno. El laksaud es un recipiente que esta dividido en tres compartimientos (figura 1). Dichas divisiones pueden ser retiradas de tal manera que el recipiente quede con un solo compartimiento (figura 2).

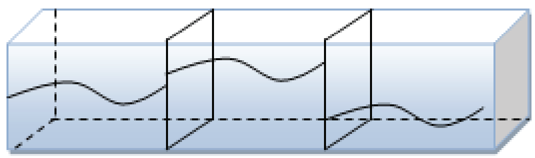


Figura 1

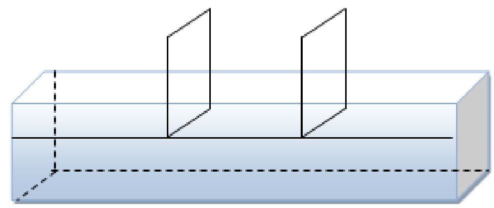


Figura 2

Este recurso nace de la necesidad de enseñar la media aritmética de manera sencilla y didáctica, lo que posibilita la interacción del estudiante con el concepto y a su vez con un material tangible. El laksaud es un prisma rectangular elaborado en vidrio, que tiene divisiones móviles que se puede retirar y colocar, las cuales se pueden llenar con diferentes materiales (arena, aserrín, agua, escarcha, entre otros). Quedando cada compartimiento con alturas diferentes.

La idea didáctica de este recurso se ve reflejada en la implementación del trabajo en el aula, la cual tiene tres fases:

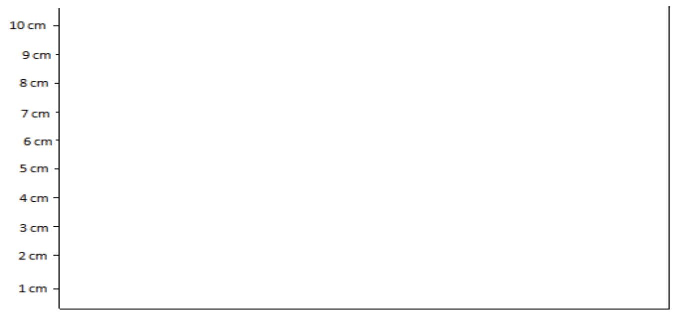
1. Los compartimientos se pueden llenar de tal manera que cada uno de estos tenga una altura diferente.
2. Las divisiones se retiran y por condiciones físicas el material se distribuye en el recipiente logrando un solo nivel (altura).
3. Al tener este nivel, se puede afirmar que dicha altura es el promedio de las alturas iniciales, así llegando al concepto de media aritmética.

El nombre laksaud surge de varias palabras, "lak" como la combinación de las letras iníciales de las personas involucradas en este proyecto y "saud" representa estudiantes de la universidad distrital.

3. EXPERIENCIA DE AULA

Este recurso didáctico se implemento en estudiantes de grado noveno. Para obtener los resultados necesarios, se diseño una secuencia didáctica basada en la teoría de Brousseau (1986,1998, 2000) que presenta cuatro momentos en el proceso de enseñanza y aprendizaje: acción, formulación, validación e institucionalización, el fundamento de esta secuencia es la siguiente guía:

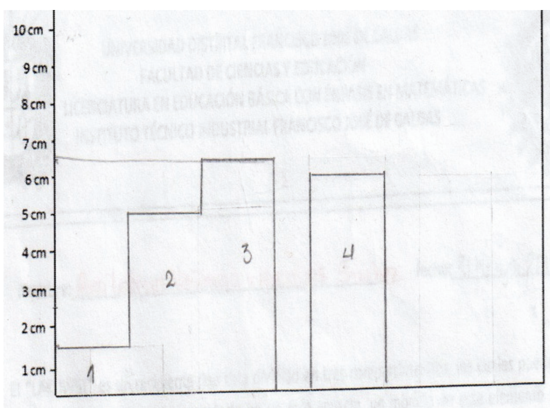
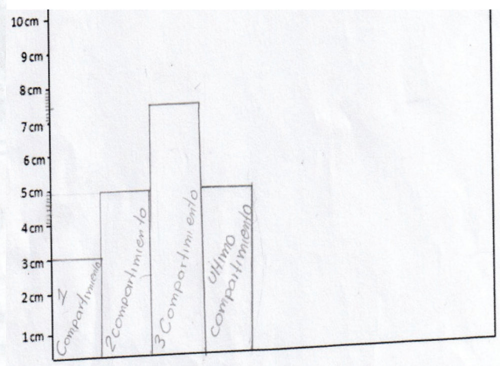
<table>
<tr><th colspan="3">Guía (instrumento de observación)</th></tr>
<tr><th>Pregunta</th><th>Esperado</th><th>Clasificación según Brousseau</th></tr>
<tr><td>1. Mida la altura en centímetros a la que se encuentra el aserrín en cada comportamiento.
<table><tr><th>Compartimiento</th><th>Medida en cm</th></tr><tr><td>1</td><td></td></tr><tr><td>2</td><td></td></tr></table></td><td>Se pretende que los estudiantes determinen la medida en centímetros de cada una de las divisiones que tiene el laksaud, a partir de</td><td>Acción</td></tr>
</table>

3 |	la cinta métrica que éste posee.	
2. Retire las divisiones del “LAKDWST”		
3. Dibuja en el diagrama las tres medidas iníciales y la ultima medida obtenida 	El estudiante deberá pasar todas las medidas obtenidas al plano (gráfico), de tal manera que éste sea de utilidad para reconocer y hacer un análisis de lo que sucede con el concepto a reconocer.	Formulación
4. ¿Qué sucede al retirar las divisiones?		
5. ¿Qué relación hay entre las tres medidas y la última?	Se espera que el estudiante a partir de la representación grafica, observe, analice y proponga una relación de las medidas iníciales con la última, de esta manera determinando que la última medida obtenida es el promedio de las tres medidas iníciales.	
6. ¿Cómo se podría calcular la ultima medida si el recipiente tiene cuatro compartimientos?	Se pretende que el estudiante tome como referencia el proceso realizado, de tal manera que pueda determinar un modelo a seguir a partir del proceso realizado.	Validación
7. ¿Cómo se podría calcular la última medida si el recipiente tiene n compartimientos?	Se pretende que los estudiantes hallen la formula general de la media aritmética ($\sum \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ a partir del proceso realizado con el laksaud.	Institucionalización

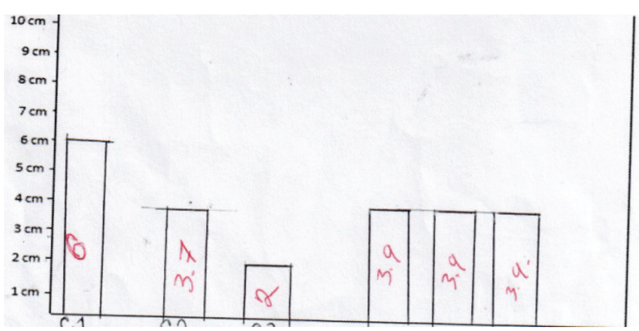
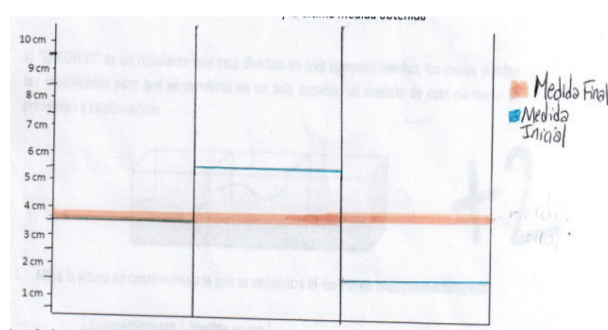
4. DESARROLLO Y PRESENTACIÓN DE LA EXPERIENCIA DE AULA CON RESULTADOS OBTENIDOS

Para iniciar el trabajo con los estudiantes de grado noveno se pide a estos organizarse en grupos de máximo tres personas, de esta manera entregándoles el material (el laksaud y la guía propuesta). Seguido, se hace la introducción a la actividad mencionando el nombre del recurso (laksaud) y su respectiva definición. Luego es necesario llenar el laksaud en este caso seria con aserrín, pidiéndoles a los estudiantes que cada compartimiento tuviese alturas diferentes.

Al tener el recipiente con medidas (alturas) diferentes, se dan las indicaciones del primer punto de la guía, la cual consistía en medir la altura del aserrín en cada división. Algunos de los estudiantes utilizaron reglas para encontrar la medida exacta, otros presionaban el aserrín hacia abajo para que la medida les diera en nuero natural. Se continua con retirar las divisiones del recipiente, lo cual causo mucha curiosidad en los estudiantes, ya que el aserrín se quedaba en la misma posición, al observar esto la docente les pide a los grupos que muevan el recipiente de tal forma que se disperse el aserrín, aunque a varios grupos no hubo la necesidad de darles esa indicación ya que ellos mismos lo dedujeron dando la respuesta a que eso debía dispersarse como el agua; los chicos al observar que el aserrín se trataba de nivelar, lo que hicieron fue hacer presión de tal forma que el aserrín quedara totalmente nivelado para así medir la altura.
Por otro lado al momento de de realizar los diagramas de las primeras mediadas y la última; se encontró que algunos de los estudiantes dibujaron cuatro medidas diferentes, la cual la última medida correspondía al promedio del aserrín, como se muestra a continuación:

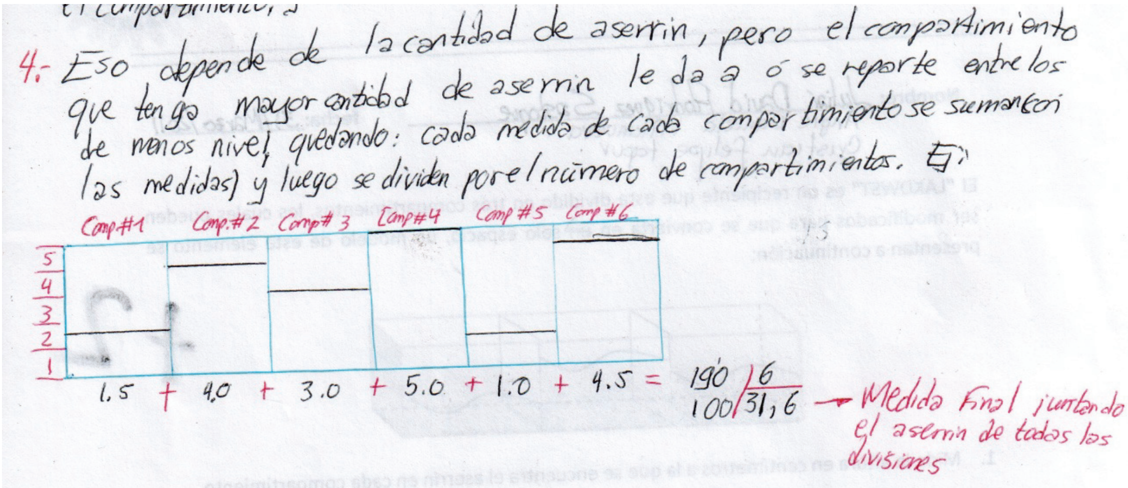



Mientras que otros grupos realizaron lo siguiente:

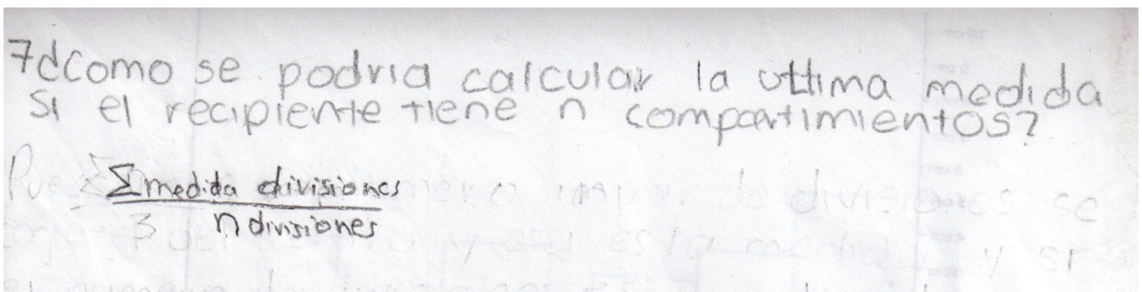



Luego se estas representaciones, se continua con la solución de las preguntas de la guía. La cual resolvían de acuerdo a lo observado con el laksaud y los diagramas de las mediadas dibujadas. Al realizar la socialización de las últimas preguntas en especial la generalización, la mayoría de los estudiantes lograban identificar la media aritmética como el promedio de las medidas, pero lo hacían de forma verbal y con ejemplos, pero muy pocos lo realizaron de forma general (fórmula): como se muestra a continuación:

Forma verbal y con ejemplo:



Forma general:



Terminada la actividad se recogen las guías trabajadas, realizando la institucionalización del concepto, de esta forma finalizando la clase.

5. CONCLUSIONES

Gracias a la experiencia realizada en el aula, podemos considerar el "laksaud" como un instrumento manipulativo tangible, que permite al estudiante:

- Identificar de manera simple el concepto de la media aritmética.
- Reconocer la media aritmética como el promedio de varias medidas.
- Determinar generalizaciones.
- Utilizar las convenciones de medidas.
- Usar lenguaje estadístico en las generalizaciones.
- Utilizar lenguaje simbólico al momento de generalizar la media aritmética.

Sin embargo el laksaud al ser un recurso didáctico de enseñanza en la estocástica, (enseñanza de probabilidad y estadística); puede presentar algunas desventajas al momento de hacer el respectivo uso de este material, estas son:

- La inexactitud de la medida.
- El material con el cual se rellena cada división.
- El trabajo en grupo.

Por tal motivo el laksaud es un instrumento innovador, útil y eficaz para la enseñanza y aprendizaje de la media aritmética en estudiantes de básica, logrando en ellos un aprendizaje significativo y propicio para la vida cotidiana.

REFERENCIAS

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática.* Facultad de Matemática, Astronomía y Física. Universidad Nacional de Cordoba.

Godino, J. (1998). Uso de material tangible y gráfico textual en el estudio de las matemáticas; superando algunas posiciones ingenuas. En J. D. Godino, *Investigaciones sobre Fundamentos Teóricos y Metodológicos de la Educación Matemática* (págs. 198-208). España: Departamento de didáctica de la matemática. Universidad de Granada.

Rocha, P. G. (2007). *Educación estocástica. Didáctica de la probabilidad y la estadística.* Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Volver al índice Comunicaciones Breves

Caracterización morfológica de frutos y semillas de plantas de cacao *(theobroma cacao l.)* de una finca experimental ubicada en el estado Mérida

Deicy Villalba R, devillarey@hotmail.com
Eddy Johanna Fajardo, eddyfajardo@aula.ve
Giampaolo Orlandoni, gorlando@aula.ve
Universidad De Los Andes – Mérida

Resumen. Caracterización morfológica de frutos y semillas de cacaos criollos provenientes de una finca experimental del estado Mérida.

1. MATERIALES Y MÉTODOS

Se utilizaron los datos recolectados en 22 clones de cacao de 10 años de edad, identificadas como USL(S/N, 0, 001, 178, PI, 145, 1086, 278, 845, 394) y STB (004, 111, 116, 253, 254, 263, 319, 391, 392, 445, 451y 811) ubicadas en una finca experimental del Estado Mérida. Se utilizó una lista de descriptores para cacao publicadas en 1981 por el Consejo Internacional de Recursos Fitogenéticos IBGRI. Se utilizaron 17 descriptores de fruto y semilla, que se podían realizar en condiciones de campo.

2. CARACTERÍSTICAS EVALUADAS

De cada clon se evaluaron 10 mazorcas fisiológicamente maduras sin síntomas de enfermedad. Se evaluaron y registraron características cuantitativas (largo, ancho, peso, profundidad y largo del surco primario, profundidad y largo del surco secundario, peso total de las semillas con pulpa, peso fresco de semillas sin pulpa y número de semillas íntegras y vanas).

De cada mazorca se tomaron 5 semillas y se les midieron cinco características cuantitativas (largo, ancho, peso fresco, peso seco, peso de la testa). El peso seco se determinó después del proceso de fermentación y secado.

CARACTERÍSTICAS MORFOLÓGICAS

La mayoría de las plantas cultivadas con importancia económica, como lo es el cacao, tienen sus patrones de identificación y caracterización. Diversos estudios se han realizado para determinar aquellas características (descriptores) cualitativas y cuantitativas que resultan más útiles para la descripción de las plantas. Un descriptor es un atributo cuya expresión es fácil de medir de la forma, estructura o comportamiento de una accesión. Sirve para discriminar entre fenotipos. Los

descriptores son altamente heredables, pueden ser detectados a simple vista y se expresan de igual forma en todos los ambientes. (Hidalgo 2003).
Para la descripción morfológica se emplean aquellos órganos que están menos influenciados por el ambiente siendo los más importantes la flor y el fruto.
Uno de los primeros investigadores en señalar algunas características de la flor y la semilla para la caracterización de clones de cacao fue Pound (1932), cuyo criterio fue luego confirmado por Engels, Bartley y Enriquez (1980).
Los descriptores cualitativos y cuantitativos utilizados para caracterizar los clones de cacao del presente estudio fueron:

Características del Fruto: De cada uno de los 22 clones evaluados se colectaron al azar 10 mazorcas fisiológicamente maduras y sin ningún síntoma de enfermedad. De cada mazorca se tomaron las siguientes medidas:

- Peso del fruto (PESO) en gramos: Peso total de la mazorca.
- Largo del fruto (LARGO) en cm: Distancia desde la base en la unión del pedúnculo hasta el ápice.
- Ancho del fruto (ANCHO) en cm: Se mide en la parte más ancha de la mazorca.
- Profundidad del Surco Primario (PROF_SURCOPRIM) en cm: Se mide el espesor o profundidad de la cáscara en el lomo, considerando la parte más gruesa.
- Profundidad del surco secundario (PROF_SURCOSEC) en cm: Se mide la parte intermedia entre dos lomos.
- Longitud del Surco Primario (SURCOPRIM) en cm: Se mide la longitud de la cáscara en el lomo, considerando la parte más gruesa.
- Longitud del surco secundario (SURCOSEC) en cm: Se mide la longitud del lomo a la derecha del lomo principal.
- Peso total de la semilla (PESO_TOTAL) en gramos: Peso total de las semillas de la mazorca (pulpa y semilla)
- Peso Fresco de la semilla (PESO_FRESCO) en gramos: Peso total de las semillas retirando pulpa y testa.
- Número de semillas por fruto (NSEMILLAS): Se consideran sólo aquellas semillas con desarrollo normal.

Características de la Semilla: De los 10 frutos tomados al azar se utilizaron cinco semillas frescas por fruto para evaluar lo siguiente:

- Largo de semilla (LARGO5SEM) en mm
- Ancho de semilla (ANCHO5SEM) en mm: Se consideró la parte más ancha de la semilla.
- Espesor de la semilla (ESPESOR5SEM) en mm.
- Peso fresco de semilla húmeda con pulpa y testa (PESOFRESCO5SEM) en gramos: Se pesaron cinco semillas por fruto en una balanza.
- Peso de la semilla seca (PESOSECO5SEM) en gramos: Se depositaron las mismas cinco semillas en cajas petri identificadas y se secaron en estufa a 65ºC por 24 horas y luego se tomó el peso.
- Peso de la testa (PESOTESTA5SEM) en gramos: Peso de la testa sobrante de las cinco semillas secas.
- Índice de almendra (IA) en gramos: Promedio del peso de la semilla seca.

Análisis estadístico. En primera instancia se realizó un análisis exploratorio de los datos, con la finalidad de ver el comportamiento de las variables. Luego se aplicaron las siguientes técnicas de análisis multivariado: Análisis Multivariado de Varianza (MANOVA), Análisis de Componentes Principales, Análisis de Conglomerados: Cluster y Biplot

3. RESULTADOS

Análisis Descriptivo. El peso promedio de los frutos fue de 482,36 g. El peso máximo se obtuvo para la muestra STB_2545 (1102,5 g) y el más bajo para USL_10868 (247,6 g). El Largo del fruto varió entre 12 (STB_8117) y 22,6 cm (STB_2545). El ancho de fruto varió entre 6,9 (STB_2536) y 10,7 cm (STB_2549). La profundidad del Surco primario varió entre 0,52 (USL_1784) y 2,86 cm (STB_2545). La profundidad del Surco secundario varió entre 0,24 (USL_0010) y 2,08 cm (STB_2545). El peso total de las mazorcas varió entre 24,5 (STB_3919) y 706 (STB_3912) con una media de 93,64 gramos. El número promedio de semillas por fruto fue de 29 semillas, con un máximo de 47 semillas (STB_3195) y un valor mínimo de 8 semillas (STB_4454). El peso fresco varió entre 12,5 (STB_4454) y 116,9 g (STB_3917) Rica. CATIE. p.19.

Analizadas las cinco semillas por mazorca se encontró que: el peso seco presentó una media de 6,53 g con un máximo de 10,9 g y un mínimo de 3,2g. El largo varió entre 18,74 cm a 30,4cm. El ancho menor de semilla (11,38 mm) lo obtuvo la muestra STB_4514 mientras que el mayor (17,56 mm) fue para la muestra USL_3941.

Al analizar las correlaciones se encontró que:

- El Peso de la mazorca presenta asociación lineal positiva con el resto de variables; está fuertemente relacionada con el largo y el ancho de la mazorca y muy poco relacionada con el ancho de semillas. Se esperaría una fuerte relación con el número de semillas y el peso de las semillas (con pulpa y sin pulpa) pero no es así. Parece ser que las mazorcas de mayor peso y tamaño tienen menos semillas que las mazorcas pequeñas.
- El largo de la mazorca también presenta asociación lineal positiva con el resto de variables; está fuertemente relacionada con el peso y el ancho de la mazorca y muy poca relacionada con la profundidad de los surcos y el largo y ancho de las semillas.
- El ancho de las semillas está relacionada de forma directa con todas las variables a excepción de la profundidad de los surcos (aunque dicha relación es muy débil, casi cercana a cero). También presenta fuerte relación con la longitud de los surcos primarios, a más ancha la mazorca, mayor la longitud de dichos surcos.
- La Profundidad del surco primario y del secundario están relacionadas directamente entre sí, pero no presentan relación con el resto de variables con quienes su correlación es casi cero. Presenta relación inversa con el ancho de las semillas y el peso fresco (total semillas sin pulpa).
- La longitud de los surcos primario y secundario están relacionadas directamente (y de forma no despreciables) con casi todas las variables, excepto con la profundidad de los surcos, el peso fresco y total de las 5 semillas y el ancho de las semillas, con quienes prácticamente no existe relación.
- El peso total de las semillas presenta muy poca relación con el resto de las variables, excepto con el peso fresco de las semillas.
- El peso fresco presenta relación positiva con el número de semillas, el largo y ancho de la mazorca y el peso total de las semillas. Presenta relación inversa con la profundidad de los surcos.
- El número de semillas está relacionado directamente con el peso fresco de las semillas e inversamente con el espesor de las semillas.
- Las características propias de las semillas como largo, ancho, espesor, peso fresco, peso seco e IA presentan fuerte relación positiva entre sí.

Análisis multivariado. Este estudio permitió describir las características morfológicas de fruto y semilla de clones de cacaoprovenientes de una finca experimental del estado Mérida. De la comparación morfológica de los clones USL y STB 16 variables o descriptores discriminan entre ellos. Sólo el descriptor Peso total (semilla con pulpa y testa) no resultó ser un buen discriminante. Este descriptor presentó casi nula relación con el resto de variables, a excepción del peso fresco (con pulpa).

Se identificó también las variables que mas discriminan entre los clones evaluados, diferenciando tres grupos particulares de descriptores: un primer grupo constituido por el peso, largo, ancho y longitud de los surcos primario y secundario de las mazorcas y largo, peso fresco, peso seco, peso de la testa e IA de las semillas, un segundo grupo representado principalmente por el número de semillas y el peso fresco de las semillas y un tercer grupo representado por la profundidad de los surcos primario y secundario; así mismo, se diferenciaron tres grupos de clones de cacao relacionados directamente con las agrupaciones de los descriptores.

REFERENCIAS

Cartay, R. (1998). *La economía del cacao en Venezuela*. Proyecto 96001539. Informe I. Agenda Cacao. 116p.

Díaz, L. G. (2002). *Estadística Multivariada: Inferencia y métodos*. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, Colombia.

Engels, J., Bartley, B. y Enriquez, G. 1979. Descriptores de cacao, sus clases y modus operandi. Costa Rica. CATIE. 191 p.

Volver al índice Comunicaciones Breves

Contextos de uso de la variable en los textos escolares de grado 8 más usados en el sector oficial

Luz Divia Rico Suarez, luzdiviarico@hotmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Resumen. Este documento es un reporte parcial de la investigación referida al uso del concepto de variable y su objetivo se centra en analizar en algunos textos escolares de grado octavo de matemáticas, usados en el sector oficial, el tratamiento didáctico del concepto de variable desde el modelo 3UV propuesto por Trigeros y Ursini en el 2003, quien refiere la variable como incógnita, como número general y como relación funcional. La metodología se orienta hacia un estudio cualitativo, de análisis bibliométrico y descriptivo, ésta se desarrollo en cuatro fases: selección de textos, formulación de categorías de análisis, recolección y análisis de información e informe final. Para efecto de analizar los textos se diseño un instrumento a manera de matriz categorial incluyendo los indicadores de cada uno de los usos de variable propuesto por Trigeros y Ursini. La principal conclusión muestra que en los textos escolares de grado octavo se identifican diferentes formas de abordar el concepto de variable. El tratamiento en relación con el modelo 3UV, evidencia una diferencia en términos de alcance, de manera particular algunos presentan los tres usos de la variable (como incógnita, número general, relación funcional), en tanto que otros profundizan en el primer y segundo uso, el tercero solamente lo esboza a partir de algunas expresiones algebraicas.

REFERENCIAS

Trigueros, M. & Ursini, S. (2003). First year undergraduates difficulties in working with the concept of variable. *CBMS, Research in Collegiate Mathematics Education*, *12*, 1-29).

Volver al índice Comunicaciones Breves

Enfermedad renal crónica
"una aplicación al análisis de datos"

Deicy Villalba R, devillarey@hotmail.com
Eddy Johanna Fajardo, eddyfajardo@aula.ve
Giampaolo Orlandoni, gorlando@aula.ve
Universidad de los Andes – Mérida

1. INTRODUCCIÓN

La enfermedad renal crónica (ERC) es un problema de salud pública. La manifestación más grave de la ERC, la insuficiencia renal crónica terminal (IRCT) subsidiaria de tratamiento sustitutivo mediante diálisis o trasplante renal, presenta una incidencia y una prevalencia crecientes desde hace dos décadas. Se estima que por cada paciente en un programa de diálisis o trasplante puede haber 100 casos de ERC menos grave en la población general. Por un lado, estos casos constituyen la base de los pacientes que llegarán más tarde a una ERC avanzada. Por otro lado, estos pacientes tienen un riesgo cardiovascular elevado y sufren una morbimortalidad por eventos cardiovasculares que, probablemente, tenga un impacto en la salud mayor que la evolución hacia la necesidad de tratamiento renal sustitutivo[1].

En Colombia hay pocos programas prevención y promoción primaria renal. Una de cada diez personas pueden tener algún grado de daño renal y no lo saben (más o menos cuatro millones y medio de personas), más de veinte mil se encuentran en tratamientos de diálisis y hay cerca de 3.500 trasplantados. En el curso de esta última década, la prevalencia nacional de pacientes en tratamiento sustitutivo de la función renal ha crecido alrededor de un 6% en la primera mitad y algo más del 3 % anual en los últimos 5 años.

Objetivo. Analizar la relación entre algunas variables antropométricas (talla, peso, índice masa corporal) y exámenes médicos (tasa filtración glomerular, creatinina, hematocritos, diabetes) con los estadios de la enfermedad crónica renal.

2. MATERIALES Y MÉTODOS

El presente estudio de los estadios de la ECR se realizó en la ciudad de Bucaramanga, departamento de Santander, Colombia. Se estudiaron ocho variables: edad, talla, peso, superficie corporal, tasa filtración glomerular, creatinina, hematocritos y diabetes. La tabla de datos fue transformada de la siguiente manera: las variables cuantitativas edad, índice de masa corporal (IMC) y tasa de filtración glomerular se categorizaron en cuatro clases cada una, la

[1] Definición y clasificación de los estadios de la enfermedad renal crónica

creatinina, hematocritos y diabetes se categorizaron en dos clases. La variable género se categorizó en dos clases y la variable estadio (RENAL) en cuatro.

Se realizó un análisis exploratorio de los datos, para conocer el comportamiento de las variables. Posteriormente se aplicó la Técnica Multivariada de Análisis de correspondencia múltiple, regresión logística y análisis discriminante, ya que la estructura de los datos que se tiene fue adaptable a dichas técnicas, en la que se busca explicar el comportamiento de las variables expresadas en la información contenida en el conjunto original de datos. Para el desarrollo de este trabajo se utilizaron el software: Microsoft Excel V-2007 para la organización de los datos. Para el análisis estadístico descriptivo y el análisis multivariado se utilizó R 2.10.1, SPSS V-17 y SAS 9.2.

3. RESULTADOS

Participaron en el estudio 136 pacientes, de los cuales 81 eran mujeres (60%) y 55 hombres (40%), la edad promedio es 59 años, la talla promedio es 161.69 cm, el peso promedio es de 73.42 kg. El promedio de la superficie corporal, TFG2, creatinina y la tasa de filtración glomerular son 1.81 kg*cm, 79.98 ml/min, 0.98 mg/d, 79.2 ml/min respectivamente.

Para realizar el Análisis de Correspondencias Múltiples (ACM) se tuvieron en cuenta las siguientes variables:

VARIABLES				
CREATININA	NORMAL	ALTA		
HEMATOCRITOS ALTOS (HTA)	SI	NO		
DIABETES MELLUS (DM)	SI	NO		
TASA FILTRACIÓN GLOMERULAR (TFG)	NORMAL	MODERADAMENTE DISMINUIDA	LIGERAMENTE DISMINUIDA	GRAVEMENTE DISMINUIDA
ÍNDICE MASA CORPORAL (IMC)	BAJO PESO	NORMAL	SOBREPESO	OBESIDAD
EDAD	JOVEN	ADULTO	ADULTO MAYOR	ANCIANO
GÉNERO	MUJER	HOMBRE		

La variable suplementaria para el análisis es el estadio de ECR (kdqi): estadio 1 (daño renal factor normal), estadio 2 (función ligeramente disminuida), estadio 3 (función moderadamente disminuida), estadio 4 (función gravemente disminuida).

Con el ACM se obtuvieron tres resultados esenciales:

(1) la inercia o variabilidad explicada

(2) las variables no observables obtenidas como combinaciones lineales de las observables (variables ficticias).

(3) la representación gráfica de las primeras dimensiones que se consideren más importantes.

El objetivo del ACM fue describir cómo están relacionados los estadios de la enfermedad renal crónica con las variables antropométricas y los exámenes médicos considerados en el estudio.

El análisis de correspondencia múltiple mostró que el género masculino menor de 40 años y con obesidad, se encuentran en el estadio 1 o 2 de la ECR cuando su tasa de filtración glomerular es mayor de 70 ml/min. Mientras que las personas que son mayores de 70 años con bajo peso, niveles de creatinina altos y la tasa de filtración glomerular por debajo de 70 ml/min se encuentran en el estadio tres de la ECR, es decir, la función del riñón está ligeramente disminuida.

Originalmente la variable RENAL (estadio de daño renal) tenía 5 opciones, que representan los diferentes estadios de la enfermedad crónica renal que presentan los pacientes:

- Estadio I >90 (daño renal con función normal)
- Estadio II 60 - 89 (función ligeramente disminuido)
- Estadio III 30 - 59 (función moderadamente disminuida)
- Estadio IV 15 - 29 (función severamente disminuida)
- Estadio V menos de 15 (necesidad de diálisis peritoneal)

En el análisis de regresión logística, la variable RENAL se codificó de tal manera que resultase dicotómica, en un grupo quedaron los pacientes que tienen daño renal pero sus riñones tienen aún función normal (estadio I) y se agruparon las cuatro últimas opciones originales (pacientes tienen daño renal y sus riñones no están funcionando bien).

El análisis de regresión logística mostró que al aumentar la edad en un año, la probabilidad de tener daño renal aumenta en un factor de 1.067; al disminuir la tasa de filtración glomerular (TFG) en un mililitro por minuto, la probabilidad de tener daño renal aumenta en un factor de 0.929 y al aumentar el índice de masa corporal (IMC) en 1 kg/m^2, la probabilidad de tener daño renal aumenta en un factor de 0.886.

El análisis discriminante mostró que el método que mejor clasifica a los pacientes que tienen daño renal es el de resustitución usando función discriminante lineal, el cual muestra en su tabla de estimaciones de la cuenta de error que existe un 3.86% de probabilidad de clasificar a los pacientes de manera no adecuada.

REFERENCIAS

Cabrera, S. (2004). Definición y clasificación de los estadios de la enfermedad renal crónica. Prevalencia. Claves para el diagnóstico precoz. Factores de riesgo de enfermedad renal crónica. *Revista Nefrología*, *24*.

Calabia, R. (2004). Medida de la función renal. Evaluación del cociente micro albuminuria/creatinina. Valor de la tira reactiva y del examen del sedimento urinario. Indicaciones para solicitar ecografía renal. *Revista Nefrología, 24.*

Díaz, L. (2002). *Estadística Multivariada: Inferencia y métodos.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Ministerio de la Protección Social (2005). *Guía para el manejo de la enfermedad renal crónica – ERC- Basada en la evidencia*. Bogotá: MPS.

Peña, D. (2002*). Análisis de Datos Multivariantes*. España: Mc Graw Hill.

Volver al índice Comunicaciones Breves

Avances en el desarrollo de un experimento de enseñanza en el escenario de una situación de análisis de conjuntos de datos

Yenny Marcela Bejarano Prieto
Universidad Pedagógica Nacional

Resumen. Esta ponencia tiene como objetivo principal la presentación de los resultados obtenidos en el desarrollo de una propuesta de tesis; titulada: "Situaciones de conjuntos de datos con medidas de tendencia central para promover el razonamiento estadístico en estudiantes de grado sexto de la Escuela Normal Superior Distrital María Montessori", la cual está enmarcada al interior de un proyecto de investigación denominado: "Experimentos de enseñanza para el desarrollo de razonamiento estadístico con estudiantes de secundaria", que fue realizado por el grupo de investigación en Educación Estadística del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional en Bogotá, durante los años 2008 y 2009. En este documento se presenta un esquema general de dicha propuesta, mostrando brevemente los aspectos que se pretenden exponer, los cuales están organizados así: descripción general del proyecto, secuencias de tareas implementadas, recolección y análisis de datos, y conclusiones.

Palabras clave: conjuntos, medidas, razonamiento estadístico

1. DESCRIPCIÓN GENERAL DEL PROYECTO

Día tras día se hace más evidente la necesidad de los procesos estadísticos (alfabetización, razonamiento y pensamiento), ya que este mundo cambiante exige el estudio, trato de información y toma de decisiones que son relevantes para la sociedad. En cierta forma el ciudadano común puede requerir en algún momento de su vida de un razonamiento estadístico que le ayude a leer, interpretar gráficos y tomar decisiones. Esto conlleva a que aumenten los esfuerzos por el desarrollo de estos procesos en la escuela, para lo cual se requiere de estudios e investigaciones que den pautas al proceso educativo; sin embargo, para nadie es oculto la poca investigación alrededor de la educación estadística, por lo que más que analizar, mejorar o resolver problemáticas de las cuales no existen bastante sustento investigativo, se pretende reconocer elementos que sirvan de base a futuras investigaciones encaminadas al mejoramiento de las prácticas en el aula, en búsqueda del desarrollo de los procesos estadísticos en los estudiantes de secundaria. Por ello se pretende en este proyecto dar respuesta a: ¿Qué elementos de razonamiento estadístico se evidencian en los estudiantes de grado sexto de la ENSD María Montessori al desarrollar situaciones de conjuntos de datos con medidas de tendencia central?

2. SECUENCIAS DE TAREAS IMPLEMENTADAS

Se implementaron dos secuencias de tareas, pertenecientes al experimento de enseñanza de situaciones de conjuntos de datos propuestos en el proyecto de la línea de investigación en el cual se enmarca esta propuesta. El primero de estos, titulado: “El gasto de Ana en celular”, ya había sido trabajado en otro contexto (otra institución), mientras que el segundo denominado: “El gasto de una compañía en celular”, nunca se había puesto en práctica. El primero tiene como objetivo de aprendizaje ampliar y consolidar las ideas en torno a las medidas de tendencia central como posibles representantes adecuados de una distribución de datos.

De esta secuencia hacen parte cinco tareas, las primeras tres apuntan a que los estudiantes observen que la media no siempre es una medida de tendencia central que representa adecuadamente la distribución de datos, que cuando hay valores extremos la mediana podría ser la medida que mejor representa la distribución por no verse afectada por aquéllos, o que eventualmente la media es apropiada cuando no se consideran los valores atípicos, dependiendo de si en la situación esto tiene sentido. Mientras en la cuarta se busca que el estudiante se aproxime a la media como una medida donde se compensan los excesos de los valores con los defectos con respecto a la media misma. Y en la tarea cinco se intenta que los estudiantes observen que un valor extremo menor también incide en el valor de la media y por lo tanto no siempre es una medida de tendencia central que representa adecuadamente una distribución de datos.

La segunda secuencia tiene como objetivo de aprendizaje que los estudiantes observen como la dispersión de los datos de una distribución con frecuencias mayores que uno, afecta los valores de las medidas de tendencia central, y por tanto su utilidad como representantes adecuadas. Esta secuencia está formada por seis tareas, cuyas intenciones son: las dos primeras pretenden que el estudiante descubra cómo construir tablas de frecuencias y las construya. Las dos siguientes apuntan a que los estudiantes se den cuenta de que cuando hay frecuencias mayores que uno para calcular la media se requiere emplear el promedio ponderado; también se espera que con base en el trabajo de los talleres anteriores pueden elegir la medida que mejor representa la distribución de datos de manera justificada, contemplando los datos extremos. Y las últimas llevan a los estudiantes a hacer procesos de interpretación primero y luego de traducción entre la representación tabular y gráfica de una distribución de datos, reconociendo los elementos de una representación en la otra.

3. RECOLECCIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS

La implementación de la secuencia de tareas propuestas se desarrolló con estudiantes de grado sexto de la Escuela Normal Superior Distrital María Montessori. La elección del nivel de escolaridad de los estudiantes atendió tanto a las sugerencias curriculares establecidas por la Institución como a los propósitos del proyecto de investigación en el que se establece un marco conceptual que explicita la necesidad de impulsar el desarrollo de procesos de alfabetización y razonamiento estadístico, entre otros.

Aunque la intención inicial del proyecto era la implementación de una sola secuencia de tareas en cuatro grupos de la institución, los resultados que se fueron obteniendo en los primeros grupos provocaron una dinámica mayor, conllevando a realizar tres fases: La primera con dos de los grupos y la secuencia “El gasto de Ana en celular” tal como se presenta en el proyecto inicial. Debido a las dificultades encontradas, se realizó unas modificaciones en esta, y se aplicó una nueva versión en una segunda fase, en los dos grupos faltantes. Finalmente, se escoge tan solo un grupo y en él se implementa la segunda secuencia, la cual tenía inicialmente el titulo “El gasto de una compañía en celular”, sin embargo al reflexionar alrededor de los resultados obtenidos en las dos fases anteriores se consideró conveniente hacer unas modificaciones al interior de la secuencia, que conllevo al cambio en el nombre, denominándolo “Negocio de venta de minutos de celular”.

Para la recolección de los datos se empleó videocámara, los escritos de los estudiantes y las observaciones de clase realizadas por la docente. Para el análisis de estos, se emplea unos indicadores que fueron desarrollados teniendo en cuenta la posición teórica sobre procesos estadísticos de (delMas, 2002) cabe aclarar que solo para la tercera fase se presenta el análisis con estos indicadores ya que para las dos primeras solo se realiza una descripción general de lo obtenido y se presenta cada dificultad encontrada.

4. CONCLUSIONES

En las primeras fases se hizo evidente diversas dificultades, las cuales se pueden relacionar con: *La actitud de los estudiantes*, vinculado principalmente a la convivencia en el aula. *El trabajo en grupo*, pues desde la versión de los estudiantes es más sencillo “repartir el trabajo” que concretar soluciones a través de las ideas de todos sus integrantes; se aclara que los grupos fueron conformados máximo de tres estudiantes. *El lenguaje* o los términos empleados en algunas preguntas fueron complejos, pues no era claro expresiones como “estimar”, “representante”, entre otros. *La lectura* de los enunciados fue un obstáculo, al parecer la mayoría de los estudiantes están acostumbrados a enunciados cortos con una solución numérica, además, se les dificulta culminar la lectura, por lo que en la mayoría de casos no comprenden lo que se les está indagando. Finalmente sus respuestas no referencian argumentos sólidos e incluso se noto apatía a la dinámica de socialización.

Al reflexionar sobre porqué estas dificultades se presentan en un gran porcentaje de estudiantes, se plantea una hipótesis, relacionada con la “cultura matemática” arraigada en nuestras instituciones. Por lo que se considera que estas dificultades deben ser vistas como oportunidades, para iniciar nuevos proyectos que conlleven a iniciar transformaciones en el aula, y que logren generar otra cultura en los estudiantes desde grados iniciales.

En la tercera fase de forma general se encontró que las tareas 1,2,5,6 propuestas en la secuencia “Negocio de venta de minutos de celular” fueron más sencillas de responder que las tareas 3 y 4, las cuales requerían de un mayor análisis. Una acción realizada en la pregunta 3 por la mayoría de estudiantes fue que no culminan la lectura de la tarea, sino indagan al docente por lo deben hacer o responder en esta.

En cuanto a las secuencias se considera que son una potente herramienta de trabajo, cuando la intención es que los estudiantes construyan el conocimiento. Y que al aumentar esfuerzos por desarrollar trabajo en el aula que indague a los estudiantes se logra que los estudiantes sean más propositivos y argumentativos, en cierta forma más analíticos, que procedimentales, sin considerar que esto no sea importante.

Referencias

Andrade, L., Fernández, F., Sarmiento, B. (2009). Experimentos de enseñanza para el desarrollo de razonamiento estadístico con estudiantes de secundaria. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

DelMas, R. (2002). Statistical Literacy, Reasoning, and Learning: A Commentary. *Journal of Statistics Education, 10* (3).

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos curriculares en matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de Educación Nacional (2000). *Estándares curriculares en matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Volver al índice Comunicaciones Breves

El juego como diagnóstico, una experiencia en Ingeniería

Eddy Johanna Fajardo
Derwis Rivas
Deicy Villalba
Universidad de los Andes, Venezuela

Resumen. *Una de las dificultades que enfrenta actualmente la Universidad de los Andes (ULA) en las carreras de ingeniería es el alto índice de repitencia y deserción en las materias de ciclo básico, especialmente en cálculo 10. Por esta razón, la facultad de Ingeniería por decisión del departamento de Cálculo, decide crear la sección especial de cálculo 10. Los estudiantes que han perdido más de tres veces la materia o han cancelado muchas veces cálculo 10, son los que hacen parte de esta sección. Durante el semestre ellos están desescolarizados y para evaluarlos presentan dos exámenes. En el segundo semestre del 2010, los docentes orientadores de la sección especial diseñan una estrategia de enseñanza basada en el rescate de los presaberes, la socialización del conocimiento y el juego como herramienta didáctica.* ***Objetivo:*** *utilizar el juego, basado en contenidos matemáticos del curso de Cálculo 10, como herramienta didáctica para diagnosticar presaberes, orientar el proceso de aprendizaje, motivar a los estudiantes al estudio en la matemática y finalmente para crear un ambiente en el que sea posible el aprendizaje cooperativo hacia la socialización del conocimiento.* ***Material y método:*** *El método usado fueron juegos didácticos, algunos fueron: dominó, cartas, quien quiere ser millonario, loterías.* ***Resultados:*** *Motivación de los estudiantes en la asistencia a clase, su participación activa en el aula, el clima de confianza para expresar dudas, el gusto y compromiso por el trabajo en equipo, el aprovechamiento de las horas de consulta e incluso la solicitud de otros estudiantes por participar en estas clases. Finalmente, es bueno resaltar que como consecuencia de la aplicación de estas estrategias, durante el semestre A-2010, la Sección Especial Cálculo 10 reportó el mayor número de estudiantes aprobados desde su creación.*

1. El problema de la repitencia.

Una de las dificultades que enfrenta actualmente la Universidad de los Andes (ULA) en las carreras de ingenierías es el alto índice de repitencia y deserción de los estudiantes en las materias del ciclo básico, en especial en el área de matemáticas, en lo que respecta al primer curso de cálculo llamado Cálculo 10. Esta situación se viene gestando desde el año 2005, para entonces el Departamento de Cálculo, adscrito a la Escuela Básica, decide crear un programa de atención especial que denominó CAPERR (Cursos de Atención Especial para Estudiantes Repitentes Recurrentes).

Los resultados de la aplicación de este programa fueron poco alentadores y en vista de ello, la Facultad de Ingeniería por decisión del Departamento de Cálculo decide crear la Sección Especial Cálculo 10. Esta Sección carece de un profesor que atienda a los estudiantes, en lugar de ello, cada estudiante puede asistir a clases con cualquier profesor que se encuentre dictando el curso de Cálculo 10 durante el semestre, en función de ir preparándose para presentar dos pruebas: la primera se presenta en la semana ocho del semestre y se evalúa el 40% del contenido con un valor del 40% de la calificación total, y la segunda se presenta en la semana dieciocho del semestre y se evalúa el 60% del contenido con un valor del 60% de la calificación total.

Las cifras hasta el semestre B-2009 como consecuencia de la aplicación de esta medida no son alentadoras, menos de un 5% de los estudiantes aprueban dichos exámenes. Ante esta situación, al inicio del semestre A-2010 invitamos a los estudiantes en esta condición a una reunión, y tras dialogar con varios de ellos encontramos que la no asistencia a un curso regular los hace sentir ignorados, no contar con un profesor para la aclaración de sus dudas e inquietudes relevantes los desmotiva a estudiar y finalmente les cansa entrar a las clases a escuchar una y otra vez las mismas explicaciones y temarios ya conocidos por ellos.

En vista de la situación, decidimos iniciar un programa de atención para estos estudiantes que consistió en 6 horas semanales de clases (para atender sus consultas e inquietudes) utilizando el juego, basado en contenidos matemáticos del curso de Cálculo 10, como herramienta didáctica para diagnosticar presaberes, orientar el proceso de aprendizaje, motivar a los estudiantes al estudio en la matemática y finalmente para crear un ambiente en el que sea posible el aprendizaje cooperativo hacia la socialización del conocimiento.

2. La estrategia de cambio

¿Por qué diseñar actividades lúdicas para la enseñanza del Cálculo? ¿Qué ventajas tiene el juego sobre las clases magistrales? ¿El trabajo en equipo ayuda al entendimiento de los temarios desarrollados? Estos y otros interrogantes guiaron nuestra propuesta, ya que siendo conscientes de que la actividad matemática está sumergida en un contexto social y cultural, la cual se ve afectada por la interacción con los demás, creemos que al potenciar la socialización, el trabajo en equipo, la discusión con el otro, la confrontación de ideas y al compartir conocimientos y razonamientos ante el grupo, se involucra al estudiante en el papel de actor principal de la clase y de esta manera los contenidos de la asignatura y las herramientas usadas toman un significado diferente.

Así mismo, al introducir el juego como herramienta didáctica estamos aprovechando una actividad cotidiana y agradable para facilitar el aprendizaje de las matemáticas partiendo de situaciones concretas, que corresponden naturalmente a estructuras matemáticas. Como afirma Ferriere "el estudiante por medio de juegos adapta su aula como si fuera un taller de trabajo donde encontrará todo lo necesario para desarrollar con sus manos su capacidad creadora"1. Es de aclarar que lo que hace a los juegos ser herramientas didácticas es el uso que se haga de los mismos, en su análisis y en el contexto de la enseñanza.

"Parece razonable pensar que las experiencias de juego se convierten en verdaderos ámbitos de aprendizaje no sólo por la actividad, sino por el contexto mismo en el que tiene lugar". Ortega (1999, p.17). Avanzar en el proceso de matematización de las situaciones es la fase posterior a haber jugado, es decir, la reflexión sobre el proceso que se ha seguido, la cual se realiza tanto en forma individual como grupal.

Ante la repitencia, surgen otros interrogantes ¿qué contenidos son necesarios revisar con más detenimiento? ¿Cómo reconocer las falencias en conceptos y procedimientos en cada estudiante? ¿Cómo aprovechar sus fortalezas?

Al iniciar toda asignatura es normal que el docente quiera averiguar los presaberes del estudiante y para ello cotidianamente realiza una prueba diagnóstica, y aunque ésta no tenga calificación el hecho de presentarse como "prueba" puede bloquear e inhibir al estudiante. Uno de los resultados más relevantes de esta investigación fue el constatar las grandes ventajas que trae consigo la aplicación de juegos con contenido matemático para diagnosticar presaberes en dicha área, especialmente cuando se trata de un grupo que ha cursado varias veces la materia y en función de ello creen que conocen su contenido.

Nuestra propuesta al iniciar la enseñanza de los números reales fue la realización de un dominó matemático, el cual debía ser jugado en grupos de cuatro personas. El dominó está formado por 28 fichas con 7 resultados diferentes: -2, 2, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}+4$, $\frac{2}{3}$, -15 y $\frac{3}{10}$ cuyos valores eran desconocidos para los participantes en el juego. Cada resultado aparece en 7 fichas escritas de manera diferente, mediante polinomios aritméticos, operaciones con racionales e irracionales, radicación, potenciación y logaritmación.

Con él se hizo la prueba diagnóstica, sin que el estudiante se sintiese evaluado y se potenció la colaboración entre ellos. Al llevar a cabo la socialización de la actividad se logró que el mismo estudiante diera cuenta de sus dificultades, necesidades de profundización y fortalezas, y participara activamente en la formalización de los conceptos y propiedades.

En el transcurso de las clases se dieñaron otras actividades lúdicas a través de la matemática recreativa (sin dejar de un lado el rigor y formalismo matemático) para el aprendizaje de conceptos y procedimientos básicos en esta asignatura. Entre ellas están:

- Un póker donde los iconos eran expresiones matemáticas de las cónicas, sus gráficas y características que las identifican
- "Quien quiere ser millonario" para el trabajo con funciones
- Regletas de factorización para las operaciones entre polinomios algebraicos y la factorización de los mismos.
- Lotería para la revisión del concepto y procedimiento de límites y continuidad.

Algunos resultados que se han encontrado tras el desarrollo de esta propuesta son: la motivación de los estudiantes en la asistencia a clase, su participación activa en el aula, el clima de confianza para expresar dudas, razonamientos e ideas, el gusto y compromiso por el trabajo en equipo, la solicitud de tareas, el aprovechamiento de las horas de consulta e incluso la solicitud de otros estudiantes por participar en estas clases.

Finalmente, es bueno resaltar que como consecuencia de la aplicación de estas estrategias, durante el semestre A-2010, la Sección Especial Cálculo 10 reportó el mayor número de estudiantes aprobados desde su creación, datos que se pueden comprobar en la Oficina de Registros Estudiantiles de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Los Andes (OREFI-ULA), y es la primera vez que este tipo de propuestas se realiza en la facultad de Ingeniería de la Universidad de Los Andes Mérida-Venezuela.

REFERENCIAS

Estevez, E. (2002). *Enseñar a Aprender "estrategias cognitivas"*. México: Paidós.

Ortega R. (1999). *Jugar y Aprender.* Sevilla: Diada

Ferriere, A. (1982) la Escuela Activa. Herder.

De Guzmán, M. (1984). Juegos Matemáticos en la Enseñanza. *Actas de las IV Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*. Santa Cruz de Tenerife.

Bruner, J. S. (1984). Juego, pensamiento y lenguaje. En: Bruner, J. (Comp.). *Acción, pensamiento y lenguaje.* Madrid: Alianza.

Volver al índice Comunicaciones Breves

Desarrollo del pensamiento variacional con objetos de aprendizaje

Boris Mauricio Pulido Piraquive
Fundación Universidad Autónoma de Colombia

Resumen. El presente documento describe algunos aspectos de la investigación "Influencia del trabajo con objetos virtuales de aprendizaje sobre algunas formas de representación de situaciones de variación y cambio contempladas en el pensamiento variacional", preocupación del Grupo pedagogía y didáctica de la enseñanza aprendizaje de las Ciencias Básicas y en el marco Maestría en Informática Educativa. El objetivo fundamental de la investigación consistió en evaluar y comparar el nivel de desarrollo en algunas formas de representación del pensamiento variacional que alcanzan los alumnos, cuando trabajan con Objetos de Aprendizaje OA. La metodología se centró en talleres interactivos a partir de OA, implementada a través de un aula virtual. La principal conclusión es que el nivel de interpretación y de análisis de situaciones de variación y cambio, bajo modelos de representación tabular y gráfica, que alcanzan los estudiantes, es mejor cuando se incluyen metodologías de estudio con OA que cuando no lo incluye.

Palabras clave: Variacional, Virtual

1. INTRODUCCIÓN

Las Instituciones de Educación Superior IES han venido adelantando diferentes actividades a nivel de programas, investigaciones, directrices institucionales, entre otras, con el fin de fomentar e incorporar en las prácticas de enseñanza de la matemática la utilización de las diversas opciones que se vislumbran con el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación TIC. El grupo de *pedagogía y didáctica de la enseñanza aprendizaje de las ciencias básicas* entre sus líneas de investigación tiene la incorporación de las TIC en la educación y es ahí donde éste trabajo emerge articulado a la maestría "informática educativa", dando especial interés a los OA como elementos medidores en proceso de enseñanza aprendizaje en general y en particular de la matemática.

El objetivo general de la investigación, que aquí se reporta, es evaluar el nivel de desarrollo en las diferentes formas de representación del pensamiento variacional (tabular, gráfico y algebraico) que alcanzan los estudiantes, cuando trabajan con OA (representados mediante talleres virtuales interactivos). La pregunta central de investigación es ¿La implementación de OA, representados en talleres virtuales, contribuye en la interpretación y análisis que los estudiantes realizan dentro de las distintas formas de representación del pensamiento variacional?

El pensamiento variacional se considera como el tipo de pensamiento matemático que tiene que ver con la percepción, identificación, descripción, análisis y modelación de situaciones de variación y cambio (Acosta, Castiblanco y Urquina, 2004), lo que implica el estudio de las formas de representación de dichas situaciones de cambio, ya sean de tipo cualitativo o cuantitativo tales como las geométricas, tabulares, algebraicas o gráficas.

El cambio y la variación se presentan cuando una circunstancia dada se transforma con el tiempo bien en forma explícita o implícita. Dentro del supuesto conceptual de las funciones, el pensamiento variacional se entiende como la capacidad para darle sentido a las funciones numéricas y manejarlas en forma flexible y creativa, para entender, explicar y modelar situaciones de cambio, con el propósito de analizarlas, transformarlas y formular predicciones. Algunos de los conceptos propios del pensamiento variacional son el de función, razón de cambio, dependencia e independencia entre variables.

Cuando el estudiante logra establecer relaciones entre las diferentes tipos de representación de situaciones de variación y cambio, y además transita entre ellas, aumenta en la calidad de la comprensión dichas situaciones, es ahí donde se proponen los OA, como un elemento mediador que posibilita lo anterior y que además está incorporando las TIC.

La idea de los OA ha venido emergiendo como alternativa a incorporarse en diversos esquemas de trabajo en la educación, por ejemplo en Iberoamérica hay, al menos 2 comunidades consolidadas, conferencia latinoamericana de objetos de aprendizaje LACLO desde el 2007 y el Simposio Pluridisciplinar sobre Diseño y Evaluación de Contenidos Educativos Reutilizable desde el 2005 quienes se han venido reuniendo año tras año intentando hacer visible los alcances, inconvenientes y demás de lo relacionado y referido a los OA. Gonzalo Tomey (2009), Fernández Fidalgo y otros (2008), Delgado Herrera y otros (2008) Marrero Cáceres y otros (2008), Suárez y otros (2008) y algunos otros autores han propuesto el diseño de objetos de aprendizaje para y en diferentes contextos apoyados en metodologías propias de ingeniería de software con consideraciones propias del ámbito educativo referentes que en este trabajo de investigación fueron objeto de reflexión permanente y se nota diferentes aproximaciones al concepto de OA.

Se espera que un OA tenga características educativas, de autocontenido, interoperable, accesible, durable, reutilizable, actualizable, amigable, entre otras. Al diseñar un OA, resulta pertinente considerar objetivo de aprendizaje, contenido informativo, actividades de aprendizaje, de evaluación y metadatos (Prendes, Martínez, & Gutiérrez, 2008).

La idea de aprendizaje colaborativo se toma de la definición de Johnson, D y Johnson, R. (1987) en la que se considera como un conjunto de métodos de instrucción para la aplicación en grupos pequeños, de entrenamientos y desarrollo de habilidades mixtas (aprendizaje y desarrollo personal y social), donde cada miembro del grupo es responsable de su aprendizaje como del de los demás miembros del grupo. En este tipo de aprendizaje el rol del profesor es el de permitir a los estudiantes elegir y variar sobre lo fundamental de cada tema y sobre los objetivos y metas a lograr para de esta forma hacer participes a los estudiantes de su propio aprendizaje. Las actividades se deben caracterizar por permitir la discusión, la exploración de conceptos, a partir de situaciones problema, dirigidas fundamentalmente a propiciar interacción social en pro de mejores aprendizajes personales y colectivos.

2. METODOLOGÍA

La investigación está enmarcada dentro del paradigma cuantitativo de investigación, donde la variable independiente serán los Objetos de aprendizaje (presencia-ausencia), representados en talleres virtuales interactivos. Las variables dependientes serán tres formas de representación cuantitativa de variación y cambio, consideradas en el desarrollo del pensamiento variacional, a saber: representación tabular, gráfica y algebraica. Además es cuasiexperimental y de tipo correlacional, dado que se realizó una comparación de un grupo experimental con un grupo control. Para el grupo experimental se implementó un aula virtual de apoyo a la presencialidad, en la plataforma educativa Moodle, donde se implementaron foros, chats, correo electrónico, presentaciones teóricas, videos, y objetos de aprendizaje gráficos e interactivos (talleres), creados utilizando los programas PowerPoint, Winplot, Cam Studio y Descartes. La experiencia se desarrolló a través de actividades (talleres) interactivas que los estudiantes realizaron de manera colaborativa utilizando herramientas de comunicación que se activaron en dicho espacio. El grupo control trabajó los temas del curso de manera presencial tradicional, prescindiendo de las herramientas tecnológicas de interacción.

La recolección de datos se realizó a través del aula virtual (figura 1), de guías de trabajo que los estudiantes descargaron del aula, de un instrumento de evaluación (post-prueba) del desarrollo del pensamiento variacional, con lo que se realizó un tratamiento estadístico para establecer niveles de significancia.

3. RESULTADOS

En la tabla 1 se sintetizan los resultados alcanzados por los estudiantes en la post-prueba, medidos en una escala entre 0 y 5 entendiendo 0 como el desempeño más bajo y 5 para el desempeño más alto, la misma evalúa las diferentes formas de representación del pensamiento variacional.

Tabla 1. Resultados prueba post-test.

CATEGORIA	GRUPO	N	MEDIA	SIMETRIA	DESVIACIÓN ESTANDAR
TABULAR	Experimental	40	2,517	-0,219	1,278
	Control	40	1,628	0,079	1,038
GRAFICA	Experimental	40	2,955	-0,075	0,803
	Control	40	2,122	-0,098	0,967
ALGEBRAICA	Experimental	40	2,425	0,411	1,059
	Control	40	1,950	-0,097	0,932

Una interpretación de los resultados y su comparación se muestran por categorías en la tabla 2.

Tabla 2. Interpretación y comparación categoría 1 Representación tabular

CATEGORÍA	GRUPO	NIVEL DE INTERPRETACIÓN Y ANÁLISIS DE SITUACIONES DE CAMBIO ALCANZADOS	COMPARACIÓN (PRUEBA T)
TABULAR	**EXPERIMENTAL**	**Insuficientes**	**Se elevan de manera significativas los niveles de interpretación y análisis de situaciones de variación y cambio.** **t = 3.419 P=0.0010**
	CONTROL	**Deficientes**	
GRÁFICA	**EXPERIMENTAL**	**Aceptables**	**Se elevan de manera significativas los niveles de interpretación y análisis de situaciones de variación y cambio.** **t = 4.189 P = 0.0001**
	CONTROL	**Insuficientes**	
ALGEBRAICA	**EXPERIMENTAL**	**Insuficientes**	**Se elevan de manera significativas los niveles de interpretación y análisis de situaciones de variación y cambio.** **t = 2.129 P = 0.0364**
	CONTROL	**Insuficientes**	

Observe que en cada categoría, los niveles alcanzados por el grupo experimental fueron significativamente superiores a los alcanzados por el grupo control.

4. CONCLUSIÓN

El nivel de interpretación y de análisis de situaciones de variación y cambio, bajo modelos de representación tabular y gráfica, que alcanzan los estudiantes, es mejor cuando se incluyen metodologías de estudio con objetos virtuales de aprendizaje que cuando no lo incluyen, e incluso esto también es válido si se adopta el modo de representación algebraico. No obstante los niveles alcanzados no respondieron a las expectativas que se generaron durante la experiencia. Esto pone de manifiesto que un apoyo virtual con objetos interactivos de aprendizaje, ayuda, en forma limitada en la comprensión de conceptos matemáticos.

REFERENCIAS

Acosta, E., Castiblanco, A. & Urquina, H.. (2004). *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales.* [en línea]. Ministerio de Educación Nacional. Bogotá Colombia. Recuperado el 16 de abril 2010, de http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-113759_archivo.pdf

Delgado, M. & Delgado, F. (2008). *Experiencia en la Construcción de un Objeto de Aprendizaje para Apoyar el Proceso de Enseñanza y Aprendizaje del Modelado de Sistemas*. [en línea]. V Simposio Pluridisciplinar sobre Diseño y Evaluación de Contenidos Educativos Reutilizables 20 y 21 de octubre de 2008. Recuperado el 1 de abril 2010, de http://www.upsa.es/spdece08/.

Fernández, F. (2008*). Representación Tridimensional de Objetos de Aprendizaje a través de Entornos Virtuales Multiusuario*. [en línea]. V Simposio Pluridisciplinar sobre Diseño y Evaluación de Contenidos Educativos Reutilizables 20 y 21 de octubre de 2008 Recuperado el 6 de marzo de 2010, de http://www.upsa.es/spdece08

Gonzalo, M.; Sarasa, A.; Alvárez, A. (2008). *Elaboración de objetos digitales educativos atendiendo a norma*. [en línea]. V Simposio Pluridisciplinar sobre Diseño y Evaluación de Contenidos Educativos Reutilizables 20 y 21 de octubre de 2008. Recuperado el 6 de marzo de 2010, de http://www.upsa.es/spdece08/

Johnson & Johnson (1998). *Cooperative learning increasing*. [en línea]. Washington D.C., College Faculty, ERIC.Digest. Recuperado el 10 de mayo 2010, de http://www.ntlf.com/html/lib/bib/92-2dig.htm

Marrero, S.; Delgado, G.; Rubio, E. (2008). *Diseño de Objetos de Aprendizaje con Moodle. Experiencia realizada utilizando los Talleres y Tareas*. [en línea]. V Simposio Pluridisciplinar sobre Diseño y Evaluación de Contenidos Educativos Reutilizables 20 y 21 de octubre de 2008. Recuperada el 6 de marzo de 2010 de http://www.upsa.es/spdece08.

Prendes, M.., Martínez, F. & Gutiérrez, I.. (2008). *Producción de material didáctico: Los objetos de aprendizaje*. [en línea]. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia. RIED. Vol.11:1. ISSN: 1138-2783. Universidad de Murcia. España. Recuperado el 10 de Mayo 2010, de http://www.utpl.edu.ec/ried/images/pdfs/volumen11/Martinez-Prendes.pdf .

Suárez O., Hurtado A., Molina D. & Reyes, T. (2008). *Diseño, desarrollo y evaluación de un objeto de aprendizaje para el estudio de sistemas clásicos de masa variable*. LACLO 2008. Aguascalientes México.

Volver al índice Comunicaciones Breves

El continuo intuicionista de Brouwer: una construcción alternativa al continuo de Cantor

Angela Patricia Valencia Salas
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Angela Patricia Franco Urián
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Resumen. *En este ejercicio de investigación se realiza una comparación entre dos modelos del continuo, uno desde las matemáticas clásicas realizada por Cantor, cuya actualización son los reales de Cantor, y el otro desde el constructivismo matemático, realizada por Brouwer, desde lo que él denomina los reales construibles. Lo anterior con el objetivo de identificar propiedades del continuo que no son capturadas con la biyección de los reales con la recta numérica. Esta comparación se realizó en el marco de una visión sintética del continuo, a partir de una identificación de las características fundamentales del continuo descrito por Peirce (genericidad, reflexividad y modalidad) en los dos modelos del continuo, que arrojan elementos que permiten reconocer algunos aspectos sintéticos de este. Lo anterior nos sugiere que el entender el continuo desde diversas perspectivas a la visión analítica del continuo puede enriquecer la percepción usual de este.*

1. INTRODUCCIÓN

Durante el desarrollo de las matemáticas, el concepto del continuo ha tomado diversas facetas no sólo para comunidades específicas, sino en la forma de ser abordado desde distintos contextos, entre ellos la matemática y la filosofía. Muchas han sido las concepciones que muestran al continuo como una propiedad atribuible al tiempo, al espacio y a los objetos que pertenecen a estos, como un dominio numérico o como un concepto libre, entre otros. Oostra (2004) menciona que durante el programa de aritmetización del análisis cambia el curso de la idea del continuo y en la matemática se identifica el continuo con el sistema de los números reales.

Paralelamente a los trabajos desarrollados por Cantor, ciertas comunidades de matemáticos desarrollaron programas alternativos al propuesto por la matemática clásica, y con ellas nuevas concepciones del continuo matemático y que como afirma Zalamea (2001) podrían considerarse sintéticas. Estas en alguna medida se detienen y dan paso a una concepción analítica del continuo. Esta concepción analítica describe un aspecto fundamental del continuo, la idea de saturación, pero deja de lado lo que Charles S. Peirce consideró características fundamentales del continuo: genericidad, reflexividad y modalidad, que se constituyen en aspectos sintéticos característicos del continuo Peirceano y en general de lo que sería el continuo en su totalidad.

A partir de ello retomamos una construcción alternativa del continuo de Cantor, brindada por Luitzen E. Jan Brouwer (1881-1966) con el fin de identificar qué elementos de su elaboración del concepto del continuo, permite identificar aspectos sintéticos de este, reflejados en la identificación de las características fundamentales del continuo Peirceano, en esta construcción.

2. METODOLOGÍA

La investigación fue de carácter descriptivo dado que su propósito era principalmente describir rasgos del continuo intuicionista o Brouweriano, para luego identificar algunos de los elementos que permitirían reconocer aspectos sintéticos del continuo Peirceano en este modelo. Para la realización de ello se establecieron cinco fases:

Fase 1. Búsqueda de la bibliografía que dé cuenta de lo que es el continuo Brouweriano: En esta fase se realizó una búsqueda de documentos como artículos, trabajos de investigación, libros, entre otros, que nos proporcionaran información teórica sobre corrientes de pensamiento en matemáticas (formalismo-logicismo), sobre lógica clásica e intuicionista y finalmente sobre el continuo de Cantor y de Brouwer.

Fase 2. Descripción de las temáticas a trabajar en el desarrollo de la investigación: En esta fase se hizo una descripción lo más detallada posible de lo que es el continuo de Cantor y de lo que es el continuo intuicionista, identificando rasgos característicos de cada uno de estos modelos, mostrando qué del concepto del continuo modela cada uno.

Fase 3. Determinar los posibles elementos que permitieran describir algunos aspectos sintéticos del continuo Peirceano en el continuo intuicionista: En esta fase se establecieron los posibles lugares desde donde se podrían identificar algunos aspectos sintéticos. Estos lugares permitieron dar cuenta de cómo la genericidad y reflexividad juegan un papel importante en la concepción del continuo en el modelo de continuo intuicionista.

Fase 4: Realización de la descripción y comparación con el continuo de Cantor de los elementos que permiten identificar aspectos sintéticos del continuo: En esta fase se describieron los elementos encontrados: concepción del concepto del continuo, caracterización local del concepto del continuo, discusión presente en torno al principio del tercio excluso, cardinalidad del continuo en su respectivo contexto de formalización, que permitirían identificar aspectos sintéticos del concepto de continuo.

Fase 5. Conclusiones de la comparación de los dos modelos: En este lugar, después de realizada la comparación, se hizo un análisis de los resultados obtenidos de esta, con fines de describir esos aspectos sintéticos del continuo intuicionista, generando con ello una reflexión posterior sobre el carácter general del continuo.

3. RESULTADOS

Entre los elementos que permitirían identificar aspectos sintéticos del continuo Peirceano en el continuo de Brouwer se identificaron los siguientes: *concepción del concepto de continuo, caracterización local del concepto de continuo, discusión presente en torno al principio del tercio excluso, cardinalidad del continuo en su respectivo contexto de formalización*. En esta comunicación sólo se hablará de los dos primeros, dada la gran importancia que revisten en el proceso de capturar la esencia del continuo intuicionista en un modelo determinado.

3.1 CONCEPCIÓN DEL CONCEPTO DE CONTINUO

En la obra de Brouwer se observa el uso de la noción del tiempo como base primordial de su elaboración del continuo. El tiempo es el único elemento "a priori" del continuo. Este se basa en lo que Brouwer denomina "intuición primordial o primigenia", que consiste en la capacidad de conciencia de la relación entre antes-después, pasado-presente, como unidad de lo continuo y lo discreto, la posibilidad de pensar a la vez en singularidades unidas por un "entre" que nunca se agota por inserción de nuevas singularidades, por tanto es imposible tomar alguno de ellos como autosuficiente y construir el otro a partir de ahí. Zalamea (2001) menciona que uno de los rasgos que caracteriza la idea de un continuo sintético es la *genericidad*, que se refiere a lo no particularizante, a la iniciación de un gran espacio de posibilidades no actualizadas ni determinadas y esto se observa en Brouwer tomando como base su *intuición primigenia.*

3.2 CARACTERIZACIÓN LOCAL DEL CONCEPTO DE CONTINUO

En su caracterización local del concepto del continuo, Brouwer pretende capturar su idea de esta "intuición primigenia", partiendo de una noción primordial sobre los números naturales. La noción de número natural posee una serie de propiedades que pueden ser inspeccionadas al momento de examinarlas en cada uno de los elementos producidos por la inspección. La aritmética que Brouwer utiliza para los enteros y racionales no difiere de la clásica, pero al entrar en la etapa siguiente, los números reales, las cosas cambian radicalmente. En el continuo Brouweriano los números reales están definidos por sucesiones de libre elección o "*free-choice sequences".* Estas son producto de una libre elección y son construidas paso a paso por actos de elección. Otras son determinadas por una ley que representan números reales individuales que marcan el continuo. En esta elaboración tanto la definición de sucesión de Cauchy y la de sucesión que se prolonga al infinito (*spi*) son de suma importancia, ya que tratan de visualizar el crecimiento y el aspecto dinámico del continuo matemático, basado en la intuición del tiempo.

Heyting (1976) menciona que el mayor interés que ofrece el concepto de *spi* radica en la forma de generalidad que ella posee:

> *"Toda sucesión de Cauchy de números racionales representa el continuo de los generadores de numero real mucho mejor que una sucesión determinada por una ley no especificada, ya que corresponde al concepto intuitivo de continuo como una posibilidad de determinación gradual de puntos."* (p. 43).

Este aspecto dinámico, la forma de generalidad de la noción intuicionista de continuo, a su vez refleja lo libre de este concepto, muestra el carácter general de este ya que no hay modelo determinado que lo refleje. También refleja reflexividad ya que intenta reflejar la síntesis global del continuo a partir de la creación de las sucesiones de libre elección. Lo anterior muestra que el continuo intuicionista es tal que cada uno de sus partes posee a su vez otra parte similar al todo. El continuo es inextensible ya que este no está constituido por puntos sino por vecindades dado que se puede construir de cierta manera un conjunto de racionales cerca de algún real, lo que nos muestra que es posible tener la vecindad de un punto pero no la actualización de esta, es decir un punto.

4. CONCLUSIONES

- La lógica clásica en la que navega el concepto del continuo Cantoriano, es una lógica bivalente, que según Brouwer no es útil para concebir el continuo, ya que ese tipo de lógica no permite describir el transitar, entre lo actual y lo general de este concepto.
- El continuo descrito por Brouwer es totalmente sintético, ya que lo concibe como un todo general imposible de concebir como una colección de puntos, creado mediante la abstracción matemática y que existe únicamente en la mente del hombre.
- Se lograron identificar lugares específicos en cada una de las construcciones en donde se visualizaban diferencias muy marcadas en relación al manejo del concepto de continuo. Estos

elementos lograron vislumbrar algunos aspectos sintéticos del continuo por su descripción del carácter general y supermultitudinario de este concepto.

- El presente trabajo también logró generar reflexiones de tipo epistemológico y ontológico sobre los objetos con los que se trabajan en matemáticas. Eso al identificar la gran influencia que tiene la forma como uno concibe los conceptos matemáticos en la formulación, razonamiento y determinación de estos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Boyer, C. (1994). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza editorial.

Casaban, E. (2008). Sobre la naturalización de la lógica. *Revista de Filosofía*, *28*(1), 59-75. Universidad de Valencia.

Collette, J. (1985). *Historia de las matemáticas*. Madrid: Siglo XXI.

Gödel, K. (1981). *¿Qué es el problema del continuo de Cantor?* En J. Mosterín (Ed.): *Kurt Gödel, obras completas*. Madrid: Alianza Editorial.

Heyting, A. (1976). *Introducción al intuicionismo*. Madrid Tecnos.

Martín, A. (1999). Pierce y los modelos matemáticos del continuo. Documento en línea: www.unav.es/gep/Peirce**ModelosMatematicos**.pdf

Oostra, A. (2004). C. S. Pierce y el análisis. Una primera lectura del continuo peirceano. *Boletín de Matemáticas*, 11 (1), 19-30. Universidad Nacional de Colombia. Documento en línea: www.unav.es/gep/Articulos/PeirceYElAnalisis.pdf

Suppes, P. (1968). *Teoría axiomática de conjuntos*. Cali: Norma.

Zalamea, F. (2001). *El continuo peirceano. Aspectos globales y locales de genericidad, reflexividad y modalidad: una visión del continuo y la arquitectónica pragmática peirceana desde la lógica matemática del siglo XX*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Zalamea, F. (2001). Tiempo, continuidad y ámbito de lo posible: una mirada unitaria desde el sistema pragmático peirceano y desde la lógica matemática contemporánea. *Palimpsestus. Revista Facultad de Ciencias Humanas*. Universidad Nacional.

Zalamea, F. (2009). *Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia. Documento en línea: http://es.scribd.com/doc/16392056/Zalamea-Fil-Sint-Mat-Cont

Volver al índice Comunicaciones Breves

Tomografía interior: una aplicación de las Wavelets

Harold Vacca, hvaca@gmail.com
Universidad Distrital

Wilmar Díaz, wadiazo@gmail.com
Universidad Distrital

Resumen. En el año de 1917, el matemático Alemán J. Radón, desarrolló la teoría de la transformada que lleva su nombre, sin embargo no fue sino hasta 1979 que Cormack, ganando el premio Nóbel por su trabajo de la tomografía axial computarizada, encuentra la realización tecnológica que aterriza el problema de la inversión de la transformada de Radón. Ya en el siglo XX , en las décadas de los 80 y 90, surgen las Wavelets (teoría desarrollada por Haar hacia 1910), herramientas que ingenieros como C. Berenstein, S. Mallat, I. Daubechies, entre otros, profundizan y convierten en modernas herramientas para el procesamiento de imágenes, pero más allá, el tratamiento de problemas de inversión.

El trabajo tiene como motivación inicial, presentar una técnica moderna en el procesamiento de señales como es la teoría de las transformadas, y en particular de las wavelets. Es bien conocido que esta teoría es una alternativa que permite representar una señal en un espacio de tiempo contra frecuencia, y facilita el análisis de las señales no estacionarias. El procesamiento de imágenes vía las transformadas wavelets, requiere de menos información para representar las imágenes con buena calidad en comparación con otras transformadas y mejora la relación señal ruido. Esto se debe a que descompone los datos en coeficientes de altas y bajas frecuencias, por lo que es mas sencillo analizarlos. Además, la redundancia disminuye. Esta sencillez, cobra vigencia en el análisis y síntesis del problema tomografía y en particular la localización cuando se realiza la inversión a través de la transformada de Radón.

Así como una señal unidimensional puede ser representada en términos de funciones base, una imagen puede ser expandida en términos de un conjunto discreto de arreglos de base llamados imágenes base. La transformación se puede entender como una descomposición de la imagen en un dominio bidimensional, empleando una base de imágenes, donde cada componente en el dominio de la transformada corresponde a la cantidad de la imagen base dentro de la imagen original.

En el contexto de procesamiento de imágenes, la representación de una imagen en términos de una base dada, es la transformación de la forma: *u(m,n)* de *NxN*, es la transformación de la forma:

$$v(k,l) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u(m,n) a_{k,l}(m,n)$$

$0 \leq k; l \leq N-1$. Donde $\{a_{k,l}(m,n)\}$ es el kernel de la transformación, que multiplica las componentes de la imagen u de la base (m,n) para proporcionar las componentes de la imagen v de la base (k, l) $V=\{v(k; l)\}$.

En el caso de transformadas integrales aplicadas a imágenes, la transformación se representa como:

$$V(k,l) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(m,n) A_{k,l}(m,n) dm dn$$

Donde $A_{kl}(m; n)$ representa el kernel de la transformación.

Problema de la Tomografía:

Mallat propone el problema de recobrar $f(x_1, x_2)$ a partir de las proyecciones $g_\theta(t)$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$, donde dichas proyecciones se expresan por integrales de $f(x_1, x_2)$ a lo largo de la recta: $x_2 cos\theta - x_1 sen\theta = t$, formando un ángulo θ con el eje Y, y a una distancia t desde el origen:

$$g_\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(-tsen\theta + \rho cos\theta,\ tcos\theta + \rho sen\theta) d\rho$$

Es decir, propone la idea central de la tomografía, donde las transformadas de Fourier de las proyecciones y de la función a recobrar cumplen

$$\hat{g}_\theta(t) = \hat{f}(-wsen\theta, wcos\theta)$$

Volver al índice Comunicaciones Breves

XXIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística

Sede:
Universidad Distrital
Francisco José de Caldas

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
Educadora de educadores

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

XXIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística

Volver al inicio

Edición digital realizada por:
Grupo Editorial Gaia

gaia grupo editorial
Publicidad, diseño y artes gráficas digitales
Fundada en 1.991

gaiaeditorial@gmail.com