UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN
Enrique Guzmán y Valle
"Alma Mater del Magisterio Nacional"
ESCUELA DE POST GRADO

TESIS

"La Comprensión de los Significados del Número Racional Positivo y su Relación con sus Operaciones Básicas y Propiedades Elementales"

PRESENTADO POR:

WENCESLAO QUISPE YAPO

ASESOR

Dr. MÁXIMO JUAN TUTUY ASPAUZA

Para optar el Grado Académico de

Doctor en Ciencias de la Educación

LIMA - PERÚ

2011

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN

Enrique Guzmán y Valle

ESCUELA DE POST GRADO

TESIS DOCTORAL

"La Comprensión de los Significados del Número Racional Positivo y su Relación con sus Operaciones Básicas y Propiedades Elementales"

PRESENTADO POR:

WENCESLAO QUISPE YAPO

ASESOR

Dr. MÁXIMO JUAN TUTUY ASPAUZA

Para optar el Grado Académico de

Doctor en Ciencias de la Educación

LIMA - PERÚ

2011

A mis seres queridos.

A Alejandrina por su constante apoyo y comprensión.

A Arturo y Jaqueline por ser la razón de mis afanes.

A los maestros, que
ocupan el más alto cargo
en una democracia.

RESUMEN

El objetivo de esta investigación es determinar el tipo de relación que existe entre la comprensión de los significados del número racional positivo con la resolución de operaciones básicas con fracciones y el conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales, de los estudiantes de educación secundaria. Además, el estudio tiene por propósitos caracterizar e identificar los tipos de interferencias en la comprensión de los significados del número racional.

El marco teórico que fundamenta la investigación está compuesto por los antecedentes sobre la comprensión de los significados, la resolución de operaciones aritméticas y propiedades elementales del conjunto de los números racionales. Así mismo, se hace una investigación de la teoría relacionada a la comprensión, cognición y aprendizaje; además, de un estudio de la evolución histórica y fenomenología del número racional, evaluando las diferentes interpretaciones o significados de las fracciones.

El estudio es de nivel descriptivo correlacional, por consiguiente, el diseño de investigación es transeccional descriptivo correlacional. Se estudió una muestra estratificada de 380 estudiantes, distribuidos en los cinco grados escolares. Para la recolección de datos se aplicó tres pruebas, una sobre comprensión, otra sobre operaciones básicas y una tercera sobre propiedades elementales de los números racionales; los cuales fueron sometidos a un proceso de validación concurrente y confiabilización.

Los resultados obtenidos del análisis de las respuestas de los estudiantes, han permitido concluir, con relativa probabilidad, que en la comprensión de los significados del número racional existe una interferencia persistente del significado parte-todo, en la interpretación de los significados de medida, razón, cociente y operador. Además, se logró verificar la existencia de una relación directa entre la capacidad que tiene el alumno para manejar los algoritmos de las operaciones básicas con fracciones y el conocimiento de las propiedades del número racional, con la comprensión de sus significados.

RESUMO

O principal objetivo desta pesquisa é determinar o tipo de relação que existe entre a capacidade de resolver situações-problema envolvendo as operações básicas com frações e conhecimento das propriedades básicas dos números racionais com a compreensão dos significados dos números racionais positivos do estudantes do ensino médio. O objetivo do estudo é identificar os tipos de interferências na compreensão dos significados dos números racionais, caracterizar a compreensão dos significados da número racional positivo en seu representação fracionária.

O referencial teórico que sustentam a investigação é constituído por uma verificação de antecedentes sobre a compreensão dos significados dos números racionais, operações aritméticas básicas e propriedades elementares. Além disso, uma revisão da teoria relacionada à cognição, compreensão e aprendizagem dos números racionais, exame da evolução histórica e fenomenologia dos números racionais para avaliar suas diferentes interpretações e significados.

O estudo é o nível descritivo correlacional, relatórios de informação sobre o estado atual de compreensão dos significados dos números racionais. A técnica de observação do fenômeno da compreensão, a aplicação de provas. O projeto de pesquisa é correlacional descritivo trans.

Os resultados da análise das respostas dos alunos permitiu-nos concluir com uma probabilidade relativa de que a compreensão dos significados do número racional é verificada interferência persistente significado parte-todo na interpretação do significado da medida da relação, razão e operador. Além disso, há uma relação direta entre a capacidade do aluno para lidar com os algoritmos das operações básicas com frações e conhecimento das propriedades do número racional entender seus significados.

ABSTRACT

The main objective of this research is to determine the type of relationship that exists between the ability to solve problem situations involving basic operations with fractions and the knowledge of the basic properties of rational numbers with understanding of the meanings of positive rational numbers of secondary education students. The study has a purpose to identify the types of interference in the understanding of the meanings of rational numbers, to characterize the understanding of the meanings of positive rational numbers in fractional representation and determine the type of relationship between the ability to solve problem situations involving basic operations with fractions and knowledge of the basic properties of rational numbers with understanding the meanings of positive rational numbers that students hold.

The theoretical framework underpinning the research is composed of a background check on understanding the meanings of rational numbers, basic arithmetic operations and elementary properties. Also, a review of the theory related to understanding, cognition and learning of rational numbers, examination of the historical evolution and phenomenology of rational numbers to evaluate their different interpretations or meanings.

The study is of descriptive correlational level, reports information about the current state of understanding of the meanings of rational numbers. The technique of observation of the phenomenon of understanding was the application of tests. The research design is correlational descriptive trans.

The results of the analysis of student responses have allowed us to conclude with relative probability that the understanding of the meanings of rational number is verified persistent interference part-whole meaning in the interpretation of the meanings of measure, reason, ratio and operator. Also, there is a direct relationship between the ability of the student to handle the algorithms of basic operations with fractions and knowledge of the properties of rational number with the understanding of their meanings.

ÍNDICE

CAPÍTULO II

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

TÍTULO SEGUNDO

TRABAJO DE CAMPO

CAPÍTULO IV

DE LOS INSTRUMENTOS DE INVESTIGACIÓN Y RESULTADOS

INTRODUCCIÓN

El aprendizaje escolar de conocimientos matemáticos, en general, y de los números racionales, en particular, presupone que los estudiantes desarrollen su capacidad de establecer relaciones entre los conceptos, propiedades y algoritmos; a su vez, construyan una red de saberes relacionados entre sí, que posibilite acrecentar nuevos conocimientos, cada vez más amplios y complejos, basándose en los conocimientos previos, y así, construir una estructura de conocimiento matemático.

Diversos investigadores señalan puntos críticos de comprensión que son fuentes de dificultades para el aprendizaje de los números racionales; y algunos de estos puntos de vista son particularmente sensibles sobre cómo se debe introducir la enseñanza de los números racionales, a partir de la ampliación del conjunto de los números enteros y la interpretación de sus significados contextuales.

Se ha verificado que el sistema educativo ha desarrollado un significado de número racional que, históricamente, tiene su génesis en el sistema escolar, el significado parte-todo, que interfiere en la comprensión de los demás significados. Estas constataciones de deficiencia en la comprensión, motivan esta investigación que analiza el tipo de relación existente entre la comprensión de los significados con el conocimiento de los algoritmos de las operaciones básicas y las propiedades de los números racionales.

Así, la investigación fue orientada por el siguiente objetivo:

> **Determinar el tipo de relación de la capacidad de resolución de operaciones básicas con fracciones y el conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales, con la comprensión de los significados del número racional positivo de alumnos de educación secundaria.**

El trabajo se enfocó en la representación fraccionaria del número racional positivo, o sea, números de la forma a/b, donde a y b pertenecen a los números enteros, con la restricción que b es diferente de cero. Estos números aquí recibirán, simplemente, la denominación de fracción.

En el Perú, el concepto de fracción se estudia desde el tercer grado de educación primaria hasta el segundo grado de educación secundaria (Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular, 2008). Además, este conocimiento es fundamental para el estudio de los demás sistemas numéricos y otros conceptos relacionados como las proporciones, funciones trigonométricas, probabilidades, etc.

Investigaciones relacionadas a la cognición de las fracciones han evidenciado dificultades en relación a este concepto, sea desde el punto de vista de su enseñanza o su aprendizaje (Kieren, 1999; Llinares y Sánches, 1988; Berh, et al. 1983). Un aspecto relevante de estas investigaciones es que concuerdan en recomendar estudiar los diferentes significados en sus diferentes representaciones del número racional, para adquirir una comprensión integral de la noción.

Para Escolano y Gairín (2005), las dificultades en el aprendizaje de los números racionales son básicamente conceptuales y procedimentales en lo referente a las relaciones y operaciones de la propia estructura numérica de los números racionales; y en parte, son el resultado de procesos instructivos inadecuados. Asumen el supuesto que en el sistema educativo la enseñanza de las fracciones prioriza el significado parte-todo, y pretenden demostrar que el significado parte-todo provoca dificultades en su aprendizaje. Cabe destacar que proponen resolver tres cuestiones: ¿El significado parte-todo es un significado diferenciado o está incluido en otros? ¿Por qué se prioriza su utilización? ¿Qué efectos provocan en el aprendizaje?

Según Escolano y Gairín, el significado parte-todo no tiene significado de medida, cociente, razón y operador. Ellos arribaron a las siguientes conclusiones: primero, la fracción como significado parte-todo no surge de las necesidades humanas, puesto que la génesis histórica del número racional se encuentra en la medida de cantidades de magnitudes o en la comparación de dos cantidades de magnitud que da sentido a la idea de razón. Segundo, el **“**significado parte-todo habría que situarlo en la práctica educativa, y ubicarlo entre los recursos didácticos creados por necesidades del proceso de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas” (Escolano y Gairín, 2005, p. 23).

Del mismo modo demostraron que la priorización del significado parte-todo en la escuela se justifica, porque en la enseñanza se elude el proceso de medida con objetos y se abrevia los periodos de instrucción. Además, Escolano y Gairín (2005) encontraron tres obstáculos didácticos. Primero, se obstaculiza la formación de concepciones adecuadas al promover las ideas: “No existen las fracciones impropias”, “Las fracciones son números no medidas”, “el todo o unidad no es un número”. Segundo, se obstaculiza la separación conceptual del número racional y del número natural al apoyar las ideas incorrectas como: “La fracción está formada por dos números naturales”, “las relaciones y operaciones con números racionales tienen el mismo significado que en los números naturales”. Tercero, se obstaculiza la formación de ideas abstractas, los alumnos desarrollan creencias como las siguientes: “Los conceptos son las técnicas asociadas a los mismos” y “los contenidos útiles son los procedimientos”.

Partiendo de esta revisión sobre la comprensión de los significados del número racional es legítimo preguntarnos si estos tienen relación con el manejo de los algoritmos de las operaciones básicas (adición, resta, multiplicación y división) y los conocimientos de las propiedades básicas de los números racionales tan enfatizados en la enseñanza básica y en los libros de texto.

El trabajo de investigación partió de la hipótesis:

> **A mayor capacidad de resolución de operaciones básicas con fracciones y mayor conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales corresponde mayor comprensión de los significados del número racional positivo.**

Por estas consideraciones se respondió a la siguiente cuestión de investigación:

¿Cómo se relaciona la capacidad de resolución de operaciones básicas con fracciones y el conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales, con la comprensión de los significados del número racional positivo que revelan los estudiantes del nivel de educación secundaria?

Para responder esta interrogante se han estructurado tres instrumentos: *Prueba sobre comprensión de los significados del número racional, Prueba sobre operaciones básicas con fracciones* y *Prueba sobre propiedades elementales de los números racionales*, las cuales permitieron recoger información sobre las variables:

X_1: Resolución de operaciones básicas con fracciones.

X_2: Conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales.

Y: Comprensión de los significados del número racional positivo.

Los mismos que fueron sometidos a un estudio de diseño correlacional transeccional. Se utilizó recursos estadísticos de correlación múltiple.

El informe de investigación tiene la siguiente estructura:

En el Capítulo 1 se presenta: el marco teórico que sustenta la investigación, una revisión relativamente completa de los antecedentes de investigación; así mismo, se define los conceptos que pueden ocasionar controversia en la lectura del presente informe.

En el Capítulo 2 se hace un planteamiento formal de la problemática, enunciando las cuestiones materia de investigación, los objetivos, además, de enunciar la importancia, relevancia y limitaciones de la investigación.

En el capítulo 3 se presenta la metodología empleada, la selección de la muestra, descripción de los instrumentos de recolección de datos y su aplicación. Se hizo una explicación concienzuda del diseño estadístico, por ser la parte más compleja del análisis.

El Capítulo 4 presenta los resultados de las tabulaciones de las respuestas presentadas en los ítems de la prueba, permitiendo un levantamiento de la información para el análisis cuantitativo. Así mismo, se hace la discusión de los resultados más relevantes sustentados en el estudio estadístico previo.

En el Capítulo 5 se exponen las conclusiones y recomendaciones como consecuencia del estudio teórico y empírico.

Finalmente, se presenta las referencias bibliográficas y anexos.

TÍTULO PRIMERO

COMPRENSIÓN DE LOS SIGNIFICADOS DEL NÚMERO RACIONAL POSITIVO, SUS OPERACIONES Y PROPIEDADES

CAPÍTULO I

MARCO TEÓRICO

1.1 ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN

La organización de los antecedentes de investigación se ajusta a las recomendaciones del "Publication Manual of the American Psychological Association, 2002): Introducción descriptiva de la investigación y del autor, enunciación del objetivo, descripción de aspectos teóricos, descripción de la metodología, comentario crítico de los resultados y reflexión del informe en torno al problema de investigación que nos ocupa. (Hart y Hitt, 1999)

A continuación, se incluye los antecedentes relacionados al fenómeno de la comprensión del número racional, provenientes de investigaciones previas realizadas en diferentes latitudes.

- Resignificación del algoritmo para operar aditivamente con fracciones en un contexto escolar. Tesis de maestría presentado por Peña Rincón, Pilar (2011) en el Instituto Politécnico Nacional de México.

La cuestión problemática que orientó la investigación es "¿Qué característica debería tener una propuesta didáctica que busque resignificar el algoritmo aditivo promoviendo la comprensión tanto del concepto como del propio algoritmo? Además, el objetivo general fue "Construir una propuesta que a través de un trabajo conceptual resignifique el algoritmo para operar aditivamente con fracciones.

La propuesta didáctica se fundamentó en la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau y la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard. Un elemento nuclear del estudio fue la noción de resignificación el cual fue definida así: el conocimiento y su vida social. Es decir, buscar la resignificación de un concepto supone que los estudiantes han tenido ya un acercamiento escolar del mismo. De acuerdo con Gracia y Montiel (2007, citado por Peña, 2011) "La noción de resignificación busca hacer una distinción de origen con respecto a la idea platónica que establece la preexistencia de los objetos y procesos matemáticos y que implica considerar la unicidad de los significados. La noción de resignificación emerge, entonces, como elemento para dar cuenta de que el conocimiento tiene significados propios, contextos, historia e intensión; lo que señala la posibilidad de enriquecer el significado de los conocimientos en el marco de los grupos humanos".

La metodología predominante fue la Ingeniería Didáctica, por ser la más adecuada para desarrollar una propuesta didáctica. Las fases del proceso fueron: primero, el análisis preliminar; segundo, el diseño y análisis apriori de las situaciones didácticas; tercero, experimentación; y cuarto, análisis aposteriori y validación.

La muestra de estudio estuvo conformada por una sección de estudiantes de 11 a 12 años de una escuela municipal de educación básica de Santiago de Chile.

La propuesta logró que el uso de la fracción y la funcionalidad del conocimiento se hayan manifestado a través del significado de medida de la fracción. Así mismo, se logró que la adición de fracciones surgiera como respuesta natural a un problema de medida compuesta.

La interpretación del concepto de fracción como parte-todo se amplió al significado de medida. Del mismo modo, en la construcción de fracciones equivalentes se utilice el significado de razón.

Para comprender el algoritmo de adición de fracciones se ha partido de la noción de fracciones equivalentes, superando las limitaciones de la identidad de números naturales, por el cual se cree que si dos números se escriben de forma distinta, entonces expresan cantidades diferentes.

La resignificación se produjo cuando la comprensión se desplazó del significado parte-todo al significado de medida. La resignificación de la equivalencia de fracciones se produjo como resultado de una comprensión profunda del significado a través de la comprensión de su definición y de sus procedimientos asociados a la equivalencia como ampliar, agrandar, multiplicar, simplificar, achicar, dividir, etc.

El estudio concluyó señalando que la interpretación de la fracción como medida fue la más propicia para construir el algoritmo aditivo. La contextualización en una situación concreta permitió realizar las sumas con materiales, y, mediante un proceso de abstracción sucesiva, establecer un procedimiento estándar para efectuar la suma.

Peña concluyó que para resignificar el algoritmo, para operar aditivamente fracciones promoviendo la comprensión, se debe articular la comprensión del concepto de fracción con los procedimientos aditivos y resignificar el algoritmo aditivo ya conocido. Así mismo, se debe considerar un significado de la fracción que posibilite construir un algoritmo con sentido. Se ha utilizado el significado de medida para el contexto aditivo y el significado de razón para establecer las equivalencias.

Referente a los obstáculos epistemológicos derivados de la extensión del aprendizaje de los números naturales para aprender las fracciones, sostuvo que fue necesario entender que las fracciones son un tipo de número y no un número compuesto por otros dos. Así mismo, fue preciso entender que dos fracciones expresadas con distintas cifras pueden ser "iguales".

- Representación de los números racionales y la medida de segmentos: Posibilidades con tecnologías informáticas. Tesis de Maestría presentado por Claudio Woerle Lima en la Universidad Estatal Paulista de Brasil en el 2010.

El estudio buscó contribuir con las investigaciones sobre aprendizaje y enseñanza de los números racionales, proponer alternativas para la enseñanza de las fracciones, por medio de análisis de una propuesta metodológica que explore los números racionales vía la medición de segmentos usando un software de geometría dinámica, buscando indicios de cómo esa propuesta puede contribuir en la comprensión de los racionales.

La interrogante que orientó la investigación fue: ¿Cómo la exploración de fracciones como medida y el proceso de medición de segmentos, explorados vía software de geometría dinámica, contribuye al entendimiento de los números racionales en sus múltiples representaciones?

Además de sustentar la teoría relativa a las tecnologías de la informática, el investigador desarrolló la teoría de las representaciones según Lesh, Post y Behr (1987, citado por Woerle).

Además, desarrolló una perspectiva histórica de la evolución de los números racionales, hizo también una revisión de libros de texto para hacer una breve historia de la enseñanza y aprendizaje de las fracciones y los decimales. Como el núcleo de la investigación es el significado de medida de los números racionales, realizó una revisión detallada de los procesos de medición y fracción. Así, Lebesgue (1966) y Baroni y Nascimento (2005) (citados por Woerle) proponen la construcción del conjunto de los números reales no negativos a través del proceso de medición de segmentos. De esa forma presentó la función medida como un proceso, llamado medición.

Esta investigación se basó en procesos de medición de segmentos, en teorías de visualización, experimentación y representaciones múltiples. La experimentación se inspiró en los principios constructivistas. La investigación de enfoque cualitativo se basó en la metodología de experimentos de enseñanza, con dos grupos de alumnos de 6º y 7º serie de enseñanza fundamental de una escuela pública estatal del interior de São Paulo.

El estudio teórico dio como resultado que el significado de medida tuvo su importancia en la enseñanza de fracciones, mas las sucesivas reformas dieron paso a otros significados, como el de parte-todo, cociente, razón u operador. Además, el significado de medida tuvo su origen histórico en las antiguas civilizaciones.

Las principales contribuciones de esta investigación y que tienen relación con nuestra investigación son:

- La importancia de las coordinaciones en las representaciones fraccionarias, decimales y en la semi-recta.
- Se evidenció que las estudiantes vieron a las fracciones como más significativas, principalmente al asociar el sistema de representación simbólica con la figural en la recta numérica racional.
- La importancia de la visualización geométrica de las operaciones de adición y sustracción se manifestó en la posibilidad de explorar las operaciones de adición y sustracción geométricamente, sin conocer

los resultados aritméticos. La visualización en cuestión permitió al estudiante comprender los algoritmos de cálculo, gracias a la confrontación con las construcciones geométricas.

La investigación evidenció que las representaciones en la recta permitieron visualizar la densidad de los números racionales y la posibilidad de ampliar la recta tanto como se desee.

La utilización de la semi-recta dejó en evidencia que debería definirse primeramente la unidad patrón, de modo que cualquier representación en la recta debe ser asociada a una representación simbólica.

- Significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria. Tesis de Maestría presentado por Rebeca Flores García (2010) en el Instituto Politécnico Nacional de México.

En este estudio se analizaron los significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria. El problema de investigación fue: ¿Cuáles son los significados asociados a la noción de fracción presente en la escuela secundaria? Algunas cuestiones derivadas del mismo fueron: ¿Cuáles son los significados asociados a la noción de fracción presentes en el discurso matemático escolar?, ¿cuáles son los significados asociados a la noción de fracción movilizados por los estudiantes?

La teoría que sustentó esta investigación estuvo enmarcada principalmente en los modelos teóricos planteados por Brousseau, Kieren y Lamon; en los dos primeros se realizaron planteamientos acerca de cómo podría llevarse a cabo la enseñanza de los racionales, y el tercero, aplicó el modelo teórico de Kieren, construyó una red de significados para los números racionales. Su finalidad: ayudar a los estudiantes a comprender las fracciones y sus representaciones.

Los antecedentes de investigación se desarrollaron a través de una revisión de investigaciones relacionadas con el objeto de estudio, un análisis del programa de estudio, así como de tres series de libros de texto de educación secundaria en México. Se aplicó a los estudiantes un instrumento conformado por 6 preguntas, para el análisis de las realizaciones de los estudiantes al enfrentar esos problemas.

Los resultados a los que se arribó en este trabajo fueron:

a) Las investigaciones revisadas evidenciaron al menos entre 12 y 14 significados asociados a la noción de fracción.
b) En las producciones de los estudiantes se manifestó:
    - Dificultad para arribar a una “nueva unidad”, a partir de ella generar la solución del problema.
    - La presencia de nociones como equivalencia y partición en las soluciones propuestas por los estudiantes.
    - Dificultades para pasar de un contexto aritmético a uno geométrico o algebraico.
    - La multiplicidad de nociones en un mismo problema genera conflictos en la comprensión del problema.
    - La recurrencia a la representación decimal pretendiendo evitar trabajar con las fracciones.

- Encuadramiento de los números racionales en intervalos de racionales: Una investigación con alumnos de Enseñanza Fundamental. Tesis de Maestría presentado por Luciana Lage en la Pontificia Universidad Católica de São Paulo de Brasil en el 2006.

El objetivo principal de la investigación fue responder a las siguientes cuestiones:

a) ¿Qué herramientas y procedimientos utilizaron los alumnos en el desarrollo de las actividades sobre encuadramiento numérico en intervalos?
b) ¿Qué capacidades (en términos de representación numérica, gráfica u otras) utilizan los alumnos para resolver las actividades propuestas?

La teoría que sustentó esta investigación fue el de Juegos de Marcos y Dialéctica Herramienta-Objeto de Douady. Según esta teoría la reorganización de la enseñanza se hace en base a la dialéctica de herramienta-objeto.

Douady explicó, se llama Dialéctica Herramienta-Objeto al proceso de fases:

Fase a "antigua": Los conceptos matemáticos que posee el estudiante se ponen en acción como herramientas explícitas para resolver, al menos, en forma parcial el problema.

Fase b *"Nueva búsqueda implícita"*: En las condiciones que los conceptos anteriores se tornan ineficaces para concretizar la resolución será necesario buscar, y adaptar nuevos medios. A menudo, esto se consigue eficazmente cambiando marcos, esto permitirá poner en acción implícitamente nuevas herramientas, nuevas por el campo de intervención del problema o por su naturaleza, se está refiriendo a los *"nuevo implícito"*.

Fase c *"Explicitación e institucionalización local"*: Ciertos elementos matemáticos que han sido utilizados en la fase anterior, deben ser formulados en términos de objeto, o bien, en términos de práctica con sus condiciones de empleo para el momento. En esta fase se discute colectivamente la validez de los trabajos, propuestas de solución, y argumentos de los alumnos.

Fase d *"Institucionalización-estatuto del objeto"*: Aun si los estudiantes de la clase han resuelto el problema, algunos alumnos no comprenden de la misma manera las herramientas utilizadas, entonces es necesario oficializar estos conocimientos, darles el estatuto de objeto matemático es una condición de homogeneización y de constitución de un saber de la clase. En esta fase, el profesor organiza y estructura las definiciones, teoremas, demostraciones, clasificando lo esencial de lo secundario.

Fase e *“Familiarización-reinvención”*: La estructuración personal es importante en matemáticas para que sea efectivo el saber. En esta fase el estudiante debe poner a prueba, en ensayos renovados, los conocimientos que cree haber aprendido. El docente propone ejercicios variados que requieran los conocimientos institucionalizados recientemente, con la finalidad de integrar el saber social confrontándolo a su saber personal.

Fase f *“La tarea o el nuevo problema se hace más complejo”*: En esta fase, el alumno se enfrenta a situaciones más complejas; pone a prueba e incluso desarrolla su dominio de las adquisiciones de saberes.

A partir de esta fase los *“nuevos conocimientos”* se constituyen en *“antiguos”* y comienza un nuevo ciclo de la dialéctica herramienta-objeto.

La dinámica de ciclos describe los siguientes comportamientos: a veces será necesario trabajar más de un ciclo para desarrollar un ciclo de la dialéctica herramienta-objeto. Se puede presentar casos en que hábitos y prácticas necesiten años para convertirse en objetos del saber.

La investigación fue de carácter cualitativo, en la forma de estudio de caso exploratorio, caracterizado como un estudio en profundidad, adecuado a situaciones complejas y dinámicas, permitiendo obtener información relevante para la toma de decisiones. Esta metodología le permitió al investigador hacer descubrimientos y observaciones referentes tanto a nuevos factores como a otros aspectos relevantes que pueden surgir durante la investigación.

Los logros más importantes que los estudiantes demostraron fueron: interacciones entre dos a cuatro dentro de los siguientes dominios: numérico, de lenguaje materno, algebraico y geométrico; creación de diversas estrategias de resolución de problemas, en las que emplearon herramientas matemáticas principalmente las nociones de números positivos, número par (con posibles fallas en el significado), multiplicación, media aritmética, segmento e intervalos numéricos, con significados diferentes entre los alumnos de la clase; empleo de relaciones “ser mayor que”, “ser menor que” y “ser múltiplo de”, además de las relaciones de orden “ser mayor o igual a “ y “ser menor o igual a”.

- El concepto de fracción en sus diferentes significados: un estudio diagnóstico de alumnos del 5º y 6º serie de Enseñanza Fundamental. Tesis de Maestría en Educación Matemática presentado por Vera Lucía Merlini (2005) en la Pontificia Universidad Católica de São Paulo de Brasil.

La investigación tuvo el objetivo de indagar las estrategias que los alumnos de 5ª y 6ª serie de Enseñanza Fundamental utilizan cuando resuelven problemas que involucran el concepto de fracción. La interrogante fue ¿qué estrategias de resolución utilizan los estudiantes cuando se enfrentan a problemas que aborden el concepto de fracción, respecto a los cinco significados de fracción: número, parte-todo, cociente, medida y operador multiplicativo?

El estudio se sustentó en la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud, la clasificación de los significados de la fracción según Kieren y la propuesta de clasificación de Nunes.

La muestra de estudio fue de 120 estudiantes, siendo 60 de 5ª serie y 60 de 6ª serie, de las escuelas estatales de la zona este de la ciudad de São Paulo. La investigación fue de carácter diagnóstico, para ello se aplicaron pruebas sobre los significados de las fracciones y entrevistas clínicas al 12% de los sujetos. Los análisis de datos fueron de doble naturaleza: primero, cuantitativos, y segundo, cualitativos.

Los porcentajes de acierto, en ambos grados, presentaron una homogeneidad en el desempeño. En la interpretación del significado de ‘parte-todo’ se ha encontrado mejor desempeño, sin embargo, las representaciones icónicas no ayudan a la interpretación del mismo. Un hallazgo adicional es que, en la interpretación del significado de ‘número’, se presentó el mayor fracaso, seguido del significado de medida.

El fenómeno de homogeneidad en los desempeños de las dos series se ha roto, ya que en la interpretación de los significados de Cociente y Operador multiplicativo existen diferencias. Así, se encontró que los alumnos de la 6ª serie tienen mejores desempeños en la interpretación del significado de Operador multiplicativo, en tanto que los alumnos de la 5ª serie se desempeñan mejor en la interpretación del significado de Cociente.

Las estrategias de resolución de problemas que involucran los significados de fracción fueron: Primera, estrategia de relación parte-parte, es decir el alumno ignora el todo, e interpreta las partes con las partes como si se tratara de razones; segunda, estrategia de inversión numerador por el denominador; tercera, estrategia para resolver una situación de cociente que es resuelta siguiendo la interpretación parte-todo; cuarta, estrategia de interpretación literal de la fracción (1/2 como un entero y medio); quinta, estrategia de invertir las fracciones impropias por considerarlas inadecuadas; sexta, estrategia de considerar las fracciones como la superposición de dos números naturales y séptima, estrategia de realizar alguna operación entre el numerador y el denominador.

Lucía concluyó que dentro de las estrategias utilizadas para resolver las situaciones no se han encontrado una regularidad. Así mismo, para resolver una situación problemática de un significado se logró encontrar diferentes estrategias de resolución. La enseñanza del concepto de fracción en las escuelas privilegia los significados parte-todo y de operador multiplicativo, en detrimento de los demás. Este privilegio no garantiza que el alumno construya este concepto.

- Fracciones y sus diferentes significados un estudio con alumnos de 4ª y 8ª serie de Enseñanza Fundamental. Tesis de Maestría en Educación Matemática presentado por Valpereiro, L. (2005) en la Pontificia Universidad Católica de São Paulo.

Dada la importancia de las dificultades detectadas en la enseñanza-aprendizaje de las fracciones se da cuenta del estudio de Valpereiro (2005).

El objetivo fue identificar las concepciones de los alumnos de la 4ta y 8va serie (grado) de Enseñanza Fundamental en escuelas públicas, presentadas con relación a los cinco significados de la fracción: como número, parte-todo, cociente, medida y operador multiplicativo.

El marco teórico estuvo respaldado en la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1990) y las ideas de Nunes et al. (2004), Valpereiro (2005), quienes insistieron en clasificar los significados de los números racionales, en su representación de fracción como parte–todo, medida, número, operador multiplicado y cociente.

Son importantes las referencias que se presentan en Kieren sobre las interpretaciones y significados del número racional como relación parte–todo, cociente, medida, razón y operador. Además, se referenció a Ohlsson, Behr, Nunes para fundamentar los significados del número racional.

La investigación fue de tipo diagnóstico cualitativo, que pretendió describir la comprensión de los significados de las fracciones. El universo de estudio estuvo constituido por estudiantes de escuelas públicas estatales, localizadas en la región central de la ciudad de São Paulo. Se seleccionó el 4to grado por ser este donde el estudio de las fracciones se enfatiza y 8º grado por ser este el grado concluyente de la Enseñanza Fundamental. La muestra fue de 65 estudiantes en 4º grado y 58 alumnos en 8º grado, a quienes se aplicó una prueba de 19 cuestiones que tuvieron la intención de evaluar los cinco significados de las fracciones distribuidas en 29 ítems.

La conclusión más interesante, según nuestro criterio fue:

> …en las series (grados) iniciales de Enseñanza Fundamental deben trabajarse situaciones que aborden los significados, parte-todo, medida y cociente, en vista que estos alumnos poseen apenas el concepto de número racional, en tanto que a partir de la 5ta serie, del mismo nivel de enseñanza, sean estudiados también los significados número y operador multiplicativo, teniendo en cuenta la

> construcción de los números racionales que comienza a ocurrir a partir de esa serie (Valpereiro, 2005, p. 188).

La primera parte de la conclusión se sustentó en el hecho que esos significados son más afines a los números naturales. Cabe preguntar, por qué el alumno tiene dificultades para comprender los significados de fracción como operador, por ejemplo. La curiosidad científica debería conducir a buscar explicaciones y ver si son superables esas dificultades y si pueden ser estudiados en la 4ta serie (grado) los significados de operador y razón.

- Números racionales: Un estudio de las concepciones de los alumnos después de los estudios formales. Tesis de Maestría en Educación Matemática presentado por Rodríguez, W. R. (2005) en la Pontificia Universidad Católica de São Paulo.

Rodríguez (2005) estudió las concepciones del número racional haciendo énfasis en el diagnóstico de los significados parte–todo y cociente. La investigación se desarrolló en el ámbito de los estudiantes de diferentes niveles educativos. Tomándose en cuenta que a pesar que los números racionales están presentes en casi toda la educación escolarizada, se observó que el dominio que adquieren entraña algunas incongruencias, así un alumno puede dominar los algoritmos y puede tener éxito en el contexto escolar y mostrar dificultades para resolver situaciones de la vida cotidiana o a la inversa.

El objetivo de la investigación fue: “Identificar aspectos del concepto de número racional cuya construcción no se estudió eficazmente en el periodo de educación básica, cuando fueron trabajados en el aula y que permanecen sin ser aprendidos por los alumnos por largo tiempo, durante el proceso de escolarización” (Rodríguez, 2005, p. 11). La interrogante fue: “¿Qué aspectos del concepto de fracción en los significados parte–todo y cociente permanecen sin ser aprendidos, por los alumnos de octavo grado de enseñanza fundamental, tercer grado de enseñanza media y enseñanza superior, en el área de exactas?” (p. 15). La hipótesis fue: la enseñanza formal de fracciones no ha sido capaz de proveer situaciones a los alumnos para que el concepto sea plenamente aprendido como se observara en niveles avanzados de escolaridad.

Los fundamentos teóricos del estudio se sustentaron básicamente en tres autores: Primero, Caraça en su libro *Coceitos fundamentais da matemática* de 1952 postula que el surgimiento del campo de los números racionales es a partir de las necesidades humanas de comparar magnitudes, lo que da lugar al surgimiento de la unidad de medida y del manejo de los principios básicos de la matemática. Segundo, el aporte de Vygotsky respecto a la construcción del concepto en la interacción entre la vida escolar y cotidiana. Según este psicólogo ruso existen dos tipos de conceptos; los cotidianos (espontáneos) y científicos, y estos últimos se forman en situaciones de educación formal y no son aprendidos en forma definitiva. Y tercero, la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud (1990).

La investigación fue de naturaleza causal comparativa y de carácter diagnóstico. En una muestra de 29 alumnos de enseñanza superior, 31 alumnos de enseñanza media y 13 alumnos de octavo grado de escuela, se aplicó un cuestionario que evalúa la comprensión de dos significados parte–todo y cociente, considerados como los más ligados a la idea de construcción del número racional; además, se sostuvo que por medio de estos significados se introduce el concepto de fracción en el inicio de la escolaridad. En la medida que la formación de un concepto puede durar largo tiempo se escogió una muestra de tres diferentes niveles educativos.

A igual que Bher, Rodríguez (2005) concluyó que la correcta construcción del concepto de número racional es un factor fundamental para el aprendizaje de otros conceptos más sofisticados, y que el estudio del número racional es particularmente adecuado para desarrollar estructuras cognitivas para el tránsito del pensamiento concreto al operatorio formal.

En la evaluación del significado de la fracción como cociente se encontró que en situaciones de cociente con cantidades discretas, la mayoría de los estudiantes usan la cardinalidad del conjunto a ser repartido. Como consecuencia, se percibió una resistencia a asumir que un número natural es un número racional. Así mismo, los educandos no lograron identificar a las fracciones como entes numéricos en su plenitud, evidenciando la dificultad de aceptar que el conjunto de los números naturales está incluido en los racionales.

- Modelos de medida para la enseñanza de números racionales en educación primaria. Investigación realizada por Escolano, R. y Gairín, J. (2005).

Para Escolano y Gairín (2005) las dificultades en el aprendizaje de los números racionales, son básicamente conceptuales, procedimentales, de relaciones y operaciones de la propia estructura numérica de los números racionales; y en parte, son el resultado de procesos instructivos inadecuados. En el año 2002, se encontró que en España “son casi tres de cada cuatro, los que tienen dificultad para comprender el concepto de fracción y operar con fracciones” (INCE, 2002, p. 2) citado por Escolano y Gairín (2005).

Estos investigadores asumieron el supuesto que en el sistema educativo español, la enseñanza de las fracciones prioriza el significado parte-todo y demostraron que el significado parte-todo provoca dificultades en su aprendizaje. Propusieron resolver tres cuestiones: ¿El significado parte-todo es un significado diferenciado o está incluido en otros?, ¿por qué se prioriza su utilización?, ¿qué efectos provoca en el aprendizaje?

El significado parte-todo de los números racionales fue discutido respecto a su legitimidad como tal, así Behr et al. (1992) admitió cinco significados de las fracciones: parte-todo, cociente, razón, operador y medida; en tanto que Kieren (1999) consideró el significado parte-todo como parte de los significados de cociente y medida.

Escolano y Gairín, afirmó que el significado parte-todo no tiene significado de medida, cociente, razón y operador. Ellos arribaron a las siguientes conclusiones:

1. “La fracción como significado parte-todo no surge de las necesidades humanas (en el sentido que nombró Bishop, 1999), puesto que la génesis histórica del número racional se encuentra en la medida de cantidades de magnitudes – bien realizada directamente o bien realizadas para expresar el resultado un reparto – o en la comparación de dos cantidades de magnitud, ya medidas, que da sentido a la idea de razón” (Escolano y Gairín, 2005, p. 22).
2. El “significado parte-todo habría que situarlo en la práctica educativa, y ubicarlo entre los recursos didácticos creados por necesidades del proceso de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas” (Escolano y Gairín, 2005, p. 23).

La priorización del significado parte-todo en la escuela se justifica: primero, porque en la enseñanza se elude el proceso de medida con objetos; y, segundo, se abrevia los periodos de instrucción. Además, Escolano y Gairín (2005) encontraron tres obstáculos didácticos:

1. Se obstaculiza la formación de concepciones adecuadas al promover las ideas: “No existen las fracciones impropias”, “Las fracciones son números no medidas”, “el todo o unidad no es un número”.
2. Se obstaculiza la separación conceptual del número racional y del número natural al apoyar las ideas incorrectas: “La fracción está formada por dos números naturales”, “las relaciones y operaciones con números racionales tienen el mismo significado que en los números naturales”.
3. Se obstaculiza la formación de ideas abstractas al propiciar que los alumnos desarrollen creencias como las siguientes: “Los conceptos

son las técnicas asociadas a los mismos” y “Los contenidos útiles son los procedimientos”.

Escolano y Gairin en la segunda parte del documento, plantearon una propuesta pedagógica alternativa de la enseñanza del número racional. El objetivo de la propuesta fue favorecer la construcción de concepciones adecuadas; potenciar la idea del número racional y facilitar la construcción de ideas abstractas; que los “escolares integren los diferentes significados de número racional, así como los sistemas de representación asociados; y que se evite la exclusividad de alguno de ellos, puesto que cualquiera de los significados destaca alguno de los aspectos del número racional mientras que oscurece a otros” Figueras (1988) citado por Escolano y Gairín (2005, p. 26) . El modelo establece una secuencia de tres momentos: en cuarto grado, (10 años) se enseñará los modelos de medida; en quinto (11 años), los modelos de cociente; y en sexto (12 años), los modelos de razón.

Los resultados de la propuesta pedagógica fueron alentadores; desaparición de los obstáculos epistemológicos, además los alumnos perciben que la fenomenología asociada a la fracción difiere sustancialmente de la del número natural. Entre las desventajas de la propuesta está que el aprendizaje es más dilatado en el tiempo por que se retrasa la introducción de la representación simbólica de la fracción.

- El concepto de fracción en sus diferentes significados: un estudio de diagnóstico de profesores de Enseñanza Fundamental. Tesis de Maestría en Educación Matemática presentado por Dos Santos, A. (2005) en la Pontificia Universidad Católica de São Paulo.

Para Dos Santos (2005) el objetivo de su estudio fue evaluar las concepciones que los profesores tenían del concepto de número racional en su representación fraccionaria. El bajo desempeño en la resolución de situaciones con fracciones de los estudiantes motivó a este investigador a plantear la hipótesis de que el desempeño de los alumnos tiene estrecha relación con las concepciones de sus profesores. Basándose en el hecho que el éxito de la enseñanza de las fracciones en sus diferentes significados depende de la concepción que tenga el docente. Por esta razón la interrogante planteada fue: ¿Es posible reconocer las concepciones de los profesores que enseñan en los 1° y 2° ciclo (polivalente) y 3° ciclo (especialista) de Enseñanza Fundamental respecto a los conceptos de fracción en sus diferentes significados?

El estudio se apoya en las teorías de los campos conceptuales de Vergnaud, investigaciones de Teresinha Nunes y la clasificación de significados de la fracción de Kieren (1988). Dos Santos asume cinco significados del número racional adhiriéndose a Kieren (1988) y Nunes et al. (2004): el número racional como número, parte–todo, medida (con cantidades intensivas y extensivas), cociente (una división) y como operador multiplicativo.

La investigación diagnóstica es de tipo cualitativo, es decir, observa, interpreta y analiza los trabajos producidos por los docentes, relacionados con sus concepciones del concepto de número racional. La naturaleza de los datos permitió una metodología cuantitativa / cualitativa para la presentación de los resultados.

El método de análisis de Bardin, citado por Dos Santos (2005), le permitió comprender críticamente el significado contenido en las producciones del sujeto, tanto desde el punto de vista de su contenido manifiesto como de su contenido latente. El método parte del supuesto que el sujeto que proporciona datos es un seleccionador de información. El análisis de contenido posibilitó la formulación de categorías de análisis a posteriori que emerge de la producción de resultados. La estrategia de recolección de datos constó de dos momentos; primero, se solicitó a los profesores elaborar seis problemas referentes al concepto de fracción; y, en el segundo, se solicitó que resolvieran los mismos problemas.

El universo de estudio fue el grupo de profesores de Enseñanza Fundamental de escuelas públicas de la ciudad de São Paulo, perteneciente a la zona este, menos favorecida económicamente y con serios problemas sociales. La muestra fue de 67 profesores.

Las conclusiones muestran que los problemas elaborados por los profesores, parten de situaciones próximas a la vida cotidiana; sin embargo, algunos problemas eran inconsistentes.

El significado de operador multiplicativo predomina, seguido del significado parte–todo; se cree que dicha situación se debió a las recomendaciones contenidas en los Parámetros Curriculares Nacionales. El significado parte–todo está relacionado a cantidades continuas, en tanto que el significado como operador multiplicativo está ligado a cantidades discretas. Los significados número y medida fueron los más desatendidos en la formulación de problemas por los docentes.

Respecto a los procedimientos y estrategias de resolución de los problemas, se constató que existe una tendencia a preferir procedimientos algorítmicos en la resolución de problemas del significado operador multiplicativo. En tanto que para resolver problemas de parte–todo se usó con mayor frecuencia las representaciones icónicas.

Finalmente, Dos Santos afirmó que, los profesores polivalentes y especialistas, con relación al concepto de fracción en sus diferentes significados, poseen concepciones similares a pesar de pertenecer a espacios de formación profesional distinta, pues los docentes especialistas han tenido una formación matemática. La explicación que ensaya es que las concepciones y saberes de los profesores se fundan en pre concepciones de enseñanza y aprendizaje, asimismo de su historia de vida; principalmente, de su historia escolar, en el tipo de tareas y actividades que desarrollaron en su época de aprendiz.

- Enseñanza del número racional positivo en educación primaria: Un estudio desde el modelo cociente*.* Resultado de la investigación realizado por Escolano, R. (2001).

Según Escolano (2001) el aprendizaje de los números racionales presenta dificultades por la desconexión entre los sistemas de representación fraccional y decimal, deficiencias del conocimiento conceptual de los racionales y los procedimientos manipulativos de los símbolos, y la priorización del significado de la fracción como parte-todo, que destaca solo algunos aspectos y oculta otros, descuidándose otros significados como: operador, medida, cociente o razón.

El objetivo del estudio fue explorar las potencialidades y limitaciones de la propuesta didáctica que excluye el significado de la fracción como parte–todo y enfatiza los significados propios de la fenomenología del número racional como medida y reparto. La hipótesis fue que este medio didáctico favorece la comprensión de los números racionales. Los objetivos específicos fueron:

1. Conceptualizar la fracción con significado de medida de cantidades de magnitud (longitud, peso, superficie y cardinalidad).
2. Dar significado y justificar desde los modelos de medida las operaciones básicas.
3. Conceptualizar la fracción como el resultado de un reparto.
4. Conectar los sistemas de representación fraccionaria y decimal.
5. Dar significado y justificar desde modelos de aprendizaje las relaciones y operaciones entre números racionales.

El marco teórico tuvo tres dimensiones: las estructuras numéricas específicas, las funciones cognitivas y el estudio de problemas y situaciones que se abordan mediante estructuras numéricas, pero concretamente se ocupa de la dimensión cognitiva. Dentro de esta última dimensión se explica: la noción de comprensión, los sistemas de representación y los modelos de aprendizaje. Escolano asume la hipótesis de Kaput (1999), quien explica que para alcanzar la comprensión es necesario el dominio coordinado de dos o más sistemas de representación.

La investigación fue de tipo exploratorio e interpretativo enmarcado en el paradigma cualitativo. La innovación curricular se sustentó en la investigación acción empírica y diagnóstica de dos etapas, con un primer grupo natural de 4to grado; y luego, con 5to grado de educación primaria de un colegio de Zaragoza durante los años 1999–2001.

El estudio concluyó, primeramente, en que los estudiantes no intuyen la necesidad de fraccionar en partes iguales la unidad de medida; segundo, tuvieron dificultades para representar medidas fraccionales del peso; tercero, no se observó diferencias significativas en la comprensión cuando se manipula modelos de longitud y superficie; y cuarto, los alumnos con la ayuda de material manipulativo construyeron con más facilidad, fracciones equivalentes.

Las conclusiones respecto al potencial de la propuesta didáctica señalan que el aprendizaje basado en magnitudes continuas (longitud y superficie) permitió a los educandos construir y evaluar semánticamente el sistema de representación fraccional y dar significados a las relaciones de equivalencia y orden; además, las representaciones gráficas facilitan la transmisión entre las acciones realizadas con materiales manipulativos y las representaciones simbólicas.

- Equivalencia y orden: La enseñanza de la comparación de fracciones. Investigación realizada por Carlos Maza Gómez (1999) parte del supuesto que para entender las fracciones es imprescindible considerar la relación de equivalencia. La idea que justifica que dos números fraccionarios son equivalentes, es que ambos representan el mismo número racional, pero que son dos pares ordenados distintos. Las fracciones tienen una apariencia como par ordenado y una sola naturaleza como número racional. Maza sostiene que para comprender la naturaleza de las fracciones debemos ver sus manifestaciones, operaciones entre sí y el establecimiento de sus relaciones de equivalencia y orden.

En esta investigación Maza indagó sobre las relaciones de equivalencia en la construcción del conjunto de los números racionales; no obstante, como sistema numérico está condicionado por su relación de orden. Esto implica que una enseñanza de los números racionales debe conjuncionar las relaciones de equivalencia y de orden entre las fracciones en actividades de comparar el tamaño de las fracciones. En este estudio el autor reflexionó sobre las dificultades de aprendizaje en la comparación de fracciones.

Entiende que $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$ son equivalentes porque representan el mismo número racional, aunque son distintos como pares ordenados. Las fracciones tienen una apariencia de par ordenado, pero una naturaleza como número, y que esta naturaleza solo se manifiesta cuando las fracciones se ordenan y operan entre sí.

Particularmente, desde la matemática moderna se presta mucha atención a la relación de equivalencia para la construcción de los números racionales como para su enseñanza. Frente a este sesgo en el tratamiento actualmente se postula que la relación de equivalencia no debe ser el único, sino complementado con la "concepción de las fracciones como entes matemáticos ordenados".

El objetivo del estudio de Maza fue comprender la enseñanza de los números racionales considerando las relaciones de equivalencia y de orden, organizar la comprensión de la construcción del número racional y proponer pautas para su adecuada enseñanza.

Dentro de los aspectos técnicos que recogió para comprender como aprenden los alumnos las relaciones de equivalencia, sostuvo que la dificultad tuvo dos fuentes:

- En el paso de las representaciones manipulativas o icónicas a las simbólicas.
- En las manipulaciones entre las representaciones simbólicas.

Maza recoge lo que Post y sus colegas llamaron las “traslaciones coordinadas de las representaciones”, es decir para reconocer que dos fracciones son equivalentes se hacen traducciones de los sistemas simbólicos a las representaciones icónicas, plegado de papeles y en ellas comparar áreas; se debe primero reconocer la equivalencia en representación icónica y luego trasladar estas a las representaciones simbólicas; esta forma de proceder es más asequible que hacerlo solo manipulando representaciones simbólicas.

Según Bohan (1971, citado por Maza 1999) luego de enseñar de esta forma menos de la mitad de los estudiantes de 11 años son capaces de simplificar fracciones en el nivel simbólico. Esto muestra que no es inmediata la adquisición de la capacidad de traducir las representaciones icónicas a las representaciones simbólicas, de ahí la importancia de investigar este aspecto.

Las manipulaciones al interior de las representaciones simbólicas mostraron que para los alumnos es más fácil construir fracciones equivalentes a partir de una más elemental que al revés. Ettline (1985, citado por Maza 1999) sostiene que la división del numerador y el denominador por un mismo número lo confunden con la división de fracciones. Frente a esta conjetura de Ettline, Maza sostiene que la dificultad de estas dos tareas radica en la incomprensión y falta de dominio de la regla de multiplicación por uno, y en la posesión de estrategias incompletas o informales que sustituye a esta regla. Otro resultado que presentó es que frente a la tarea $\frac{1}{3}=\frac{2}{?}$ el porcentaje de aciertos oscila entre el 72%, a los 12 años, y el 79% a los 15 años (Hart 1981, citado por Maza 1999); así mismo, hizo un análisis de los errores que cometen los alumnos frente a similares tareas, donde se justifica que: $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}$ ¿por qué? o $\frac{1+1}{2+2}=\frac{2}{4}$ y $\frac{2+1}{4+2}=\frac{3}{6}$ (Vance 1992, citado por Maza 1999)

Aquí aparentemente los niños no tienen una correcta comprensión de la equivalencia, sino estarían utilizando regularidades o pautas. Sin embargo, debemos señalar que las pautas o regularidades las encontrará en algunos ejemplos, pero no en la mayoría, lo que lo conducirá a comprender que este tipo de patrones no son los adecuados para justificar las regularidades.

Algunas conclusiones que formuló son:

- La regla de la multiplicación por uno se va construyendo a partir de la suma del numerador y denominador consigo mismo.
- Existe otros criterios de comparación numérica entre numerador y denominador, de falsa generalización de las reglas, entre otros que obstaculizan el aprendizaje de las reglas de multiplicación por 1.

Los errores que cometen los alumnos posiblemente radiquen en la "escasa transparencia de los símbolos y reglas utilizadas", es decir, los estudiantes no comprenden la relación entre las representaciones simbólica y su referente gráfico, de modo que el referente actúe como restricción de las acciones que ejecuta en el sistema simbólico. De allí, que Maza recomendó reforzar la conexión símbolo-referente.

Kieren (1992) recuerda que la equivalencia de fracciones implica comprender dos tipos de igualdades: la "relativa" y la "deductiva"; la primera, referente a la regla de multiplicar por el uno; y la segunda, como la igualdad del producto de los "medios" y los "extremos". Esta última, es vista por Maza antes como una regularidad observable que como una regla construida en relación con las acciones sobre el referente.

Las dificultades que presentó el alumno al ordenar fracciones son de diversas fuentes: los conocimientos de orden en el conjunto de los números naturales, características lingüísticas del orden entre fracciones, y el hecho de ser fracciones como pareja de números.

Enfrentado a estas dos fracciones $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$ puede llegar a afirmar que $\frac{1}{4}$ es mayor que $\frac{1}{3}$, dado que 4 es mayor que 3. Sin embargo este criterio podría ser válido cuando se compara fracciones homogéneas. Mayor será la dificultad si son diferentes los numeradores y denominadores.

Las dificultades lingüísticas fomentan la incomprensión, por ejemplo, de la siguiente instrucción: “Dime cuál es mayor”. El alumno puede entender entre “cuál fracción tenía mayor número de partes” o “mayor en su tamaño”.

Un tercer factor de error es la “incomprensión de que el orden de las fracciones se determinan por la consideración simultánea de sus numeradores y denominadores entre sí”.

Maza asevera que el punto de vista matemático de transformar en fracciones equivalentes con el mismo denominador, es el procedimiento más fácil para determinar el orden de las fracciones.

Un dato interesante, encontrado por Hart y citado por Maza, es que el 21% de jóvenes de 15 años aciertan en encontrar una fracción entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$.

Existe una fuerte idea de que la equivalencia es una herramienta indispensable incluso para la propia ordenación de las fracciones, simplificación y operaciones. Maza señala que otros estudiosos consideran que las equivalencias se deben estudiar cuando solo la necesitan en la enseñanza de la adición y no aisladamente. Sin embargo, Maza coincide con que no se debe enseñar la equivalencia aisladamente de otros conocimientos, sino incluido en dichos conocimientos. Cree que basar el aprendizaje de la adición en la relación de equivalencia tiene limitaciones. Así mismo, el orden de las fracciones sirve para destacar sus propiedades numéricas. Sostiene que el orden de fracciones comprende “procedimientos intuitivos, incompletos y de falsas generalizaciones”.

Planteó la hipótesis de que la dificultad que tiene el alumno para entender la relación entre fracciones y números racionales (lo que implica limitaciones serias de todo el aprendizaje sobre fracciones) se debe a que "no existe un conocimiento conceptual que garantice la unificación de métodos como los basados en las fracciones equivalentes. Y el aprendizaje de las consideraciones numéricas de las fracciones presenta debilidades y numerosos obstáculos".

Por estas consideraciones previas, Maza planteó que la noción de equivalencia debe estar incluida en el estudio de la noción de orden de las fracciones, esbozó que la secuencia de enseñanza de las fracciones debe producir un aprendizaje integrado de la relación de equivalencia y de orden de las fracciones, para lograr una comprensión del carácter numérico de las mismas.

- Sistemas de representación de números racionales positivos, Un estudio con maestros en formación. Tesis Doctoral presentado por Gairín, J. (1999) en la Universidad de Zaragoza. España.

Situado en un contexto de formación de maestro de educación primaria, Gairín (1999) investigó el problema ¿de qué modo se puede modificar los conocimientos sobre los números racionales de los estudiantes para maestro? Los objetivos de la investigación que contempla la dimensión formativa fueron: primero, explorar dificultades y potencialidades que presenta el trabajo en los números racionales positivos para estudiantes de maestros de primaria, utilizando una propuesta didáctica; segundo, establecer relaciones entre los conocimientos de los futuros profesores sobre la propuesta didáctica y el desempeño de determinadas tareas como profesionales.

En la investigación se utilizaron tres variables: modelo de aprendizaje, sistemas de representación y comprensión del conocimiento matemático. Para Gairín un modelo es un facilitador de la aprehensión sensorial de hechos y relaciones matemáticas mediante la manipulación. En este estudio se propuso un modelo para dar significado a los números racionales positivos.

El estudio se sustentó en la teoría de la comprensión matemática de Hierbert y Carpenter (1992) y los registros de representación semiótica de Duval. Usa las representaciones externas para caracterizar el grado de comprensión del estudiante. Según Gairín, para un adecuado aprendizaje no solo es suficiente manipular símbolos, sino también implica interpretar situaciones matemáticas, cuantificar, visualizar, coordinar sistemas estructuralmente interesantes y, principalmente, utilizar un lenguaje especializado, símbolos, esquemas, gráficos y otros sistemas de representación.

Gairín pretendió mejorar la comprensión de los números racionales positivos coordinando los sistemas de representación denominados polinómico unitario y polinómico decimal. El manejo de estas representaciones mejorará la comprensión del objeto matemático en cuestión.

La investigación se desarrolló en dos etapas: En la primera etapa, utilizó la metodología de la Investigación-acción. Esta le permitió reflexionar sobre la práctica educativa y mejorar la comprensión del número racional a través de una indagación introspectiva colectiva. En la segunda etapa, la metodología de la entrevista semiestructurada tuvo la finalidad de determinar la utilidad de la propuesta de enseñanza sobre expresiones fraccionarias y decimales. Estas entrevistas permitieron analizar cómo los futuros profesores resuelven trabajos profesionales de detección de errores y concepciones inadecuadas.

Como resultado se encontró que cuanto más débil es la comprensión del modelo, por parte de los docentes, más deficiencias se detectan en los errores cometidos por ellos. En tanto el docente tenga una sólida comprensión, mayor serán las explicaciones que pueda brindar a los escolares sobre el origen de los errores.

Los resultados confirmaron las hipótesis. La viabilidad de la propuesta didáctica incrementó las conexiones entre las notaciones fraccionarias y decimales de los números racionales positivos. En el proceso se ha observado que los docentes en formación son resistentes al tratamiento por que ellos están habituados a la aplicación de técnicas de cálculo antes que a la evaluación semántica de las expresiones matemáticas que manipula. De la misma forma, respecto a la segunda hipótesis, se confirmó la relación entre los conocimientos matemáticos que poseen los futuros maestros y su actuación profesional, en el sentido de que a un mayor y mejor dominio conceptual le corresponde una mayor competencia en determinadas tareas profesionales. Lo que significa que si los futuros profesores no tienen una buena comprensión del objeto matemático, tanto mayor será las deficiencias para detectar las dificultades que poseen los escolares.

- Procedimientos de niños de primaria en la solución de problemas de reparto. Investigación realizada por De León, H. (1998).

De León (1998) sostiene que el fracaso en el aprendizaje de las fracciones tiene su explicación en la pobreza conceptual, como consecuencia de la priorización del significado del fraccionamiento de la unidad. El objetivo del estudio fue analizar los procedimientos de los niños de primaria al resolver situaciones de reparto siguiendo los supuestos de Vergnaud, en el sentido que la fuente del saber matemático es la solución de problemas.

El estudio se fundamentó en: la teoría cognitiva desarrollada por Vergnaud (1990) al estudiar la psicogénesis de los contenidos matemáticos, la antropología de Chevallard (1991) concerniente a la transposición didáctica, la teoría sobre las situaciones didácticas de Brousseau (2004), e investigaciones centradas en construir, experimentar y analizar situaciones para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el aula.

Algunas de las interrogantes del estudio fueron: ¿Qué procedimientos usan los niños al resolver problemas de reparto?, ¿qué dificultades encuentran los niños para dar significado a las situaciones de reparto?, y ¿qué conocimientos precisos se necesitan para dar sentido a los problemas de reparto?

La muestra de 36 niños fue aleatoria, de diferentes estratos sociales, ocho por cada grado de estudios: primero, tercero, cuarto, quinto y sexto. De esta manera se intentó tener una muestra de naturaleza transversal. La recolección de datos se efectuó por medio de entrevistas de 45 minutos, las mismas fueron estructuradas según el método clínico de Piaget. Los niños fueron enfrentados a tres tipos de problemas; de reparto, de elección del pedazo resultado de un reparto y de comparación de reparto.

Las conclusiones señalan que en cada una de las situaciones se identificaron tres formas de organización de los procedimientos de solución.

a) Formas de organización de las situaciones de reparto:
   En las situaciones de reparto se pide a los niños que repartan equitativa y exhaustivamente cierta cantidad de chocolates entre determinada cantidad de niños. Se ha encontrado que niños de primero y segundo grados se caracterizan por tener dificultades en la coordinación de la exhaustividad y equitatividad, y en interpretar los resultados de las particiones desde el esquema de los números enteros, constituyéndose en un obstáculo epistemológico.
b) Formas de organización en la selección del pedazo:
   Se entiende la selección de un pedazo como resultado de un reparto previo; a partir de un reparto de chocolates ya realizado, entre cierta cantidad de niños, se pide a los alumnos que seccionen el pedazo de chocolate que le tocó a cada niño; el pedazo lo seleccionan de cuatro posibles conjuntos de reparto.
   La mayoría de niños tuvieron dificultades para resolver el problema de la selección del pedazo. Los niños de primer grado no lograron construir en el plano de la acción implícita la relación de igualdad

entre el total de enteros de un reparto y el total de pedazos del mismo.

c) Formas de organización de la situación de comparación de resultados de reparto:

En la comparación de repartos, los niños compararon los resultados de dos repartos y decidieron a cuál reparto le tocó más chocolates, o bien si les tocó lo mismo. Aquí se encontró tres formas de organización en los procedimientos: La comparación sobre la base de datos aislados de las situaciones; comparación sobre la base del establecimiento de relaciones recíprocas entre los chocolates y los niños; comparaciones a partir de resultados de reparto.

Los esquemas de los números naturales funcionan como un conocimiento que se resiste a ser rechazado y a modificarse en lo más mínimo, se constituye en un obstáculo epistemológico para el aprendizaje de las fracciones en el contexto de reparto; esta dificultad también se debe a la falta de coordinación de los esquemas con los que cuentan los niños, como a una ausencia de diferenciaciones de las relaciones que caracterizan a la situación problemática.

Se encontró que en el aprendizaje del significado de la fracción, en el contexto de reparto, al inicio, los niños ignoraron las relaciones fraccionarias; luego, incorporaron de manera implícita estas relaciones, dependiendo del uso del material concreto; finalmente, construyeron el modelo fraccional durante la solución de las situaciones problemáticas de reparto.

- Aprender a enseñar. Modos de representación y números racionales. Investigación realizada por Llinares, S. y Sánchez, V. (1997). Socializado en el *Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM),* Zamora.

Llinares y Sánchez (1997) analizaron las características de la comprensión de las fracciones y números racionales en estudiantes de formación magisterial de educación primaria. Plantearon una doble relación, primero, la forma en que comprenden una noción matemática determina el tipo de tareas y representaciones que usa en la enseñanza; y segundo, estudiar si una determinada representación puede ampliar la comprensión del conocimiento matemático.

La investigación tuvo como objetivo particular, “analizar las características de la forma de comprender los contenidos matemáticos de la Enseñanza Primaria que dichos estudiantes traían al programa de formación y cómo esas características influyen en lo que se aprende” (Llinares y Sánchez, 1997). La finalidad fue caracterizar el conocimiento pedagógico y los factores que influyen en su generación y desarrollo, contextualizado en el dominio de las fracciones y números racionales. El análisis se centra en el conocimiento que sobre las fracciones que poseen los estudiantes para profesor de primaria, con relación al uso de diferentes sistemas de representación.

La problemática se tradujo en las siguientes interrogantes: ¿Cuáles son las características de la conexión de los símbolos matemáticos para las fracciones y los referentes gráficos o concretos?, ¿qué influencia ejerce el sistema de representación utilizado en la realización de diferentes tareas con fracciones? y ¿cuál es el origen del significado de los procesos de equivalencia y orden con las fracciones?

El estudio se fundamentó en la teoría de Hiebert (1988) sobre el desarrollo de la comprensión del significado de los símbolos y procedimientos matemáticos como esquema analítico para interpretar los datos.

La investigación se realizó en un grupo de estudiantes voluntarios de la Diplomatura de Magisterio. Los datos proceden de la aplicación de cuestionarios, entrevistas estructuradas y análisis con profundidad de casos.

Los resultados de sus indagaciones referentes a las características de la comprensión de la relación de equivalencia de fracciones fueron:

- Los estudiantes tuvieron dificultades entre la conexión de los referentes concretos con los procesos de obtención de fracciones equivalentes al nivel de símbolos.
- Se encontró dificultades en relación con los modos de representación y los símbolos al nivel de procedimientos. Esta dificultad se concretiza en que los estudiantes conocían procedimientos simbólicos para encontrar una fracción equivalente ($a/b = ak/bk$), pero tenían dificultades para traducir este proceso en un "nivel concreto".
- Los hallazgos referentes a los procedimientos en el ámbito de símbolos y su influencia en la comprensión de los números racionales; el significado que se atribuye a los símbolos matemáticos, proceden en muchas ocasiones del nivel de formalización matemática y está vinculado parcialmente al aspecto simbólico y manejo sintáctico.
- Los estudiantes para profesor respecto a la flexibilidad, entendida como la habilidad para cambiar el significado asociado a los conceptos matemáticos con relación a las características de la tarea y/o el sistema de representación utilizado, presentan dificultades de comprensión porque no son compatibles: el significado dado a la fracción, las características de la representación y la tarea a realizar.
- Se observa dificultades en lo que Hierbert denominó la "traslación a la fuente del significado", cuando no se puede representar en el nivel de lo concreto lo operado en el nivel de los símbolos. Cuando no existe esta traslación a la fuente del significado se imposibilita el pensamiento recurrente.
- La formalización matemática y la falta del proceso recurrente de comprensión imposibilita una comprensión del significado concreto; no visualizando la estrecha relación entre el nivel de

formalización y los niveles interiores más intuitivos mostrando dificultades para modelar concreta y gráficamente.

- En conclusión, el proceso de “folding back” permite realizar la integración de los significados que conlleva a una comprensión cabal del objeto matemático y la posibilidad de transitar entre diversas representaciones, utilizando diferentes significados.
- La caracterización de la comprensión de los estudiantes para profesor indica que la formación inicial de los profesores debe incidir en la influencia de los símbolos sobre la comprensión, el origen del significado de las reglas, y la flexibilidad del conocimiento para lograr una comprensión del objeto matemático.
- El docente en formación necesita conocer la función que desempeñan los diferentes sistemas de representación y su uso en la enseñanza, para que los niños valoren adecuadamente la información y la idoneidad de una representación de los números racionales frente a otra.

1.2 BASE TEÓRICA

1.2.1 COGNICIÓN, APRENDIZAJE Y COMPRENSIÓN MATEMÁTICA

1.2.1.1 Comprensión en Matemática

La comprensión del conocimiento matemático viene contemplándose como un tema básico de interés y un objeto de estudio prioritario para la Educación Matemática. En las últimas décadas, la investigación sobre esta cuestión en el área se ha visto incrementada notablemente con estudios caracterizados por un elevado nivel de precisión, rigurosidad y prudencia en los problemas tratados, en los métodos empleados y en los resultados y conclusiones obtenidos. Además, la creciente especialización ha generado una considerable diversificación entre los estudios realizados, resultando difícil identificar en la actualidad, aproximaciones consolidadas bajo las que se pueda afrontar los distintos problemas derivados de la comprensión del conocimiento matemático.

La revisión que se desarrolla en este apartado se centra en una presentación de antecedentes relevantes surgidos en el área durante las últimas dos décadas, que tienen a la comprensión como principal objeto de reflexión.

a. La perspectiva representacional de la comprensión

Hiebert y Carpenter (1992) proponen un marco teórico desde el que abordar el estudio del fenómeno de la comprensión en matemáticas. Dicho marco se sustenta básicamente en el concepto de representación y proviene principalmente del modelo de procesamiento de la información desarrollado en el ámbito de la psicología cognitiva del aprendizaje.

Los supuestos importantes relacionados con la representación en matemáticas para desarrollar la idea de comprensión sobre los que se basan son:

- La comunicación del conocimiento matemático requiere representaciones externas; para pensar sobre él se necesitan unas representaciones internas con las cuales poder operar la mente.
- Las características de las representaciones externas influyen de algún modo en la naturaleza de las representaciones internas construidas por los sujetos. Las representaciones externas empleadas por los individuos revelan algo acerca de cómo representan la información internamente.
- Las representaciones internas pueden ser conectadas entre sí en la mente del sujeto. Hiebert y Carpenter reconocen la imposibilidad de especificar la naturaleza exacta de las representaciones internas y de las conexiones entre ellas (el investigador solo podrá inferir a través de las representaciones externas); proponen que supongamos que las redes de representaciones y conexiones internas sean de un modo metafórico, como estructuras jerárquicas verticales organizadas como telas de araña constituidas por nodos unidos entre sí mediante segmentos relacionales.

A partir de estos supuestos, Hiebert y Carpenter desarrollan un concepto de comprensión:

> Una idea, un procedimiento o hecho matemático es comprendido si forma parte de una red interna. Más específicamente, las matemáticas son comprendidas si su representación mental forma parte de una red de representaciones. El grado de comprensión está determinado por el número y la fuerza de las conexiones. Una idea, procedimiento o hecho matemático es comprendido a fondo si se enlaza a redes existentes con conexiones más numerosas o más fuertes (p. 67).

El desarrollo de la comprensión, en virtud del modelo representacional es el crecimiento de las redes de representaciones mentales. El crecimiento de las redes se produce por la unión de nuevas representaciones internas a la red ya existente o por la reestructuración o reorganización de esa red a causa de la creación de nuevas conexiones entre representaciones existentes.

Nakahara (1994) analiza el *Sistema Representacional* en Educación Matemática y clasifica los distintos modos de representación externa que se emplean en educación matemática en cinco categorías fundamentales de representación: Simbólica, lingüística, ilustrativa, manipulativa y realista. Sostiene que el sistema representacional (externo) con sus relaciones muestra desventajas importantes, como la ambigüedad en la conexión entre las representaciones externas y sus significados matemáticos o la limitación en el estudio del aspecto interno de los procesos de pensamiento de los sujetos.

Nakahara sostiene que es posible emplear el Sistema Representacional extendido y los análisis que de él se derivan, cuando se estudian los procesos de comprensión y resolución de problemas desde el punto de vista de las representaciones.

Para English y Halford (1995) la comprensión de una noción matemática es un proceso consistente en la elaboración de una representación que incluya las relaciones esenciales caracterizadoras de ese conocimiento. Ellos explican que:

> La esencia de comprender un concepto es poseer una representación mental o modelo mental que verdaderamente refleje la estructura de este concepto. […] comprender el número es tener un modelo mental de él que incluya todas las relaciones esenciales de los números, al menos en el dominio donde el concepto es utilizado. (p. 57).

El tipo de relaciones internas incluidas en el modelo mental de un conocimiento matemático resulta fundamental para la comprensión de ese conocimiento matemático. Para English y Halford lo esencial de los modelos mentales son precisamente las relaciones que ellos representan. Los modelos mentales se constituyen no tanto con las definiciones formales vinculadas a un tópico matemático, sino a partir de las propiedades concretas que van identificándose en el tiempo como consecuencia de las experiencias que se van teniendo con el conocimiento en cuestión. Por tanto, la experiencia posibilita el enriquecimiento y refinamiento progresivo del modelo mental original, dando lugar de este modo a un desarrollo en la comprensión.

Finalmente, Janvier (1987) enumera cuatro características de la comprensión relacionadas con la representación:

> 1. La comprensión puede ser comprobada por la realización de actos mentales definidos. Esto implica una serie de actividades complejas.
>
> 2. Presupone acciones automáticas (o automatizadas) controladas por procesos mentales de reflexión y planificación. Por lo tanto, la comprensión no puede ser identificada exclusivamente con actividades mentales reflejadas en conceptos.
>
> 3. La comprensión es un proceso en desarrollo. La construcción de un sistema ramificado de conceptos en el cerebro es lo que proporciona la comprensión. Los conceptos matemáticos no comienzan a construirse desde el momento en que son introducidos en clase por el profesor. Este principio bien conocido no se pone en práctica fácilmente ni a menudo en la enseñanza diaria.
>
> 4. Algunos investigadores intentan determinar etapas en la comprensión. Nos inclinamos a creer que la comprensión es un proceso acumulativo basado, principalmente, en la capacidad de tratar con un conjunto de representaciones siempre enriqueciéndose. La idea de etapas supone una ordenación unidimensional contraria a las observaciones (p. 67)

b. Dimensiones de la comprensión en matemáticas

La preocupación fundamental por el desarrollo de la comprensión matemática en los alumnos forma parte de un problema más amplio en el que también intervienen otras dimensiones del fenómeno. De hecho, es en el carácter multidimensional de la comprensión donde radica una de las principales causas por la que su estudio resulta una tarea altamente compleja y un condicionante para los distintos trabajos en curso.

Por lo general, las aproximaciones a la comprensión en matemáticas reconocen, al menos como referencia provisional para posicionar su estudio, algunas de las siguientes dimensiones del fenómeno: origen y fuentes; naturaleza y funcionamiento; factores; evolución; y efectos.

El *origen* hace referencia a las situaciones y circunstancias responsables de la aparición de la comprensión y las *fuentes* a los acontecimientos concretos previos generadores de tales situaciones. Por ejemplo, en términos constructivistas generales, el origen de la comprensión se sitúa en aquellas situaciones de desequilibrio cognitivo en las que se ve implicado el sujeto en su interacción con el medio. Las fuentes, por su parte, se encuentran en las experiencias generadoras de tales situaciones que obligan al individuo a elaborar respuestas adaptadas a cada situación particular (English y Halford, 1995). En este caso, la comprensión surge en este espacio de experiencias, desequilibrios cognitivos, respuestas adaptativas y búsqueda de estabilidad asociada.

Las dimensiones *naturaleza* y *funcionamiento*, estrechamente relacionadas, suponen enfrentarse a las complejas cuestiones sobre qué es y cómo se produce la comprensión. Por tratarse de un constructo que acontece en la esfera interna del individuo, y por tanto sin posibilidad de ser observado directamente, estas dimensiones suelen estudiarse al amparo de propuestas teóricas interpretativas de la relación no casual reconocida entre los estados mentales del sujeto y su comportamiento externo observable. Una de estas propuestas, ampliamente extendida, la encontramos en el enfoque representacional que desarrolla una visión de la comprensión vinculada a las representaciones y conexiones internas del conocimiento matemático (Hiebert y Carpenter, 1992; Romero, 2000; Goldin, 2002). El empleo de tipologías generales de comprensión (Hiebert y Lefevre, 1986) o de referencias metafóricas (Davis, 1992) son otras de las estrategias usuales presentes en el estudio de tales dimensiones.

Los *factores* se refieren a todos aquellos aspectos condicionantes de la comprensión. La especificidad del objeto de comprensión, las capacidades cognitivas generales del sujeto, la valoración personal que este realiza sobre el propio objeto o las características del medio donde se produce la interacción entre ambos son algunos de los factores reconocidos por los que se ve afectada la comprensión (Sierpinska, 1994; Godino, 2000).

El estudio de la *evolución* se relaciona con la faceta dinámica de la comprensión y supone reconocer que el conocimiento no se adquiere de forma inmediata e instantánea sino que se va desarrollando en el individuo a lo largo del tiempo. La comprensión, por tanto, no es un fenómeno estático, sino que emerge, se desarrolla y evoluciona (Carpenter y Lehrer, 1999). En este contexto, la teoría dinámica de Pirie-Kieren para el crecimiento de la comprensión matemática (Pirie y Kieren, 1989, 1994; Kieren, Pirie y Calvert, 1999) aparece entre las propuestas más consolidadas y con mayor influencia en el estudio de esta dimensión en educación matemática. También, los modelos jerárquicos de categorías o niveles aplicados con el propósito de capturar los procesos dinámicos de la comprensión constituyen otra de las estrategias extendidas en la investigación en torno a la evolución. Un claro ejemplo de esta última opción se tiene en el modelo de proceso de dos ejes desarrollado por Koyama (1993, 2000).

Por último, los *efectos* se asocian a los resultados o productos derivados de la presencia de una determinada comprensión en el individuo. Suelen considerarse efectos observables los comportamientos adaptados, la aplicación de conocimientos, la resolución de problemas o la descripción de acciones. Entre los efectos internos no observables cabe mencionar como ejemplo las nuevas estructuras cognitivas y semánticas resultantes de un cambio en la comprensión. Esta dimensión aparece reflejada en aproximaciones como la de Duffin y Simpon (1997, 2000) donde se describen algunos de los efectos internos y externos (por ejemplo, sentirse capaz de reconstruir lo olvidado o derivar consecuencias, respectivamente) asociados a los tres componentes de su definición de comprensión.

c. Relación con otras nociones cognitivas

La aproximación a la comprensión a través del estudio de su relación con otras nociones cognitivas de similar complejidad, constituye otra de las alternativas empleadas en la exploración de este fenómeno en educación matemática. Desde esta perspectiva, la comprensión comparte protagonismo con otros objetos de investigación de interés para el área como el significado, el aprendizaje, el pensamiento matemático o la competencia, entre otros. La propuesta, que reconoce la comprensión como necesariamente vinculada al resto de configuraciones cognitivas, define una vía de acceso complementaria que extiende la posición centrada en el análisis específico de las distintas dimensiones propias del fenómeno.

Es posible apreciar esta visión integral de la comprensión matemática en trabajos como los de Byers y Erlwanger (1985), donde se vincula con el aprendizaje y la memoria; Godino y Batanero (1994) en relación con el significado de los objetos matemáticos; o Bender (1996) cuando asume que imagen y comprensión son modos de pensamiento distintos, aunque estrechamente relacionados. Un aporte reciente en este mismo sentido proviene de Warner et al. (2003) al estudiar la contribución del pensamiento matemático flexible en el crecimiento de la comprensión.

d. Valoración y comprensión

La valoración está presente en el tratamiento de la comprensión en matemáticas. Los resultados procedentes de las distintas vías de acceso y dimensiones contempladas para su estudio encuentran en esta actividad un condicionante metodológico de primer orden. Por lo general, las aproximaciones en educación matemática suelen ser conscientes de este hecho y entre sus configuraciones y planteamientos teóricos resulta frecuente encontrar referencias y supuestos básicos compartidos en torno a la valoración, llegándose a reconocer circunstancias tales como:

- Su elevada complejidad y existencia de limitaciones inherentes a su propia naturaleza.
- La influencia de la especificidad del conocimiento matemático en la valoración.
- La adecuación de las manifestaciones observables como vía para obtener información sobre la comprensión de los alumnos.

Referentes genéricos como estos sirven de base a los diferentes enfoques para desarrollar sus propuestas de valoración en correspondencia con aquellos aspectos particulares de la comprensión que son centro de su interés, generándose por ello una variedad de posibilidades sobre los modos y términos en los que valorar la comprensión y sobre los métodos, técnicas e instrumentos a emplear. Entre las contribuciones que se vienen realizando en este sentido, resultan relevantes las propuestas que plantean valorar la comprensión en función de la representación y las conexiones internas del conocimiento matemático (Hiebert y Carpenter, 1992), teniendo en cuenta la superación de obstáculos epistemológicos (Sierpinska, 1990, 1994) o según sean las relaciones con significados institucionales preestablecidos (Godino y Batanero, 1994). Igualmente, destacan los métodos y técnicas centrados en la elaboración de perfiles de comprensión (Pirie y Kieren, 1994) así como las estrategias y procedimientos de valoración multifacética basados en el análisis del conocimiento matemático, como son los análisis semántico y estructural propuestos por Niemi (1996), el análisis de los significados praxeológicos de los objetos matemáticos derivado del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (Godino, 2002a, 2002b) o, más recientemente, el análisis fenómeno-epistemológico del conocimiento matemático desarrollado y aplicado en Gallardo y González (2006).

e. Contribuciones de las aproximaciones

Algunas consecuencias que se derivan de la teoría son:

- Las Implicaciones didácticas para la enseñanza de la matemática: Los estudios sobre comprensión suelen venir acompañados de recomendaciones, propuestas e iniciativas de distinta índole para fomentar el aprendizaje comprensivo entre los alumnos. Para poder garantizar su utilidad y efectividad en educación matemática interesa que tales enfoques manifiesten una clara potencialidad descriptiva y prescriptiva (Koyama, 1993). Este es el caso del modelo propuesto por Gallardo y González (2006), donde se facilita un procedimiento operativo para la identificación y organización de situaciones matemáticas de utilidad para la práctica docente.
- Las repercusiones sobre otros focos de estudio en educación matemática: las aproximaciones sobre comprensión aportan, además de información específica sobre su ámbito de estudio, referencias añadidas con las que mejorar la situación actual de conocimientos en torno a otras áreas de investigación, de interés para la educación matemática, organizando, interpretando, explicando, solucionando o ampliando las distintas problemáticas ya existentes. Muestras de ello son las aportaciones de la aproximación representacional a la controversia vigente sobre la enseñanza del cálculo aritmético elemental en sus distintas manifestaciones concretadas, por ejemplo, en propuestas basadas en la construcción de relaciones mediante la comparación de algoritmos alternativos como vía para favorecer la comprensión. También son destacables las consecuencias derivadas de la aplicación del modelo Pirie-Kieren en el ámbito de la formación inicial de profesores de matemáticas (Cavey y Berenson, 2005).

f. Fronteras en la investigación sobre comprensión en matemáticas

Los resultados proporcionados por las distintas investigaciones realizadas en educación matemática van configurando a lo largo del tiempo un cuerpo creciente de conocimiento contrastado y consolidado, en torno a los distintos aspectos vinculados con la comprensión en matemáticas. Este progreso contrasta, no obstante, con limitaciones importantes para las que la investigación actual aún no ha encontrado soluciones definitivas. De manera específica, las fronteras reconocidas que delimitan el estudio de la comprensión del conocimiento matemático vendrían dadas fundamentalmente por:

- Las cuestiones abiertas inherentes a cada dimensión particular del fenómeno. Este es el caso, por ejemplo, del problema de la existencia de límites en la adquisición de la comprensión o de la encapsulación de su dinamismo, presentes en el estudio de la evolución. También de la dificultad que supone lo inobservable en el análisis de la naturaleza y el funcionamiento internos.

- El problema de la interpretación de la acción del otro. El estudio de las distintas dimensiones asociadas a la comprensión se ve afectado en su conjunto por la naturaleza interpretativa de la valoración. De entrada, se acepta que el modelo básico del observador que pretende obtener información sobre la comprensión del individuo inmerso en una actividad matemática comparta la complejidad propia de las situaciones hermenéuticas condicionadas por el lenguaje (Brown, 2001).
- La controversia vigente en torno al grado de profundidad y extensión que habría de exigirse al estudio de la comprensión en matemáticas. Admitir el desarrollo de la comprensión como fin de la educación matemática genera en el ámbito de la investigación la cuestión básica de aclarar los conocimientos que resultan precisos para afrontar esta labor con garantía, cumpliendo con los intereses del área de forma consensuada con la comunidad científica.

1.2.1.2 Dificultades, Obstáculos Epistemológicos y Errores en el Aprendizaje

El concepto de obstáculo fue introducido por Bachelard en 1938, en su célebre libro *La Formación del Espíritu Científico*, en el cual explica la idea de obstáculos:

> ....hay que plantearse el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos. Y no se trata de considerar obstáculos externos, como la complejidad y la fugacidad de los fenómenos, pues es, precisamente, en el mismo acto de conocer, íntimamente, cuando surgen, como una necesidad funcional, torpezas de entendimiento y confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento e incluso de regresión, y donde descubrimos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos. (Citado por Socas, 1997, p.136)

La transferencia de este concepto en la didáctica de la matemática se debe a Brousseau quien justifica la flexibilidad de esta idea “la propia noción de obstáculos está constituyéndose y diversificándose: no es fácil decir generalidades pertinentes sobre este tema, es mucho mejor estudiar caso por caso”. Para Brousseau, los obstáculos en el sistema didáctico pueden ser de origen: ontogénico o psicogénico, didáctico y epistemológico,

La acepción que se adjudica al concepto de obstáculo epistemológico, tanto para Bachelard y Brousseau es:

> Aquel conocimiento que ha sido en general satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas, y que por esta razón se fija en la mente de los estudiantes, pero que posteriormente este conocimiento resulta inadecuado y difícil de adaptarse cuando el alumno se enfrenta con nuevos problemas (Citado por Socas, 1997, p. 137).

La historia de la matemática puede ser un auxiliar para el maestro quien debe detectar núcleos históricos de obstáculos epistemológicos en el desarrollo del *saber sabio,* evento análogo que puede reproducirse en la actividad de enseñanza aprendizaje. Socas (1997).

Según Socas (1997) las dificultades están asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas. Un aspecto relevante es que la matemática utiliza una simbología acompañada de lenguaje habitual. El lenguaje natural ayuda a interpretar los símbolos, sin embargo, en esta función del lenguaje se detecta dificultades de comprensión y comunicación de los objetos matemáticos. Una dificultad es el resultado de la diferencia de significado que se le adjudica en matemática a ciertos vocablos comunes. Palabras como, por ejemplo: matriz, raíz y quebrado; estos vocablos en matemática adquieren un significado diferente.

Otras dificultades originadas en el lenguaje son el resultado de usar vocablos que en ciertos contextos pueden ocasionar confusión (reducir la fracción), o también, palabras que tiene su origen en la matemática como ‘parámetro’ o ‘número racional’.

Algunas de estas dificultades pueden tener su explicación en el dominio del lenguaje matemático, su semiótica; en especial, su componente pragmático que se refiere al estudio del sentido que se da al discurso en función del contexto en el que se utiliza una determinada palabra.

Las dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático se manifiestan con mayor claridad cuando el estudiante se enfrenta a situaciones de pensamiento deductivo formal. La educación básica ha optado por abandonar la enseñanza de la argumentación lógica para hacer demostraciones formales; este hecho evidentemente trajo el descuido del desarrollo del pensamiento lógico.

Los errores en el aprendizaje de las matemáticas según Socas (1997) se clasifican en tres tipos: primero, errores que tienen su origen en un obstáculo; segundo, errores que tienen su origen en una ausencia de sentido o significado, estos están relacionados con las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos y a los procesos de pensamiento matemático; los errores de este tipo son de naturaleza semiótica en sus tres componentes sintáctico, semántico y pragmático y tercero, errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

1.2.2 CURRÍCULUM Y ENSEÑANZA DEL NÚMERO RACIONAL

1.2.2.1 El Número Racional en el Currículo Nacional

El sistema educativo peruano en las últimas décadas ha experimentado múltiples reformas; concretamente, el Programa Curricular del Área de Matemática se ha modificado varias veces en los últimos treinta años. En este numeral se presenta una breve descripción histórica de los cambios en los planes de estudio de acuerdo a los documentos oficiales del Ministerio de Educación (M. E.).

En la Tabla 1.1 se enumera los diferentes dispositivos curriculares que normaron el programa curricular del nivel de educación secundaria, específicamente el curso o área de matemática del primero y, en ocasiones, del segundo grado. Se detalla los contenidos específicos del tema *Los Números Racionales;* además, se describe las capacidades, objetivos y pautas metodológicas que proponen estos documentos, en los casos en que se pudo encontrar dicha información.

Tabla 1.1

Diseños y Programas Curriculares del Contenido "Números Racionales" Perú 1982-2008

Grado	**Dispositivo Legal**	**Contenidos Específicos**	**Capacidades, objetivos/ Pautas Metodológicas**
1 Primero y segundo	R.M. 0440-2008-ED Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular.	**Primero:** Representación, orden y operaciones con números racionales. Operaciones con fracciones y decimales. **Segundo:** Representación, orden, densidad y operaciones con números racionales.	**Primero:** Compara y ordena números racionales. Interpreta el significado del número racional en diversas situaciones y contextos. Matematiza situaciones de contexto real, utilizando los números racionales y sus propiedades. Resuelve problemas que implican cálculos en expresiones numéricas con números racionales. **Segundo:** Compara y ordena números racionales. Interpreta significados de números racionales en diversas situaciones y contextos.
2 Primero	R.M. Nº 0667-2005 Diseño Curricular nacional de la Educación Básica Regular. Proceso de Articulación.	Números racionales Igualdad. Adición. Opuesto de un número racional. Valor absoluto. La propiedad de densidad. Multiplicación. Propiedades. Inverso de un número racional no nulo. La propiedad distributiva. Sustracción y división. Propiedades. Potencia con exponente entero. Expresión decimal de un número racional. Expresión decimal periódica y números racionales. Generatriz de una expresión decimal periódica.	**El Área de matemática desarrolla las siguientes capacidades de área:** Razonamiento y Demostración. Comunicación matemática. Resolución de problema.
3 Primero	R. M. Nº 019-2004. Programa Estratégico Nacional de Desarrollo Curricular. Diseño Curricular Básico	Números racionales Igualdad Adición. Opuesto de un número racional. Valor absoluto. La propiedad de densidad. Multiplicación. Propiedades. Inverso de un número racional. La propiedad distributiva. Sustracción y división. Propiedades. Potencia con exponente entero. Expresión decimal de un número racional. Expresión decimal periódica y números racionales. Generatriz de una expresión decimal periódica.	**El Área de matemática, prioriza el desarrollo de tres capacidades**: Razonamiento y demostración. Interpretación de gráficos y/o expresiones simbólicas, y Resolución de problemas.
4 Primero	Reconocido por el MED-2002 Diseño Curricular Básico de Educación Secundaria de Menores. Una Nueva Secundaria	Fracciones y decimales.	**Competencia General:** Establece conexiones entre los conceptos, hace uso de destrezas, algoritmos, estrategias heurísticas, procesos de modelación, y muestra capacidad innovadora, interés, confianza, perseverancia y flexibilidad al resolver situaciones problemáticas. Utiliza el lenguaje matemático para interpretar, argumentar y comunicar información de forma pertinente; lo valora y demuestra orden y precisión.

			Procesos característicos (Capacidades) Resolución de problemas Razonamiento y demostración Interpretación y comunicación. Manejo de algoritmos.
5 Primero y Segundo	Reconocido por el MED-2001 Diseño Curricular Básico de Educación Secundaria de Menores (Adolescentes) Propuesta curricular experimental.	**Primer grado**: Fracciones y decimales: Operaciones y propiedades. **Segundo grado**: Números racionales: Operaciones y propiedades**.**	**Competencia**: Interpreta, formula y resuelve problemas de la vida cotidiana utilizando técnicas y fórmulas al aplicar métodos apropiados que involucran datos y contraejemplos, utilizando números, funciones, geometría, medida y estadística, desarrollando comunicación, razonamiento y conexiones matemáticas y manifestando confianza, flexibilidad y perseverancia. **Se evalúa los siguientes criterios**: Formulación y resolución de problemas. Razonamiento y demostración. Interpretación y comunicación. Aplicación de algoritmos.
6 Primero	Resolución Ministerial Nº 0178-1993-ED. Programa Curricular del Primer Grado de Educación Secundaria de Menores.	Extensión de los números enteros a los racionales. Fracción, Conjunto Q de los números racionales y recta numérica. Comparación en Q. Operaciones de adición y sustracción de fracciones. Número mixto. Operaciones de multiplicación y división de fracciones. Representación decimal de un número racional. Números decimales exactos y periódicos. Comparación. Operaciones con expresiones decimales. Generatriz de un número decimal, Cálculo. Potenciación con base fraccionaria o decimal y exponente entero. Radicación en Q. Raíz cuadrada.	**Objetivos:** Identificar números racionales y resolver problemas reales aplicando las propiedades y técnicas operativas propias del conjunto de los números racionales.
7 Primero	Aprobado por el MED-1989. Programa de Matemática para el Primer Grado de Secundaria	Ampliación de Z. El conjunto Q de los números racionales. La recta numérica y los números racionales. Representación de los números racionales mediante fracciones: Comparación: Equivalencia, relación mayor, menor. Operaciones: Adición, sustracción, multiplicación, división. Potencia con exponentes enteros. Propiedades. Representación decimal de los números racionales. Decimales: Exactos-periódicos. Generatriz. Aproximación. Comparación de decimales. Operaciones con expresiones decimales: Adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación. Radicación en Q. Concepto. Raíz cuadra.	

8 Segundo	R.M. 0043-82-ED. Programa Curricular de Matemática	**Ejemplos de Actividades de Aprendizaje:** Identifican el número racional como el cociente de un entero entre un entero positivo. Identifican el conjunto de racionales positivos Q^+, racionales negativos Q^- y el racional Q. Utilizan la recta numérica. Reconocen la escritura decimal de números racionales. Hallan la generatriz de números decimales finitos o periódicos. Reconocen que existen decimales que no es posible expresarlo como fracciones: Números irracionales. Adquieren la noción de número real. Comparan los números racionales en sus expresiones fraccionaria y decimal: “igual a”, “menor que” y “mayor que”. Adición y sustracción. Multiplicación y división. Potenciación de racionales con base fraccionaria y decimal y exponente entero. **Recomendaciones metodológicas**: Se recomienda que los alumnos comprendan el significado del ordenamiento de números racionales sea a través de la observación de gráficos.	Realizar operaciones de adición, multiplicación, división, potenciación y radicación en el conjunto Q de números racionales. Realiza operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación en el conjunto Q de números racionales. **Observaciones:** En este periodo en primer grado se desarrolla los contenidos; regla de tres simple y media aritmética simple. El objetivo es Aplicar los conocimientos matemáticos en la resolución de problemas sobre regla de tres y media aritmética simple. Para el estudio de estos contenidos es necesario tener conocimientos sobre los números fraccionarios, sin embargo estos recién son estudiados en segundo grado. Las recomendaciones metodológicas priorizan el aspecto procedimental: “*El procedimiento es sencillo: Basta para cada caso, plantear la ecuación correspondiente y ...resolver*”, es decir sugiere hacer una aplicación algorítmica de las ecuaciones.

Elaborado por el investigador.

Como vemos, las últimas propuestas curriculares parten de la concepción de educación como un proceso sociocultural permanente y sistemático, dirigido al perfeccionamiento y realización del ser humano, buscando que en el proceso educativo se logre aprendizajes que desarrollen capacidades y actitudes. En este marco se plantea la competencia: “Interpreta, formula y resuelve problemas de la vida cotidiana utilizando técnicas y fórmulas al aplicar métodos apropiados que involucran datos y contraejemplos utilizando números racionales, desarrollando comunicación, razonamiento y conexiones matemáticas y manifestando confianza, flexibilidad y perseverancia”. (M. E. Diseño Curricular, 2001, p. 57). En las Orientaciones Metodológicas se destaca la importancia de la matemática, no por la naturaleza de los objetos con los que se trabaja, sino las relaciones que puedan establecerse con dichos objetos. Enfatiza que el aprender matemática significa entender y usar la matemática a través de la resolución de problemas; el hecho que un estudiante pueda memorizar fórmulas y aplicar algoritmos y técnicas de resolución de problemas y proporcionar respuestas correctas no implica comprensión matemática.

La matemática es una obra humana en permanente construcción, como resultado de un proceso histórico-cultural en el que los aspectos formales y deductivos corresponden a una faceta de ella. El aprendizaje de la matemática debe contribuir a la formación integral del educando desde las perspectivas cognitiva, instrumental, estética, lúdica, ética, cultural y principalmente comunicacional. La comunicación ayuda a los modos de argumentación, las distintas formas de expresión matemática –numérica, gráfica, geométrica, lógica, algebraica y probabilística-, ganando así el educando en precisión y rigor; se explica que el lenguaje matemático ayuda a los estudiantes a desarrollar sus habilidades para formular, argumentar convincentemente, interpretar y representar ideas matemáticas en forma verbal, gráfica o simbólica (M. E. Diseño Curricular, 2001).

El tratamiento de los números requiere una comprensión y tratamiento más amplio, que no puede limitarse únicamente **al dominio de las operaciones básicas y las destrezas operatorias con expresiones algebraicas**. Actualmente, los educandos tienen que tener la capacidad de interpretar los números, razonar con conjuntos de variables interrelacionadas, y crear e interpretar de manera crítica métodos para modelizar los fenómenos. Será necesario desarrollar capacidades para identificar relaciones críticas en situaciones nuevas y expresarlas en una forma simbólica y eficaz. Las habilidades requeridas para describir e interpretar información cuantitativa estructurada, sacar inferencias y probar la plausibilidad de las conclusiones, se encuentran principalmente en la comprensión de las propiedades fundamentales de los sistemas numéricos y en la vinculación entre estos sistemas matemáticos y la vida real, así como en la generalización del razonamiento aritmético al álgebra. (M. E. Diseño Curricular Básico 2002)

1.2.2.2 El Número Racional en los Estándares Curriculares

Los *Principios y Estándares para la Educación Matemática,* elaborado por la Federación Norteamericana de Sociedades de Profesores de Matemática, el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM. 2000), describen lo que la enseñanza matemática debería lograr que los estudiantes conozcan y hagan. Así, respecto a la enseñanza de los números racionales para la etapa 6-8 que corresponde a la escolaridad de sexto de educación primaria, primero y segundo de secundaria del sistema educativo peruano, se propone como expectativa lo siguiente:

- Trabajar flexiblemente con fracciones, decimales y porcentajes para resolver problemas.
- Comparar y ordenar fracciones, decimales y porcentajes con eficacia, y encontrar su situación aproximada en la recta numérica.
- Comprender y utilizar razones y proporciones para representar relaciones cuantitativas.
- Comprender el significado y los efectos de las operaciones aritméticas con fracciones.
- Utilizar las propiedades asociativa, conmutativa de la adición y de la multiplicación.
- Utilizar la distributividad de la multiplicación respecto a la adición, para simplificar cálculos con enteros y fracciones.
- Seleccionar y aplicar los métodos y herramientas apropiadas en cada situación para calcular con fracciones.
- Desarrollar y analizar algoritmos para calcular con fracciones y desarrollar fluidez con ellos.
- Desarrollar, analizar y explicar métodos para resolver problemas relacionados con las proporciones, como usar escalas y hallar razones equivalentes. (NCTM. 2000, p. 218)

En esta etapa de la escolaridad los alumnos deben ser hábiles en el trabajo con fracciones, el trabajo de enseñanza aprendizaje debe basarse en los conocimientos previos con las fracciones y experiencias de la vida diaria. La destreza con los números racionales debe alcanzarse conjuntamente con otros contenidos del currículo. La comprensión de los números racionales pasa por la manipulación de diferentes representaciones, ya sean pictórica, gráfica en la recta numérica y simbólica, tal como lo recomienda Duval (1995). Quien a su vez establece estándares:

> Una sólida comprensión de las diferentes formas de representar las fracciones, los decimales y los porcentajes, es la esencia de la flexibilidad al trabajar con números racionales. En los niveles 3-5, los estudiantes debieron aprender a generar y reconocer formas equivalentes de fracciones, decimales y porcentajes, al menos en los casos sencillos. En los niveles medios, y con la base de estas experiencias, deberían llegar a ser diestros en el uso de las fracciones, los decimales y los porcentajes. (NCTM. 2000, p. 219)

En esta etapa de la escolaridad los estudiantes deberían de ampliar y consolidar su repertorio de significados, representaciones y usos del número racional positivo. Si bien el estudiante hasta ahora conoce los significados de la fracción como medida, cantidades, partes de un todo, localización en la recta numérica y división indicada, deberá también ser capaz de resolver problemas relativos a razones, tasas y operador. (NCTM. 2000).

1.2.2.3 Consideraciones de la Enseñanza de la Matemática

a. La educación matemática que promovemos

La percepción que transmiten la estructuración de los libros de textos es que están diseñados para el entrenamiento “training” de los algoritmos, generalidades, principios y definiciones presentados por el instructor; y para que los alumnos estén técnicamente diestros en el manejo de los conocimientos objetivados y externos al sujeto que alcancen el *“competent* *performance”*. Esta forma de presentar los contenidos matemáticos no es aprendida en forma comprensiva. Este enfoque excluye la posibilidad de generar comprensión, porque, el acceso al conocimiento, o a los dominios de consenso se logra a través de experiencias artificiales subjetivas (Arcavi, 1995).

Los problemas y ejercicios que se plantean, en los libros de texto, a los alumnos tienen la finalidad de afianzar la memorización del contenido a través de la reiteración; lo que se debe hacer es que se planteen problemas que, para su solución, no se utilice las técnicas aprendidas anteriormente sino que el alumno se sienta conducido a utilizar su comprensión de los conceptos y establezca conexiones con otros conceptos conocidos (Arcavi, 1995). La solución de un problema o ejercicio solo conduce a la aplicación de un algoritmo conocido, son el resultado de una operación, y lo recomendable es que el alumno tenga que argumentar, establecer conexiones entre los conceptos.

b. Los saberes escolarizados y su preparación didáctica

Para Chevallard, los saberes escolarizables como resultado de la transposición didáctica cumplen con los requisitos de desincretización, despersonalización, la programabilidad de la adquisición, la publicidad del saber y el control social de los aprendizajes. Estos requisitos se ven realizados a través de la preparación didáctica que denomina la puesta en texto del saber. En este texto quedan explicitadas las nociones matemáticas, y la existencia real, por ser necesaria, para la construcción del texto, pero no es su objetivo las nociones paramatemáticas. En tanto queda de forma implícita las nociones protomatemáticas.

La textualización del saber trae consigo la delimitación de saberes parciales, los agentes de la transposición usualmente son conscientes del carácter delimitado de los saberes parciales independizados. En el proceso de textualización de las nociones matemáticas, se manifiesta las nociones protomatemáticas a través de los prerrequisitos, en tanto no son reconocidos como tales. La delimitación de las nociones matemáticas produce su descontextualización, su desubicación contextual que le otorga sentido completo; se produce la ruptura del juego intersectorial constitutiva del saber en su movimiento de creación y de realización, como lo enfatiza Chevallard. Así mismo, la textualización del saber produce la despersonalización como la disociación entre el pensamiento y sus producciones discursivas. Además, la puesta en texto de los saberes posibilita la objetivación, es decir, la publicidad de las nociones matemáticas. Esta a la vez posibilitará el control social de los aprendizajes. Finalmente, el texto es una norma de progresión en el conocimiento en el que se programa la adquisición del saber. Esta programabilidad se manifiesta en la secuenciación de razonamientos y nociones textualizados y se pretende que el aprendizaje sea isomorfo a la estructura del texto, hecho que no es así en la realidad.

1.2.2.4 Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil

En la Evaluación Nacional de Rendimiento Estudiantil 2004, se exigió como nivel suficiente a los estudiantes del tercer grado lo siguiente:

> Los estudiantes ubicados en este nivel resuelven situaciones problemáticas rutinarias y no rutinarias que demandan elaborar una secuencia de hasta tres operaciones aritméticas o utilizar la proporcionalidad directa con números racionales en su representación decimal.
>
> Estos estudiantes manejan adecuadamente las operaciones combinadas con números enteros respetando el orden jerárquico de dichas operaciones y se están iniciando en la comprensión de los números racionales. Unidad de Medición de la Calidad Secundaria del Ministerio de Educación (UMC. 2004, p. 52).

La evaluación reveló que los estudiantes presentan limitaciones en el cálculo de operaciones aritméticas combinadas con números naturales, enteros y racionales.

Las sugerencias metodológicas de la Unidad de Medición de la Calidad del Ministerio de Educación respecto a los números naturales es que, se debe trabajar “en primer lugar, con los racionales positivos, reforzando la equivalencia de las distintas representaciones: como fracción, como número decimal, como gráfico, o como porcentaje” (p. 92).

La UMC recomienda que a través de situaciones intra y extra matemáticas se debe hacer hincapié en situaciones problemáticas, en las propiedades de orden, densidad y relaciones de equivalencia. Además, la UMC recomienda desarrollar los siguientes significados: la fracción en sí como parte-todo, como cociente entre dos números (como una división indicada), como razón y finalmente, como operador (p. 92).

Asimismo, recomienda el uso de las representaciones gráficas con el objetivo de promover comprensión significativa de la noción y evitar el entrenamiento o aprendizaje memorístico**.**

1.2.3 FENOMENOLOGÍA E HISTORIA DEL NÚMERO RACIONAL

En este apartado presentamos información referente a la fenomenología del conocimiento matemático, en general; y del número racional, en particular. Se revisa la metodología y teorías desarrollados por Freudenthal (1993), Puig (1997), y Gallardo y Gonzales (2006). En una segunda parte, se revisa el conocimiento académico o saber sabio, Chevallard (1991), del número racional; también, se hace una revisión del desarrollo histórico con la finalidad de comprender la fenomenología histórica que se adjudica a las fracciones.

1.2.3.1 Análisis Fenomenológico del Conocimiento Matemático

En este apartado se reseña la teoría sobre la fenomenología del conocimiento matemático desarrollado por Hans Freudenthal y su método. Asimismo, revisamos la perspectiva del análisis fenomenológico desde la visión de Luis Puig, además de discutir la naturaleza de la matemática como constitución de objetos mentales frente a la adquisición del concepto.

a. El método de Hans Freudenthal

Para Freundenthal (2001) la fenomenología es la antítesis entre el *noumenon* (contenidos o estructuras matemáticas, objeto de pensamiento) y el *phainomenon.* Es lo que se adquiere como categoría cuando tenemos experiencia de ellos. De este modo, los objetos matemáticos son *noumenon;* así por ejemplo, los números racionales pertenecen a esta categoría, pero, los significados del número racional son *phainomenon*.

Trabajar con los significados del número racional implica manejar conceptos, estructuras e ideas matemáticas; estos elementos organizan los fenómenos. Así una ilustración icónica de la fracción ½ ayuda a organizar el uso de los significados del número, en este caso como par ordenado (a, b) a, b $\in$ Z x Z- {0}, o como el fenómeno de la medida, razón, contexto de reparto y operador, del número racional se organiza mediante un par de números enteros como se aclaró más arriba. Así, Freudenthal remarca "La fenomenología de un concepto matemático, de una estructura matemática o una idea matemática significa en mi terminología, describir este *noumenon* en su relación con los *phainomena* para los cuales es el medio de organización" (p. 1).

Si se presta atención a cómo se adquiere la relación *noumenon* y *phainomenon* en un proceso de enseñanza aprendizaje entonces se estará hablando de la fenomenología didáctica de ese *noumenon,* en tanto que la fenomenología genética está interesado en la observación de las relaciones en el proceso de crecimiento cognitivo.

Según recomendaciones de Freudenthal (2001) el material necesario para una fenomenología didáctica de los números racionales será:

1) El conocimiento matemático de los números racionales.

2) Sus aplicaciones.
3) Su historia.
4) Análisis de libros de texto.
5) La experiencia de los didactas en el desarrollo de los números racionales en la mente de los estudiantes.
6) Indagaciones sobre los procesos reales de la construcción de número racional y la adquisición de conceptos matemáticos relativo al objeto en cuestión.

Para Freudenthal, la adquisición de conceptos y la constitución de objetos mentales son dos procesos distintos que tienen sus características particulares. Así, si se quiere estudiar el concepto de número racional de Bourbaki o Birkhoff y MacLane (1954), se intenta comprender qué es lo que estos autores tienen en mente cuando utilizan el concepto número racional. En comparación con el concepto de números racionales que pueda manejar un estudiante de educación primaria o una comerciante de papas, interesará averiguar sobre lo que saben acerca de los números racionales y cómo lo utilizan. En esta descripción se percibe un doble significado de la palabra ‘concepto’.

Si se desea que algún alumno de educación primaria tenga un concepto de número racional concebido, y si se enseña o se intenta enseñar el concepto de número racional como campo, se inculca este concepto, pero, es evidente que no se tendrá éxito. Por esta razón, se intentará materializar el concepto. Como señala Freudenthal deberá ser “embodied” (concretizar), es decir, “enseñar abstracciones haciéndolas concretas”, y a pesar que el enseñante realice varios “embodiments” para alcanzar el objetivo, el concepto de número racional será muy pobre.

Freudenthal propone que, para tener éxito en la enseñanza del concepto de número racional, en vez de comenzar por el concepto, será preferible buscar fenómenos que puedan compeler al estudiante a constituir el objeto mental que está siendo materializado por el concepto de número racional.

En este sentido la fenomenología didáctica tiene la tarea de organizar los fenómenos ligados, en este caso, al número racional.

El autor aclara que la constitución de los objetos mentales antecede a la adquisición de conceptos; incluso, si no se llegara a la adquisición la constitución puede ser altamente efectivo duradero y definitivo. Se debe recordar que vemos los noumenon, en primer lugar, como objetos mentales, y solo secundariamente como concepto. La aproximación al conocimiento por adquisición de conceptos se inicia con la presentación del concepto, y solo luego, las aplicaciones. En tanto que la aproximación por constitución de objetos mentales se principia por la organización de los fenómenos y en seguida se construye el objeto mental, es decir, el concepto.

b. Análisis fenomenológico en la visión de Luis Puig

Según Puig (1997), el análisis fenomenológico se ocupa de la naturaleza de los objetos matemáticos y de la práctica matemática; y, consecuentemente, de la naturaleza de la actividad para propiciar en el estudiante una genuina experiencia matemática.

La interpretación del análisis fenomenológico que realiza Puig tiene dos sentidos: primero, concierne a la naturaleza de los objetos matemáticos y de la práctica matemática promover espacios de genuina experiencia matemática para el alumno; segundo, el análisis fenomenológico debe establecer los objetivos de la educación matemática, en expresión de Freudenthal, es la constitución de objetos mentales versus la adquisición de conceptos.

El análisis fenomenológico de una estructura matemática, es describir cuáles son los fenómenos para los que es el medio de organización y establecer las relaciones entre la estructura y los fenómenos. En el análisis de los fenómenos se debe describir la totalidad de los fenómenos para los cuales es así, considerando los fenómenos para cuya organización fue creado al inicio y a qué fenómeno se extendió posteriormente. La descripción del concepto con los fenómenos debe exhibir la manera cómo actúa sobre el fenómeno como medio de organización y de qué poder nos dota sobre ellos.

A diferencia de Freudenthal, Puig sustituye el término noúmenos por ‘medio de organización’, o sea la función de los conceptos cuando se considera en su relación con los fenómenos, y entiende que fenómeno es el objeto de la experiencia matemática. Los medios de organización de los fenómenos son tomado a su vez como objeto de experiencia, este par ‘fenómeno/medios de organización’ está en permanente interacción dinámica y se dan saltos de cambio, así los medios de organización de un par pasan a ser fenómenos del siguiente. Luego, hacer fenomenología es describir una de esas series o una de sus partes.

Según Freudenthal los tipos de fenomenología son cuatro:

- Fenomenología: Se trata de los fenómenos que están organizados en las matemáticas tomadas en su estado, momento y uso actual. Aquí los conceptos o las estructuras matemáticas se tratan como productos cognitivos.
- Fenomenología didáctica: Intervienen los fenómenos del mundo de los alumnos y los que se proponen en las secuencias de enseñanza. Aquí los conceptos o estructuras matemáticas se tratan como procesos cognitivos.
- Fenomenología genética: Son los fenómenos relacionados al desarrollo cognitivo de los aprendices.
- Fenomenología histórica: Se estudia los fenómenos para cuya organización se creó el concepto y cómo se extendió a otros fenómenos.

La secuencia de los distintos tipos de análisis fenomenológico para describir una fenomenología didáctica, según Freudenthal, es la siguiente: fenomenología pura, histórica, didáctica y finalmente, fenomenología genética.

Según Puig (1997) los conceptos matemáticos son medios de organización de fenómenos del mundo. Como la tarea de la fenomenología es indagar, analizar los conceptos matemáticos y cuáles son los fenómenos que organiza; los fenómenos que consideramos en el análisis apenas si son del tipo que se trata a partir de los análisis concretos que realicemos; es decir, los fenómenos que son organizados por los conceptos matemáticos son fenómenos del mundo real, físico, cotidiano, sus propiedades, las acciones que se realiza sobre ellos y las propiedades de las acciones.

Los conceptos matemáticos no están en otro mundo, uno ideal, ni es anterior a la actividad matemática, se ubican en nuestro mundo de experiencias. Para Freudenthal, en el proceso de creación de objetos matemáticos como medio de organización, se convierten en objetos que se sitúan en el campo del fenómeno.

Así, los objetos matemáticos se incorporan al mundo de las experiencias en el que entran como fenómeno en una nueva relación fenómenos / medios de organización en la que se crean nuevos conceptos matemáticos y así este proceso se repite una y otra vez, (Puig. 1997). Este proceso iterativo de producción de objetos matemáticos se da cada vez en un nivel más abstracto. Estos conceptos matemáticos creados se ubican en el mundo de experiencias que se puede percibir a través de los sistemas de signos en que se expresan.

Puig distingue dos tipos de signos en los textos matemáticos; primero, los “artificiales” o propios de la matemática; y segundo, los signos de alguna lengua vernácula. Pero, lo importante no es esto, sino el estudio de los procesos de significación y producción de sentido. En consecuencia, postula un determinado sistema de signos, es decir, un “sistema matemático de signos”, ya que en este sistema matemático de signos muchos de ellos carecen de naturaleza lingüística. Puig no usa en su análisis la pareja ‘significante/significado’ como postula Sausssure, sino prefiere la propuesta de Eco o Barthes, por eso usa el par ‘expresión/contenido’ de un signo o una función semiótica del signo.

La interpretación del par ‘expresión/contenido’ del signo que hace Puig es coherente con la relación fenómenos / medios de organización. “El signo que tiene un componente de expresión y contenido, se sitúa en la relación de ser la expresión de un contenido al que remite o que implica” (Puig, 1997, p. 68) así por ejemplo, una expresión primigenia está compuesto de una expresión y un contenido.

Los sistemas matemáticos de signos, además de permitir organizar los fenómenos creando los conceptos, también capacitan, y permiten realizar nuevas acciones sobre los objetos matemáticos, que son acciones matemáticas no arbitrarias. Estas acciones están sugeridas por los sistemas matemáticos de signos más abstractos, es decir, estos sistemas abren nuevas perspectivas de desarrollo matemático con capacidades cada vez más superiores.

Los conceptos matemáticos se crean en el proceso ‘fenómeno/medios de organización’, y estos no son inmutables, sino que se modifican como consecuencia de su uso y de los nuevos sistemas matemáticos de signos en que se describen.

Para Freudenthal desde la perspectiva de la didáctica, el objeto de la acción educativa matemática básica es la constitución de objetos mentales; y, solo después, de manera temporal y en importancia, la adquisición de conceptos, esto como consecuencia de considerar a las personas que aprenden y usan matemática primero; y luego, la disciplina o conjunto de saberes, histórico, social y culturalmente establecidos.

Puig describe en términos semióticos las diferencias entre objeto mental y concepto, tomando como pretexto el número racional.

El conjunto de contexto en que se usa el número racional, puede ser contexto de etiqueta (página 1 de 10: 1/10), contexto de medida, contexto de comparación o de razón, contexto de reparto, contexto matemático o de operador, contexto de parte-todo. Este conjunto de contexto constituye el *campo semántico* de “número” formados por todos los significados culturalmente establecidos. El significado enciclopédico de número posibilita identificar el contexto en que se usa el número, permitiendo al receptor del mensaje adoptar la *restricción semántica* que establece el contexto y así poder interpretar el mensaje de la forma correcta. El sujeto usuario del texto no se mueve en el conjunto enciclopédico, sino tiene un *campo semántico personal*, a esto Freudenthal llama “objeto mental número”.

La riqueza fenomenológica del número se logra cuando se supera los contextos de uso mundano de los números que se ubica en los niveles más bajos y se toma en consideración otros contextos, como por ejemplo, el contexto matemático. Los objetos mentales se constituyen en cadenas fenómenos / medios de organización alcanzando niveles de desarrollo cada vez superiores.

Puig (1997) señala que los conceptos de número natural, entero y racional son distintos; además, el objeto mental número se constituye para organizar fenómenos de naturaleza diversa. El conjunto de todos los usos posibles en los diferentes contextos compone el campo semántico de número y lo que un sujeto experimenta para constituir su propio objeto mental de ‘número’. Puig sostiene que la adquisición de los conceptos de número solo se logra a través de buenos objetos mentales y de recortes de ese campo semántico, y además estos objetos metales relativos al número se siguen desarrollando permanentemente. Así, por ejemplo, el número racional no solo se usa en contextos de la vida cotidiana, percibidos por un niño, sino que también se pondrá en contacto en los siguientes niveles educativos, con otros contextos matematizados hasta llegar al concepto algebraico de número racional que se alcanza en la educación superior.

1.2.3.2 Fenomenología del número racional según Freudenthal

Según Freudenthal (2001) una fracción es una expresión o representación de un número racional. Así, varias expresiones fraccionarias ($\frac{1}{2}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{10}{20}$, $\frac{2+3}{5+5}$) representan al número racional, el objeto matemático. Cada uno de estas expresiones fraccionarias como dice Freudenthal "tiene una vida propia", las fracciones son el recurso fenomenológico del número racional.

El término fracción evoca la fractura o quebramiento que hay. También se les llama números quebrados. En tanto que el número racional evoca la razón como proporción de medidas.

Freudenthal se propone el objetivo de presentar las fracciones en su completa riqueza fenomenológica. En sus observaciones metodológicas busca prestar atención al cien por ciento de los fenómenos y organizarlos demasiado sistemáticamente corriendo el riesgo de llegar a la simplificación con el consiguiente entorpecimiento de la tarea fenomenológica.

Para Freudenthal, las fracciones en el lenguaje cotidiano se presentan como:

a. ***La fracción como fracturador***

Se entiende la acción de dividir, fracturar en forma irreversible o reversible o meramente simbólico y que la igualdad de partes como requisito sea estimada al ojo o por tacto. Dentro de la tarea de dividir en partes iguales es relevante observar la comparación entre las porciones.

b. ***Las fracciones como comparador***

Las fracciones sirven para comparar objetos que se separan uno de otro. La comparación se realiza de acuerdo con ciertos criterios directos e indirectos. Dentro de los modelos de comparación se pueden distinguir: modelo de la relación razón y modelo del operador razón.

1.2.3.3 Historia de las Fracciones

La revisión histórica sobre el origen de las fracciones explora los aportes de las culturas mesopotámica, egipcia, griega y otras quienes desarrollaron la idea de fracción unitaria, fracciones sexadecimales, y el reconocimiento de las contribuciones de otras culturas como la china e hindú, permitieron cristalizar el concepto de número racional en la modernidad.

El concepto de número natural es el más antiguo que la humanidad conoció, sus orígenes se pierden en la oscuridad de la prehistoria. Mientras que las fracciones racionales, se desarrollaron relativamente más tarde, según los vestigios históricos data de dos mil años antes de la era cristiana. Su origen no obedece a causas sociales relacionadas con los sistemas elaborados para los números enteros. Aparentemente en las sociedades primitivas no tenían necesidades de usar fracciones, (Boyer, 1996).

El concepto de fracción se ha ido desarrollando a través de la historia, de hecho ha tenido que pasar miles de años para llegar a conceptuarlo con el nivel que hoy lo conocemos. Las fracciones se llamaron en un principio “rotos” y después “quebrados”, esta última sustantivación aún hoy subsiste. Recientemente se ha añadido al denominador la terminación genérica *avos*.

a. Los babilónicos y la noción de fracción

La civilización babilónica de Mesopotamia reemplazó a las civilizaciones sumeria y acadia. Los babilonios heredaron el sistema de numeración de los sumerios y de los acadios. El sistema numérico de estos predecesores era de base 60, es decir, el sistema sexagesimal. Sin embargo, ni el sistema acadio, ni el sumerio eran posicionales; el mérito de los babilonios fue indudablemente el desarrollo del sistema numérico posicional.

Los babilónicos usaron un sistema mixto en la lectura numérica (posicional y aditivo) y en la base 60 y 10. La base 60 dificultaba la memorización de las tablas y por ello editaron gran número de estas tablas.

Los babilonios usaban un sistema de fracciones sexagesimales similar a nuestras fracciones decimales. Por ejemplo, si escribimos 0.125 entonces tenemos $^{1}/_{10}$ + $^{2}/_{100}$ + $^{5}/_{1000}$ = $^{1}/_{8}$. Análogamente, la fracción sexagesimal babilónica 0;7,30 representaba $^{7}/_{60}$ + $^{30}/_{3600}$, que en nuestra notación resulta también $^{1}/_{8}$.

Las fracciones eran utilizadas con frecuencia por los babilonios, afirmamos esto porque aparecen diversos casos de multa, expresados en fracciones en el Código de Hamurabi (1694 a.C.); como también en el estudio de la astronomía, Ptolomeo de Alejandría en el año 150 explica, en su obra “El Almagesto”, su preferencia por las fracciones sexagesimales antes que las fracciones como razón utilizadas por los griegos.

b. Las fracciones en el antiguo Egipto

Henry Rhind, ciudadano inglés, adquirió en Luxor un largo papiro de más de cinco metros de longitud, que por versiones de los vendedores había sido encontrado en una estancia cercana al Rameseum.

El papiro Rhind es uno de los documentos más antiguos sobre matemática, tiene aproximadamente 4000 años, cuyos datos parecen indicar que esta copia corresponde a los años 1585-1542 a. C. durante el Segundo Período Intermedio. En su introducción el autor Ahmes, escribe lo siguiente:

> Razonamiento exacto para averiguar las cosas y el conocimiento de todas las cosas, misterios... todos los secretos. Este libro está escrito en el año real 33, mes 4 de Akhet, Rey del Bajo Egipto, Awserre, Vida dada, a partir de una copia antigua hecha en el año del Rey del Alto Egipto, Nymatre. El escriba Ahmose escribe esta copia.

Este documento refiere la costumbre egipcia de expresar toda fracción en una suma de fracciones de numerador uno. Así, la fracción ¾ se escribía como la suma de dos fracciones de numerador uno: ½ + ¼. Los datos históricos permiten afirmar que los egipcios solo sabían operar con fracciones de numerador uno, por esa razón se reducía únicamente a este tipo de fracción.

Al contar solo con fracciones unitarias el escriba no necesitaba representar por escrito la fracción como un par de números, tal como hicieron los árabes con el 'número roto'. Para indicar que se estaba tratando de fracciones se dibujaba, en el sistema jeroglífico, el símbolo del 'rho', definido como 1/320 de heqat de grano, esto denota un significado preciso de la fracción. Bajo este símbolo se colocaba el denominador escrito del modo usual como tal cantidad numérica. Dentro de este esquema existían dos excepciones: la mitad tenía un símbolo propio, una especie de U inclinada. Algo similar sucede con el 2/3, la fracción excepcional, que mostraba o bien un símbolo de *ro* con dos palos desiguales debajo o el mismo símbolo atravesado por una U invertida con dos brazos desiguales.

c. Las fracciones en la cultura china

Según Carl B. Boyer, los chinos, mucho más antes que los griegos y romanos, ya conocían un sistema de numeración posicional, y además podían hacer cálculos con fracciones.

> No podemos considerar completa nuestra descripción del sistema de numeración chino sin hacer referencia al uso de las fracciones. Los chinos conocían bien las operaciones con fracciones ordinarias, hasta el punto que en ese contexto hallaban el mínimo común denominador de varias fracciones. Al igual que hacían en otras materias, también establecían aquí analogías con los distintos sexos, refiriéndose al numerador como “el hijo” y al denominador como “la madre”; el énfasis generalizado en toda la cultura china sobre los principios del *yin* y del *yang* (opuestos entre sí, especialmente en el sexo), hacia más fácil seguir las reglas para manipular fracciones. Boyer (1996, pp. 263 - 264).

El hecho histórico más importante de las fracciones chinas es su decimalización. Al igual que en la cultura babilónica los sistemas de medida básicamente sexagesimal produjeron un sistema de numeración posicional de base 60, de la misma manera los chinos desarrollaron “una idea directriz decimal en los pesos y medidas dio como resultado el que se impusiera el hábito decimal en el manejo de las fracciones, que puede rastrearse, según se dice, tan lejos en el tiempo como el siglo XIV a. C.” (Boyer, 1996, p. 264)

d. Las fracciones en la cultura griega

Según Boyer (1996) es probable que los griegos se nutrieran de los aportes matemáticos egipcios, los griegos adoptaron las fracciones unitarias para legarlo a los romanos. Mientras que los babilonios y egipcios incluyeron los números enteros y fraccionarios en el dominio numérico, en Grecia la palabra número se aplicaba solo a los números enteros positivos. Boyer apunta “A las fracciones no se las consideraba como entidades únicas, sino como una razón o relación entre dos números enteros” (p. 83), esta forma de concebir las fracciones es más parecida a la matemática “moderna”. Euclides escribe en los *Elementos* (V.3), “Una razón es una cierta relación con respecto al tamaño de dos magnitudes del mismo tipo” (p. 83); de acuerdo con Boyer la noción “razón” centrada en la conexión entre pares de números, tiende a poner el énfasis en los aspectos racionales o teóricos del concepto de número y no en el papel del número como herramienta para el cálculo o para la aproximación en la medida.

De acuerdo con Whitehead (1944) los griegos consideran las fracciones en su significado de razón. Así, un griego sostendría que una línea de dos metros de longitud, guarda relación a una línea de tres metros, una razón de 2 a 3; lo que actualmente diríamos que, una línea es los dos tercios de la otra en longitud, y consideraríamos a los dos tercios como un multiplicador numérico.

e. Las fracciones en el mundo árabe, el caso de Al-Kashi

Al-Kashi (ca. 1436) en Samarcanda, hizo construir Ulugh Beg un observatorio astronómico. Desde allí Al-Kashi desarrolló la matemática que escribió, tanto en árabe como en persa, mostrando exactitud en el cálculo. Fue el primero en utilizar las fracciones decimales en el cálculo de muchas cifras exactas. Pero para el cálculo sistemático de raíces continuas utilizó las fracciones sexagesimales. Se cree que adoptó los aporte de los chinos para su práctica de utilización de fracciones decimales. Al-Kashi es un personaje histórico de la matemática, muy importante en la difusión de las fracciones decimales.

f. El Liber Abaci de Leonardo de Pisa

Leonardo de Pisa (1180-1250) conocido como Fibonacci, vivió en una época de disputa entre algoritmistas y abacistas. En ese contexto escribe el *Liber Abaci* (libro del ábaco), un tratado de problemas algebraicos, en él se difunden los numerales hindú-arábigos, describe las nueve formas hindúes, junto con el signo 0 que en árabe se llama “zephirum”. Fibonacci, utiliza la barra horizontal en la notación de las fracciones, claro que esta ya se usaba en Arabia, pero solo llegó a generalizarse en el siglo XVI.

Fibonacci, en la explicación de procesos algorítmicos para la solución de problemas de transacción comercial, utilizó un complicado sistema de fracciones al calcular los cambios de moneda. El tipo de fracciones que utilizó son las fracciones comunes, sexagesimales y unitarias, pero nunca decimales. De estas tres prefería las fracciones comunes y unitarias.

g. François Viète en la Europa Occidental

François Viète (1540-1603), su aporte en aritmética se debe a la defensa del uso de las fracciones decimales en vez de las sexagesimales. En su obra *Canon-mathematicus* de 1579 señala:

> Los sexagesimales y los sesenta han de ser usados raramente o nunca en la matemática, mientras que los milésimos y los miles, los centésimos y los cientos, los décimos y los dieces, y las progresiones semejantes, ascendentes y descendentes, deben usarse frecuente y aun exclusivamente. (En Boyer 1996, p. 386).

h. Simón Stevin y la popularización de las fracciones decimales

Simón Stevin de Brujas (1585), hace una propuesta consistente a favor de las fracciones decimales, el uso de la escala de base 10 para las fracciones, lo mismo que para los enteros. Si bien las fracciones decimales tienen sus primeros vestigios en la antigua China, Arabia medieval y Europa renacentistas; Stevin, a través de su libro *De Thiende* (o "El décimo") popularizó las fracciones decimales entre la gente corriente y los matemáticos que se ocupaban de trabajos prácticos. Stevin se propuso la tarea de enseñar a todo el mundo, con detalle y de manera muy elemental, los cálculos necesarios de la vida diaria por medio de enteros sin fracciones, análogamente a la forma de medir el tiempo en minutos y segundos.

1.2.4 COMPONENTES EPISTEMOLÓGICOS DEL NÚMERO RACIONAL

En este numeral se realiza una precisión de los términos concepto, significado, signo, y una aproximación al término 'fracción', desde el lenguaje español; seguidamente, se aclara la noción del aprendizaje contextual, para luego, discutir los diferentes significados que admite el número racional, específicamente su representante, el número fraccional.

El componente epistemológico estudia la naturaleza del número racional desde la caracterización de sus significados en educación matemática y de la descripción de sus principales representaciones externas, caracterización que se sustenta en la teoría de los registros de representación semiótica de Duval. R. (1995).

1.2.4.1 Significados del Número Racional

a. Contexto y significados del número racional

Para Vergnaud (1987) el contexto es entendido como una situación problemática o un fenómeno que da sentido a un concepto. Para Vygotsky (1962) el contexto es importante en la enseñanza y el aprendizaje de cualquier contenido, y debe tenerse en cuenta la influencia del contexto. En Educación Matemática, Roth (1996) plantea tres diferentes sentidos para el término “contexto”:

Primero, los problemas de matemática poseen un texto. Se refiere a todo conocimiento adicional necesario para la comprensión del problema matemático. La interpretación del problema matemático y del texto va depender de la experiencia y conocimientos previos que tenga el individuo.

Segundo, se refiere a algunos fenómenos del mundo, que pueden ser modelados de una forma matemática particular. Cuando los estudiantes se apropian significativamente del concepto en relación con un fenómeno, este puede ser considerado el contexto que intervino en la elaboración del significado del concepto.

Tercero, el contexto está ligado a la noción de ambientes y situación. Son constituyentes del contexto las situaciones sociales, físicas, históricas, espaciales y temporales que forman la base para las actividades de aprendizaje.

En nuestro estudio adoptamos el concepto de contexto de Roth. Sobre todo se usa la palabra contexto siempre que se refiere a fenómenos, lugares físicos (ambientes), la situación problemática o situaciones diversas que incluyan prácticas matemáticas. Examinar el “contexto” es fundamental para la investigación, ya que a partir de él se plantea algunas interpretaciones del comportamiento en el aprendizaje y comprensión de los significados del número racional. El “contexto” está estrictamente relacionado con el estudio de los significados de las fracciones que se presenta en diferentes situaciones problemáticas, así se tiene los “contextos de medida”, o “contexto algorítmico cuando se entiende la fracción como operador” o “contexto de reparto o cociente” y los problemas enmarcados en el “contexto de razón”.

b. Los Significados de la Fracciones en la Educación Secundaria

Para Gairín y Sancho (2002) los números tienen una importancia social y cultural, así su inclusión en el currículo de matemáticas de la educación escolar primaria y secundaria es debido a su “interés fenomenológico y conceptual”. La construcción del concepto de número racional, cognitivamente, es un proceso largo de articulación integral de conocimientos, conceptos, nociones y significados que se enumera seguidamente:

- Dominio del sistema de números naturales.
- Comprensión del dominio integridad de los números enteros.
- Introducción de nueva especialidades simbólicas.
- Operaciones y propiedades (clase de equivalencia entre otros).
- Representaciones que hay que acomodar a una variedad de nuevos significados.
- Estudiar las relaciones entre los sistemas de representación.
- Comprender la estructura algebraica de grupo multiplicativo, lo que implica dotar de significado al inverso de un número.
- Comprender la noción topológica de densidad de los racionales.

Enunciar la definición de los números racionales como una estructura algebraica campo o cuerpo donde la fracción $a/b \in Q$ y a, b $\in$ Z, cuando $b \neq 0$; no siempre denota una comprensión integral del número racional. Si no, es necesario analizar los diferentes significados que entraña una fracción como representante del número racional.

En opinión de Gairín y Sancho el número racional tiene los significados como "parte-todo", "cociente", "medida", "razón" y "como operador". Aparentemente, el significado parte-todo está omnipresente en los demás significados. Posiblemente, por esta razón, la interpretación parte-todo se utiliza para la introducción de la noción de número fraccional en el aula. Como se constata en los textos escolares y anteriores investigaciones, el aprendizaje casi exclusivo de la interpretación parte-todo puede convertirse en un obstáculo para un posterior aprendizaje de los demás significados. Esto se producirá siempre que se priorice esta interpretación en detrimento de los demás.

c. Significados del número racional en su representación fraccional

Las diferentes investigaciones (Berh, et al., 1983; Kerslaske, 1986; Lesh, et al., 1983; Kieren, 1976 y Dienes, 1972) que cita Llinares y Sánchez (1988), concluyen que para que el niño pueda conseguir una comprensión amplia y operativa de todas las ideas relacionadas con el concepto de fracción, se debe plantear las secuencias de enseñanza, de tal forma que proporcione a los niños la adecuada experiencia con la mayoría de sus interpretaciones. Este aprendizaje se logra en largos periodos de escolaridad, así se tiene su presencia desde el segundo ciclo de educación primaria (9 años) hasta el primer grado de educación secundaria (12 años), en forma explícita como contenido a ser tratado en el aula; pero, eso no implica que luego se deje de estudiar, más aún, se sigue utilizando la noción de fracción durante la educación secundaria, en el estudio de otros contenidos.

La identificación y caracterización de los contextos que hacen significativa la noción de fracción; las interpretaciones principales de los significados del número racional que realiza Gairin y Sancho (2002); y Llinares y Sánchez (1988), en base a los trabajos de T. Kieren (1976), Behr, et al. (1983), Dickson, et al. (1984), son:

1. Significado Parte-Todo

Este significado se da cuando existe la división de una unidad en partes iguales de las que se "destacan" algunas. Las partes en que se ha dividido la unidad lo indica el denominador de la fracción, mientras que las partes que se destacan están indicadas por el numerador. La relación "parte-todo" se presenta cuando un "todo", continuo o discreto, se divide en partes "congruentes". La fracción indica la relación que existe entre un número de partes y el número total de partes; el todo recibe el nombre de unidad (Gairín y Sancho, 2002). En esta interpretación la expresión *a/b* representa la situación en que un todo o unidad se ha dividido en '*b'* partes iguales de las que se consideran '*a'* de dichas partes.

Cuando se ubica fracciones en la recta numérica a la fracción *a/b* se le asocia un punto situado sobre ella, aquí implícitamente se realiza la asociación de un punto con una fracción, donde cada segmento unidad se divide en '*b'* partes (o en un múltiplo de *b*) congruentes, de las que se toma '*a'.* También se puede considerar como un caso particular de la relación parte-todo.

2. La fracción como cociente.

El número racional como "cociente", *a/b* representa una situación de reparto, en la que se trata de conocer el tamaño de cada una de las partes que resulta de distribuir '*a'* unidades en '*b'* partes iguales. (Gairín y Sancho 2002)

Bajo esta interpretación, se asocia la fracción a la operación de dividir un número natural por otro distinto de cero (división indicada *a/b*), o bien, dividir una cantidad en un número de partes dadas en un contexto de reparto. Kieren (1980) "señala la diferencia entre la interpretación parte-todo con la de cociente; indica que, para el alumno que está aprendiendo a trabajar con fracciones, el dividir una unidad en cinco partes y tomar tres (3/5) resulta muy distinto del hecho de dividir tres unidades entre cinco personas, aunque el resultado sea el mismo”.

Las situaciones de reparto se presentan en contextos de magnitudes continuas y discretas. A diferencia de la interpretación parte-todo, los alumnos realizan de mejor manera las reparticiones en contextos discretos que en contextos continuos. Esto siempre que el numerador sea múltiplo del denominador. Caso contrario se “torna” una situación de contexto discreto en continuo.

Esta interpretación sirve para introducir los números racionales con rango de “número” y romper el concepto de que solo los naturales son números. En esta interpretación se considera que las fracciones tienen un doble aspecto; primero, se distingue la fracción como una división indicada; y segundo, como elemento de un cuerpo cociente. Se considera las fracciones como los elementos de una estructura algebraica, es decir, como elementos de un conjunto numérico $Q = \left\{ \frac{a}{b} / a \in Z, b \in Z - \{0\} \right\}$ que representa la solución de la ecuación *b . x = a.* Según Kieren (1975) “esta interpretación de las fracciones (números racionales) como elemento de un cuerpo (estructura algebraica) no está estrechamente vinculado al pensamiento natural del niño al desarrollarse de forma deductiva las operaciones y propiedades”.

3. Las fracciones en la medición

Según Bishop (1999) medir es una actividad “universal” e importante para el desarrollo de ideas matemáticas y se ocupa de comparar, ordenar y cuantificar cualidades que tienen valor e importancia. Así la medida de cantidades de magnitud es una actividad importante, tanto así que este universo originó los números racionales.

Este significado surge cuando al medir una longitud, la unidad no cabe un número entero de veces en ella, esta puede fraccionarse para obtener una medida más precisa. La necesidad de fraccionar la unidad de medida permitió la emergencia natural del significado parte-todo; la unidad de medida debía ser dividida en sub unidades de medida para garantizar la realización. Esta acepción es consecuencia de la necesidad de medir longitud, superficie, cardinalidad, peso y comunicar las medidas. La fracción *a/b* indica fraccionar la unidad de medida en *b* sub-unidades iguales y que es necesario colocar *a* sub-unidades, reiteradas veces, para completar la cantidad de magnitud del objeto a medir.

En esta situación el todo, sea continuo o discreto, se divide en partes "congruentes". La fracción indica la relación que existe entre un número de partes y el número total de partes. La relación parte-todo es intrínseca a la interpretación de la fracción como medida. De los contextos continuo y discreto de la fracción como parte-todo, la que presenta mayor dificultad es del contexto discreto, por consiguiente, "se fuerza a que el niño amplíe su esquema de la relación parte-todo"

El número racional como "medida" plantea la necesidad de medir la longitud de un segmento AB tomando como unidad de medida la longitud de un segmento CD, que no está incluido un número entero de veces en el segmento AB. En términos generales, se puede decir que la fracción como medida responde a la necesidad de medir una magnitud, tomando como unidad de medida otra magnitud de la misma naturaleza que la anterior, que no está incluido un número entero de veces en ella. El objeto a medir no siempre será una longitud, puede ser un área, el tiempo, masa, etc. (Gairín y Sancho 2002)

4. La fracción como razón

El número racional como "razón" *a*/*b* no representa la partición de ningún objeto o cantidad de magnitud, sino la relación que existe entre dos cantidades de magnitud, la comparación entre los cardinales de dos conjuntos, o la comparación entre una cantidad de magnitud y el cardinal de un conjunto. La comparación se establece entre las cantidades que expresan el numerador y el denominador y, por tanto, el orden en que se citan las magnitudes que se están comparando es esencial. La comparación entre cantidades que indica la fracción a de entenderse como el tanto por uno, es decir, como la cantidad de la magnitud a que se refiere el numerador que corresponde a cada unidad de la magnitud considerada en el denominador (Gairín y Sancho 2002).

La fracción tiene significado de razón cuando lo que se simboliza con ella es la relación entre dos cantidades o conjuntos de unidades. En esa interpretación, la noción de par ordenado de números naturales toma mucha importancia. En una razón el primer elemento, o sea, el dividendo o numerador, se llama antecedente, y al segundo elemento, divisor o denominador, se llama consecuente.

La fracción como índice comparativo entre dos cantidades de una magnitud es una relación parte-parte o todo-todo, y se denota *a/b*. En esta interpretación es importante fijarse en la bidireccionalidad de la comparación, de manera que se puede leer: A es *a/b* respecto a B o B es *b/a* con relación a A. Luego, podemos concluir que en la interpretación de la fracción como razón está implícito la relación todo-todo o parte-parte y en la frontera de la diferencia se puede comparar el todo con la parte o la parte con el todo como una razón.

5. Las fracciones como operadores

El significado de operador de la fracción permite que actúe sobre una situación, o estado inicial, para modificarla y conseguir un estado final. Por tanto, se puede interpretar a la fracción como una función de cambio. El trabajo con operadores conecta las fracciones con las propiedades algebraicas de multiplicación inversa y de identidad de elementos, y con propiedades del análisis como son los de composición de funciones. (Gairín y Sancho 2002.)

En esta interpretación la fracción actúa como un transformador, número que provoca cambios a través de una sucesión de multiplicaciones y divisiones, o a la inversa. Esta interpretación puede ser relacionada a la noción de función. Ante la siguiente situación; “En el salón A de 36 alumnos 2/3 deben ser niñas. Y si en el salón B son 42, ¿cuántas niñas hay en cada salón?” se puede interpretar como la función: $f(x) = \frac{2}{3}x$.

La fracción como porcentaje, es un caso particular de la fracción como operador, así la relación que se establece entre un número y 100 recibe el nombre particular de porcentaje. Por regla general, los porcentajes tienen asignado un aspecto de ‘operador’, es decir, al interpretar ‘el 40% de 25’ se concibe ‘actuando la fracción 40/100 sobre 25’.

1.2.4.2 Representaciones Matemáticas

En este subtítulo se reúne información sobre el concepto de representación, desde la perspectiva teórica de Raymond Duval (1995), además de la orientación sociocultural de la representación (Radford 1999). En una segunda parte revisamos los conceptos de visualización y modelo de Castro et al. (1997), la imaginación (Skemp, 1980), los símbolos (Skemp 1980, Hiebert 1988) y algunos antecedentes e investigaciones que se hallaron sobre la representación del número racional.

a. Primeras aproximaciones a los sistemas de representación

Bruner (1984) distinguió tres tipos básicos mediante los cuales el hombre representa sus modelos mentales y la realidad. Primero, el sistema enactivo como procesos sensoriales y motores de los experimentos físicos; en este sistema las demostraciones se hacen mediante predicciones y experimentos. Este tipo de representación ocurre marcadamente en los primeros años de la persona. Segundo, el sistema icónico consiste en representar cosas mediante una imagen o esquema espacial independientemente de la acción, corresponde a las experiencias visuales espaciales que incluyen las representaciones icónicas, el trazado e interpretación de gráficos y diagramas y los experimentos mentales; en este sistema se producen demostraciones visuales genéricas sobre imágenes concebidas como prototipos que no solo representan un caso particular sino todos los de la misma clase. Y tercero, la representación simbólica consiste en representar una cosa mediante un símbolo arbitrario que en su forma no guarda relación con la cosa representada, el sistema simbólico correspondiente a las descripciones de objetos y de relaciones entre objetos; en esta categoría se consideran las demostraciones euclidianas, definiciones de objetos, las deducciones de relaciones, y las demostraciones formales.

b. Raymond Duval: sistemas de registros de representación

Desde el punto de vista de la semiótica, las representaciones son signos, códigos, tablas, gráficos, algoritmos y diseños. El signo es algo que nos transmite un significado, una expresión comunicativa verbal o escrita y hasta gestual. Para la semiótica, la relación entre el signo y el significado está mediada por un concepto.

Según Duval (1993), la necesidad de representaciones simbólicas para un objeto matemático se debe a que él no tiene existencia física y no es accesible directamente por los sentidos. En la dimensión psicológica, el uso de diferentes representaciones está relacionado al funcionamiento cognitivo del pensamiento.

Las representaciones son esenciales para el desarrollo y comunicación del conocimiento matemático. Duval (1995) defiende tres nociones de representación, aunque son de la misma especie realizan funciones diferentes y son: las “representaciones mentales” tienen una función de objetivación, son internas, conscientes y ocurren en el pensamiento, por lo tanto, son imágenes mentales que consideran características figurativas o gráficas del concepto; las “representaciones computacionales” son internas y no conscientes del sujeto, funcionan en forma automática e instantánea, estos se refieren a las tareas que el sujeto realiza sin reflexionar sobre los pasos necesarios para su realización; y, las “representaciones semióticas” son las que realizan una función de objetivación y de expresión, son conscientes y relativas a un sistema particular de signos, como el lenguaje natural, lenguaje matemático o gráfico, se refieren al mundo de las estructuras físicas y los sistemas de notación. Las representaciones semióticas tienen dos aspectos: la forma (representante) y el contenido (representado); tienen doble carácter funcional; actúan como estímulo para los sentidos en los procesos de construcción de las nuevas estructuras mentales y permiten la expresión de conceptos e ideas a los sujetos que las utilizan.

Para el mismo autor, las representaciones internas y externas no pertenecen a dominios diferentes; las representaciones internas se desarrollan como una interiorización de las representaciones externas, es decir, existe una mutua interacción desarrollista: a mayor diversidad de representaciones de un mismo objeto o concepto, corresponde mayor capacidad cognitiva, a su vez, mayor capacidad de pensamiento sobre los conceptos matemáticos; y, además el sujeto usa representaciones externas para exteriorizar sus imágenes y representaciones mentales comunicándolas a los demás, es decir, las representaciones externas actúan como una suerte de radiografía de la comprensión del concepto que se sitúa en la mente del sujeto (1993).

Así mismo, sostiene que no se puede tener comprensión en matemática si no se distingue un objeto matemático de su representación (símbolos, signos, códigos,...). La confusión entre el objeto y su representación produce una pérdida de comprensión.

Duval (1993, 1995), considera que la semiosis es la producción de una representación semiótica, en tanto que la noesis implica aprehensión conceptual del objeto. La semiosis y la noesis movilizan diferentes actividades cognitivas que son analizadas en sus interacciones, la noesis es inseparable de la semiosis.

Para que ocurra la aprehensión de un objeto matemático, es necesario que la noesis (conceptualización) ocurra por medio de significantes semiosis (representación). La aprehensión conceptual de los objetos matemáticos solamente será posible con la coordinación de varios registros de representación. Esto significa que, cuanto mayor sea la movilidad entre registros de representación, diferentes del mismo objeto matemático, mayor será la posibilidad de aprehensión del objeto matemático, puesto que “la coordinación de diferentes registros de representación es una condición necesaria para la comprensión” (Duval, 1995, p. 59).

Duval (1995) indica que las actividades cognitivas ligadas a la semiosis son: la formación, tratamiento y conversión. Solo los dos primeros se consideran en la enseñanza. En el aprendizaje, el conflicto se expresa en que no se logra comprender y reconocer el mismo objeto matemático en cada uno de los diferentes sistemas semióticos de representación. Otra dificultad en la comprensión es que los alumnos no logran distinguir entre las actividades de tratamiento y conversión.

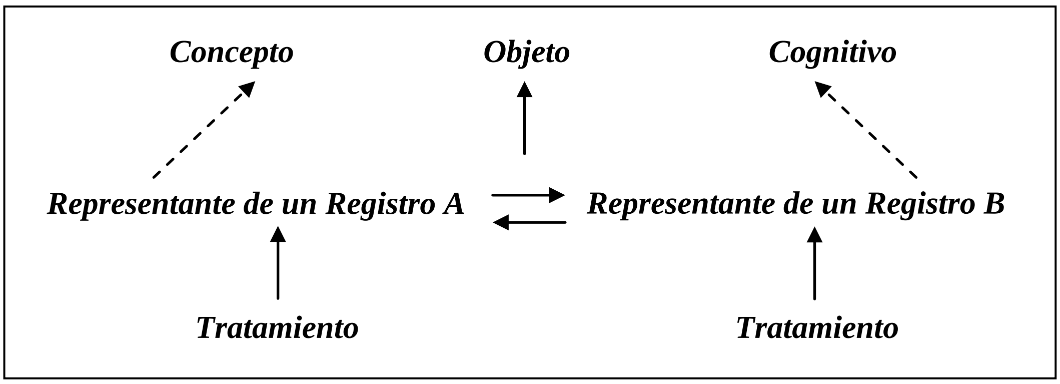
La formación de representaciones identificables como representación en un sistema dado, implica una selección de rasgos y datos en el contenido que se quiere representar. Da reglas para asegurar las condiciones de identificación y reconocimiento.

Por otra parte, considera la conversión de una representación a la transformación de una representación en otro registro, conservando la totalidad o una parte del contenido de la representación inicial. La actividad de conversión es muy importante y no es rutinaria en la actividad matemática, sino esta es cognitivamente activa, y posibilitará la diferenciación entre representante y representado. Para Duval (1993) manipular diversas representaciones de un mismo objeto matemático conlleva a beneficios de economía de tratamiento, complementariedad de registros y la conceptualización que implica la coordinación de los registros de representación.

La economía del tratamiento permite superar los límites de una representación y la eficacia en la representación de las relaciones entre objetos. Así, para ordenar fracciones de menor a mayor, enunciados como pares ordenados en la forma a/b, se puede recurrir a la 'multiplicación en cruz' o representarlos en un sistema de ejes coordenados y por simple inspección se podrá ordenarlos.

La complementariedad de registros involucra los elementos informativos o comunicacionales, que las representaciones hacen posible, por ejemplo, las ubicaciones de los racionales en la recta numérica pueden representar la relación de orden o equivalencia, pero no permiten efectuar operaciones. En tanto que, la representación simbólica permitirá hacer transformaciones y manipular ciertos algoritmos operacionales. Cada representación distinta tiene la propiedad de transmitir una característica diferente del concepto matemático. Todas estas diferentes representaciones se complementan en la tarea de estudiar un concepto matemático. Ninguna representación es capaz de agotar en su totalidad la complejidad conceptual del objeto matemático. Cada representación destaca alguna propiedad del objeto matemático y dificulta la comprensión de otra.

Respecto a la conceptualización Duval (1993) presenta un esquema del funcionamiento de la representación semiótica y la conceptualización.



Fuente: Duval, R. Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivos del pensamiento. Anales de Didáctica y de Ciencias Cognitivas, IREM de Strasbourg, n. 5, 37-65, 1993,p.51.

Figura 1.1 Funcionamiento de la representación semiótica

Este esquema explica la hipótesis de que la comprensión conceptual se produce por la coordinación de, al menos, dos registros de representación. Pero, la conceptualización está generada por las transformaciones y las conversiones de un registro de representación a otro. Insistiendo, la conceptualización es el resultado de la coordinación, de al menos, dos tipos de representación, y que estas coordinaciones deben necesariamente ser provocadas y estar en permanente alerta para distinguir entre representante y representado, además, evitar el enclaustramiento en un único registro de representación.

En 1995, Duval explica que la conversión que es tan necesaria para la conceptualización implica encarar el problema de la congruencia y no congruencia, entre las representaciones de un mismo objeto, que se originan de sistemas semióticos diferentes. La observación de las congruencias y no congruencias ayudarán a explicar los sucesos e insucesos de los alumnos frente a las cuestiones que implican un cambio de sistemas semióticos de representación.

Se encuentra que los pasos de una representación a otra son casi espontáneos cuando las representaciones con congruentes. Duval (1995) enumera tres condiciones para que dos sistemas semióticos de representación sean congruentes:

a) Debe existir una correspondencia semántica entre unidades significantes que las constituyen.
b) Deben tener el mismo orden posible de percepción o aprehensión de las unidades significantes en las dos representaciones.
c) Conversión de una unidad significante de representación de partida, a una sola unidad significante en la representación de llegada.

c. Representación simbólica en educación matemática

A continuación, se da referencia acerca de la teoría sobre las funciones de los símbolos en matemática desarrollada por Skemp (1980) y el rol de los símbolos en el desarrollo de las competencias según Hiebert (1988).

1. Símbolos visuales y símbolos verbales

Primero, estos términos necesitan aclaración, porque tan pronto como las palabras se escriben se convierten en cosas para ser vistas, no oídas; entonces, por lo “verbal” significaremos ambas palabras hablada y escrita.

Para Skemp (1980), los símbolos visuales se ejemplifican con claridad por medio de diferentes clases de diagramas (figuras geométricas). Pero, ¿en qué categoría podríamos colocar los símbolos algebraicos? Básicamente, son una taquigrafía verbal, porque pueden leerse en voz alta, o comunicarse incluso sin tomar una forma visual. Se puede decir que los símbolos algebraicos poseen muchos más símbolos verbales que diagramas o figuras geométricas, y se clasifican entre los verbales. Estos símbolos verbales y visuales se usan en matemáticas, juntos y separados.

Los símbolos visuales parecen ser los más básicos en su forma primitiva de representación de objetos reales como lo ha mostrado Piaget. Por lo tanto, las imágenes visuales son más difíciles de comunicar que las auditivas. Para las últimas, todo lo que tenemos que hacer es traducir nuestro pensamiento vocal en hablar en voz alta, en tanto que para comunicar nuestro pensamiento visual, necesitamos dibujar, pintar o filmar, entonces el pensamiento verbal tiene una ventaja sobre el visual. Sin embargo, el que una idea llegue a ser consciente está ligado estrechamente con el uso de un símbolo asociado.

Se deduce que el pensamiento verbal tiende a ser más socializado, es decir, más extensivo; es producto final no solo de nuestro pensamiento individual, sino también el de las otras personas y de la interacción del pensamiento individual y de las otras personas.

La visión es individual, mientras que el escuchar es colectivo, tanto en el nivel concreto como en el simbólico; sin embargo, cuando queremos dar énfasis individual más que colectivo, a aspectos de una serie de ideas, hablamos a cerca de “un punto de vista”.

2. Los sistemas comparados

A manera de resumir las propiedades de contraste y, a la vez, complementarias de las dos clases de símbolos, se esquematizan sus características en la Tabla 1.2:

Tabla 1.2

Propiedades de los símbolos visuales y verbal-algebraicos.

VISUAL	VERBAL - ALGEBRAICO
- Abstrae propiedades espaciales, tales como forma, posición. - Más difícil de comunicar - Puede representar pensamiento más individual. - Integrador, muestra estructura. - Simultáneo. - Intuitivo	- Abstraer propiedades que son independientes de la configuración espacial tales como número. - Más fácil de comunicar. - Pueden representar pensamiento más socializado. - Analítica, muestra detalles. - Secuencial. - Lógico

Elaborado por el investigador.

Las propiedades comunicables, socializadas del sistema verbal–algebraico han contribuido a su predominio sobre el sistema visual. Este valor del simbolismo visual se muestra, también, por el modo en que se superpone con el verbal–algebraico en forma de ordenación espacial de símbolos escritos.

3. Función de los símbolos matemáticos

Para Skemp, el símbolo es un mundo de representaciones del concepto y procedimientos matemáticos. Un sistema de símbolos matemáticos constituye un modo específico de representación, un lenguaje matemático. Estos ayudan a generar ideas y aplicarlos a situaciones, además el sistema de signos posibilita la comunicación de conceptos matemáticos y promueve el aprendizaje.

Sin embargo, se ha observado en la práctica educativa que la transferencia de los signos a los estudiantes en forma directa y automática, puede producir procedimientos mecánicos en la manipulación de los signos cuando realiza tareas específicas. Una hipótesis que necesita mayor investigación es que muchas de las dificultades en la comprensión de un concepto matemático se deben a un énfasis prematuro en el simbolismo y sus reglas descuidando la comprensión del significado matemático del referente.

Por eso, se recomienda que cuando el docente transfiera a los estudiantes nuevos símbolos matemáticos, es imprescindible que establezca conexiones entre el símbolo y el significado asociado del referente para lograr un aprendizaje comprensivo.

Skemp (1980) distingue diez funciones de la simbología: la comunicación, registro de comunicación, comunicación de nuevos conceptos, confección de clasificaciones múltiples correctas, explicación, hacer posible la actividad reflexiva, ayudar a mostrar la estructura, automatizar las manipulaciones rutinarias, recuperar información y comprensión, y hacer la actividad mental creativa

d. Teoría para desarrollar competencias con símbolos matemáticos

Hiebert (1988) desarrolla una teoría para explicar las conductas excesivamente mecánicas de los estudiantes cuando manipulan símbolos; sin embargo, su objetivo final es proporcionar una base teórica para promover programas alternativos que promuevan el desarrollo de competencias numéricas en estudiantes.

¿Qué son los símbolos? Según Hiebert, los símbolos son entidades que representan o toman el lugar de algo. Estas entidades pueden ser objetos físicos hasta marcas en el papel. Los símbolos pueden ser copiables y no copiables, los primeros pueden ser reproducidos por diferentes sujetos en diferentes ocasiones, sin perder su identidad. En cambio, los no copiables pierden su identidad cuando se producen cambios en su apariencia física, por ejemplo las pinturas. Citando a Kaput, los símbolos copiables son considerados como una clase de equivalencia, y los representantes dentro de una misma clase se pueden intercambiar; tanto que los representantes de clases diferentes no se confundan.

Muchos símbolos matemáticos representan ideas cuantitativas. Cuando los escolares usan estos símbolos con intencionalidad representan las ideas del usuario, esta parece ser una función de los símbolos copiables. Es la acepción que en esta teoría se adopta.

Para Hiebert (1988), la competencia con los símbolos se desarrolla a través de cinco procesos secuenciados, los pasos del proceso son retenidos permanentemente al avanzar a los procesos ulteriores. Los pasos son:

1. Conectar los símbolos individuales con los referentes.
2. Desarrollo de procedimientos de manipulación de símbolos.
3. Elaboración de procedimientos para los símbolos.
4. Memorización de los procedimientos para manipular los símbolos.
5. Usar los símbolos y reglas como referente para construir sistemas simbólicos más abstractos.

Los argumentos filosóficos de esta propuesta descansan en que: los símbolos son creados como representantes de los referentes, la estructura del sistema de símbolos se desarrolla, los sistemas de símbolos se separan de los referentes asociados y pueden servir en sí mismos como referentes para nuevos sistemas de símbolos

Las consideraciones psicológicas del análisis de los procesos cognitivos, empleados en la construcción de sistema de símbolos, muestran que la actuación inicial y espontánea de los niños parece ser que se ajusta a la teoría postulada, en tanto que los esfuerzos instruccionales que cambian el orden de la secuencia teórica son inefectivos y a veces contraproducentes.

1.2.4.3 Representaciones del Número Racional

Usualmente, en la enseñanza de los números racionales se tiene en cuenta las actividades cognitivas de formación y transformación, y se considera obvia la traducción entre los sistemas de representación; esto es un error, un sistema no siempre es el adecuado para representar ciertos aspectos de un concepto que solo pueden ser expresados mediante otro, a esta característica se le denomina la irreductibilidad entre sistemas de representación. Así, en la enseñanza del número racional en la educación secundaria se enfatiza en las representaciones simbólicas, en desmedro de la riqueza de otras, como las representaciones gráficas.

Se asume el supuesto que la comprensión del número racional está caracterizado por el dominio de sus sistemas de representación, y la coordinación entre ellos. Las traducciones son importantes porque permiten una economía de tratamiento, puesto que hay facetas del número racional que un determinado sistema de representación puede poner de manifiesto con más claridad que otro; además, algunas acciones ligadas al concepto pueden trabajarse con más facilidad en un sistema que otro. Así mismo, los sistemas de representación se complementan, toda representación es cognitivamente parcial en referencia a lo que ella representa, pues de un sistema a otro no son los mismos aspectos de un contenido los que se representan. La comprensión reposa sobre la necesaria coordinación de, al menos, dos sistemas de representación; esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la naturalidad de la actividad cognitiva de traducción, pero eso no quiere decir que no se produzca comprensión en un solo sistema, sino se comprende en forma aislada y parcial perjudicando los aprendizajes posteriores.

Comprender el número racional requiere un adecuado uso de sus representaciones. Será necesario no confundir el representante con el representado. Según Duval (1993, 1995) el representante y representado son importantes para comprender el objeto matemático; por ejemplo, será importante distinguir ‘1/2’ como representante canónico de una clase de equivalencia, y lo que dicho símbolo representa. Las representaciones se organizan en sistemas, así, el sistema de símbolos tiene un conjunto de relaciones semánticas, sintácticas y que adquieren utilidad en la práctica. Las representaciones: 1/2; 0.5; $5x10^{-1}$ y 50%, cada uno de ellos destaca u oscurece algunos aspectos del objeto matemático, luego no existe una representación universal. Lo que se puede observar es que algunos son más “expresivos”, más comunicativos que otros. Según Duval (1993, 1995) la comprensión, por decir del número racional, será cada vez más completa en la medida que se construyen sistemas de representación y se realizan las transformaciones al interior de los sistemas de representación y las conversiones de un sistema a otro. (Gairín y Sancho, 2002).

Los sistemas de representación simbólica y gráfica desempeñan un papel fundamental para expresar las ideas y las relaciones constitutivas (Castro, Rico y Castro, 1995). Los sistemas de representación del número racional que se utilizan en la enseñanza elemental son las notaciones simbólicas: par ordenado, número decimal, fracción decimal, o verbal, etc.; y con menor frecuencia, las representaciones gráficas (pictóricas, en la recta numérica y en sistema de ejes coordenado), a través de los cuales se organiza el pensamiento y se transmite significados, propiedades y algoritmos operacionales.

a. Representaciones simbólicas del número racional

Los sistemas de representación simbólica son las representaciones digitales y discretas. Es la utilización en forma exclusiva de un lenguaje abstracto usualmente numérico alfabético, es decir, un lenguaje aritmético y algebraico, cuya sintaxis viene descrita mediante una serie de reglas de procedimiento que destacan aspectos operacionales. Las representaciones simbólicas de los números racionales son los pares ordenados de números enteros, con la restricción que el segundo componente es diferente de cero, dispuesto en las formas: (*a*, *b*) o *a/b*, juntamente con la representación decimal. Los números racionales pueden estar representados en forma verbal y hasta algebraica conjuntista v. gr. $S = \{(a,b) / a,b \in Z \wedge b \neq 0\}$.

Los cálculos procedimentales son propios de las representaciones simbólicas algebraicas, están ligadas a la forma y no al contenido, y se rigen por un conjunto de reglas y algoritmos. En la representación simbólica fraccional es necesario distinguir la “significación operacional” o procedimiento de cálculo ligado al significante (número representado). Así, 0.5 y ½ representan el mismo número racional pero tienen significación operatoria diferente. Las representaciones simbólicas del número racional pueden ser:

Aritméticas y algebraicas

- La notación fraccional, sintácticamente se denotan así; *a/b* o $\frac{a}{b}$.
- La notación decimal, sintácticamente, cumple las normas del sistema de numeración decimal incorporando una coma decimal para separar los dígitos de la parte entera de los de la parte fraccional decimal.
- La notación como par ordenado, su sintaxis es (*a, b*) *o* (*2, 3*).
- Notación porcentual, su sintaxis es *a%* que equivale a $\frac{a}{100}$. Esta notación se evalúa semánticamente como un operador que actúa sobre un número o una cantidad de magnitud.

Representaciones Verbales

La fracción puede ser expresada verbalmente, como lectura de la representación simbólica, gráfica o enunciado de una situación fenomenológica, problema o situación de la vida real.

b. Representaciones visuales o figurativas

Su sintaxis viene dada por reglas de composición y convenios de interpretación que permite discernir propiedades de los números racionales. Dentro de las representaciones gráficas se considera las representaciones pictóricas, el modelo de la recta numérica y en el sistema de ejes ortogonales para representar el número como par ordenado.

Representaciones Pictóricas

Es un soporte visual (representación icónica, geométrica o diagramática), es decir, es un código gráfico para plantear las relaciones entre los elementos de una fracción.

Representaciones en la Recta Numérica

Es un sistema de signos, imágenes, reglas y convenios con los que se representan gráficamente los números racionales y se interpreta sus propiedades y operaciones sobre una recta numérica. En un primer nivel de análisis, se examina las imágenes específicas, convenios de carácter general y reglas para representar los números. En un segundo nivel de análisis, se considera la recta numérica como un dominio de estudio de las propiedades de orden y densidad de los números racionales.

En la recta numérica, la fracción como representante de un número racional se asocia a un punto en la recta. Es decir, no se asocia a una parte o subconjunto de objetos. Si bien se usa el concepto de parte-todo para ubicar el punto, no se debe entender como el significado en cuestión. Esta representación tiene la ventaja de conducir al estudiante a entender que las fracciones no solo se ubican entre cero y uno, sino que también, pueden existir más allá del uno, como es el caso de las fracciones impropias y las representaciones mixtas. Esta representación será vital para entender el significado de medida, pues, tendremos que utilizar la representación en la recta numérica como recurso didáctico para estudiar las unidades y sub-unidades de medidas de longitud. Además, logra que el estudiante comprenda que al igual que los números naturales, los racionales pueden ser parte de la "recta numérica" reclamando su categoría de "número".

Whitehead (1944) representa las fracciones considerando la serie de números enteros en la recta numérica conformando los "números reales", estos números se presentan en una recta por medio de puntos sobre la línea que principia en 0 y se prolonga indefinidamente en la dirección 0X como se muestra en la Figura 1.2.

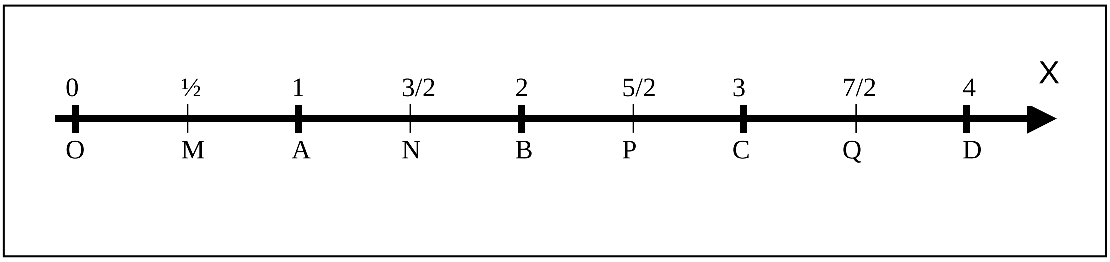


Figura 1.2. Los números racionales en la recta numérica.

Donde OA representa la unidad longitud que se transporta a lo largo de la línea AB, BC, CD.

Entre O y A se representa las fracciones propias y las inconmensurables menores de 1; y el punto medio de OA representa ½; en tanto que las fracciones impropias se sitúan a través de los puntos AX.

Esta representación transmite la idea de orden de los números, creciente de magnitud, comenzando en cero y aumentando continuamente a medida que se avanza hacia X. Además, se entiende que la serie de fracciones es una serie compacta (propiedad de la densidad de los números racionales), ya que ninguna fracción tiene predecesor o sucesor inmediato; sea el caso de dos fracciones p y q donde $p < q$, entonces, siempre es posible encontrar una fracción con valor intermedio, basta sumar esa dos fracciones y dividir entre dos y así iterar el proceso indefinidamente. Luego la serie de cifras quebradas, es una serie "compacta".

1.2.4.4 Conocimiento Académico del Número Racional

En este apartado hacemos una revisión de libros de álgebra, álgebra moderna, álgebra abstracta y otros, con la finalidad de hacer una indagación del concepto de 'números racionales' desde el saber académico.

a. Introducción de los números racionales

El conjunto de los números enteros surgen de la necesidad de dar solución a la ecuación, $b + x = a$, cuando a es menor que b; de la misma manera, se determina el conjunto de los números racionales de la necesidad de encontrar solución a la ecuación $b\,x = a$, cuando a y b son enteros con $b \neq 0$. A estos los llamaremos "números racionales" ya que se escribe como "razón". (Burton, 1969)

b. Los números racionales como campo

Los números enteros solos no forman un campo; la construcción de los números racionales a partir de los enteros es esencialmente la construcción de un campo que contenga a los enteros. Naturalmente, este campo deberá, además, contener las soluciones a todas las ecuaciones del tipo $b\,x = a$ con coeficiente enteros a y $b \neq 0$. Este conjunto que satisfaga estas necesidades se consigue, introduciendo "*ciertos símbolos*" nuevos $r = (a, b)$, a los que se llamará *pares*, estos pares se pueden sumar multiplicar e igualar exactamente como los cocientes a/b en un campo. (Birkhoff y MaClane, 1954).

Teorema: El conjunto ***Q*** de números racionales está constituido por todos los pares (a, b) de enteros a y $b \neq 0$. (p. 48)

Teorema: El conjunto ***Q*** de números racionales r, construido por pares de enteros, es un dominio de integridad en el que cada ecuación $r\,x = 1$ con $r \neq 0$ tiene una solución x en ***Q***. (p. 49)

Para Herstein (1974) el conjunto de los números racionales es "el campo ***Q*** de los números racionales que consiste de todas las fracciones formadas con enteros; es decir, todos los cocientes m/n, donde $m, n \neq 0$ están en Z". (p. 171). Además, "Sea D un dominio integral y $S = \{(a,b) / a,b \in D, b \neq 0\}$; de manera que S es el subconjunto de D x D –el producto cartesiano de D consigo mismo- en el que no se permite que la segunda componente sea cero". (p. 171).

El cuerpo de los racionales para Rojo **(**1986) se define así:

Consideramos: $ZxZ^* = \{(a,b) / a \in Z \wedge b \in Z^*\}$ donde $Z^* = Z - \{0\}$ el conjunto de los enteros no nulos.

En $Z \times Z^*$ definimos la siguiente relación:

$(a, b) \sim (a', b') \Leftrightarrow a\,b' = b\,a'$

Esta relación es de equivalencia y verifica las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad.

Por el teorema fundamental de las relaciones de equivalencia existe una partición de Z x Z^* en clases de equivalencia, cada una de las cuales se llama número racional.

La clase de equivalencia de un elemento genérico (*a, b*) es

$K_{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathrm{Z} \times \mathrm{Z}^* / (x,y) \sim (a,b)\}$

Se tiene $(x,y) \sim (a,b) \Rightarrow bx = ay$

En particular

$K_{(1,2)} = \{(x,y) \in \mathrm{Z} \times \mathrm{Z}^* / \mathrm{y} = 2\mathrm{x}\} = \{(x,2x) / x \in Z^*\}$

donde x puede tomar todos los valores enteros no nulos, y resulta

$K_{(1,2)} = \{\ldots, (-2,-4), (-1,-2), (1,2), (2,4), (3,6), \ldots\ldots\}$

Es claro que, dado un elemento de ZxZ^* , sus equivalentes se obtienen multiplicando ambas componentes por todos los enteros distintos de cero.

Definición: Número racional es toda clase determinada por la relación de equivalencia definida en ZxZ^*.

Conjunto de los números racionales es el cociente de ZxZ^* por la relación de equivalencia: $Q = \frac{\mathrm{ZxZ}^*}{\sim}$.

Para denotar los números racionales, es decir, las clases $K_{(p,\ q)}$ de acuerdo con la definición del conjunto de índices, se escribe $\frac{p}{q}$. Rojo, A. **(**1986, p. 295)

1.3 DEFINICIÓN DE TÉRMINOS BÁSICOS UTILIZADOS

a. Comprensión matemática

Es un proceso de crecimiento permanente, dinámico, estratificado no lineal en interminable proceso de organización y reorganización. Es la construcción de esquemas iterativos, mediante la abstracción reflexiva. El sujeto cognoscente reconstruye y reorganiza las acciones físicas y mentales en la esfera del pensamiento.

La comprensión de cualquier conocimiento matemático, en general, y en particular, de los números racionales que se definen como un proceso cognitivo recursivo, y esta recursividad parece ocurrir cuando el pensamiento cambia los niveles de sofisticación.

La comprensión es interpretada en términos de representaciones internas y de relaciones entre ellas en la mente del sujeto. Se suele reconocer un vínculo especular entre las representaciones internas y externas. Existe comprensión matemática si su representación mental forma parte de una red de representaciones. El grado de comprensión está determinado por el número y la fuerza de las conexiones. Una idea, procedimiento o hecho matemático es comprendido a fondo si se enlaza a redes existentes con conexiones más numerosas o más fuertes" (Hiebert y Carpenter, 1992).

b. Significados

Adjetivo que denota lo conocido, parte fundamental, junto al significante del concepto de signo lingüístico. Designa la idea de representación mental de lo nombrado, es decir, lo que se significa de algún modo.

c. Significados del número racional:

Si se entiende el contexto como una situación problemática o un fenómeno que da sentido a un concepto y que está ligado a la noción de ambiente y situación, entonces, a partir de estas consideraciones se plantea algunas interpretaciones del comportamiento en el aprendizaje y comprensión de los significados del número racional. El contexto está estrictamente relacionado con la comprensión de los significados de las fracciones que se presentan en diferentes situaciones problemáticas, así se tiene los "contextos de medida", "contexto algorítmico cuando se entiende la fracción como operador", "contexto de reparto o cociente" o "contexto de razón".

d. El número racional como "parte-todo"

Este significado se da cuando existe la división de una unidad en partes iguales de las que se "destacan" algunas. Las partes en que se ha dividido la unidad son representadas por el denominador de la fracción, mientras que las partes que se destacan están indicadas por el numerador. La relación "parte-todo" se presenta cuando un "todo" (continuo o discreto) que se divide en partes "congruentes" (equivalentes como cantidad de superficie o cantidad de "objetos"). La fracción indica la relación que existe entre un número de partes y el número total de partes (que puede estar formado por varios "todos"). El todo recibe el nombre de unidad.

e. El número racional como "cociente"

En este caso, la fracción *a/b* representa una situación de reparto, en la que se trata de conocer el tamaño de cada una de las partes que resulta de distribuir *a* unidades en *b* partes iguales.

f. El número racional como "medida"

En este constructo se plantea la necesidad de medir la longitud de un determinado segmento, tomando como unidad de medida la longitud de un segmento patrón, que no está incluido un número entero de veces en el segmento objeto de medida.

En términos generales, se puede decir que la fracción como medida responde a la necesidad de medir una magnitud, tomando como unidad de medida otra magnitud de la misma naturaleza que la anterior que no está incluida un número entero de veces en ella. El objeto a medir no siempre será una longitud, puede ser un área, periodo de tiempo, masa, etc.

g. El número racional como "razón"

En este constructo *a/b* no representa la partición de ningún objeto o cantidad de magnitud, sino la relación que existe entre dos cantidades de magnitud, la comparación entre los cardinales de dos conjuntos, o la comparación entre una cantidad de magnitud y el cardinal de un conjunto. La comparación se establece entre las cantidades que expresan el numerador y el denominador y, por tanto, el orden en que se citan las magnitudes que se están comparando es esencial. La comparación entre cantidades que indica la fracción a de entenderse como el tanto por uno, es decir, como la cantidad de la magnitud a que se refiere el numerador que corresponde a cada unidad de la magnitud considerada en el denominador

h. El número racional como "operador"

En este constructo se parte de un número o figura dada y mediante la realización de operaciones se transforma en un segundo número o figura. Por tanto, se puede interpretar a la fracción como una función de cambio. El trabajo con operadores conecta las fracciones con las propiedades algebraicas de multiplicación inversa y de identidad de elementos, y con propiedades del análisis como la composición de funciones.

i. Representación matemática

Las representaciones son signos, códigos, tablas, gráficos, algoritmos y diseños. El signo es algo que nos transmite un significado, una expresión comunicativa verbal o escrita y hasta gestual. Para la semiótica, la relación entre el signo y el significado está mediada por un concepto. Las representaciones se pueden definir según Duval (1995) como:

- ***Representaciones mentales***, que tienen una función de objetivación, son internas y conscientes y ocurren en el pensamiento, estas representaciones internas son las imágenes mentales que consideran características figurativas o gráficas del concepto.
- ***Representaciones computacionales***, son internas y no conscientes del sujeto, funcionan en forma automática e instantánea. Se refiere a

las tareas que el sujeto realiza sin reflexionar sobre los pasos necesarios para su realización.

- ***Representaciones semióticas***, son las que realizan una función de objetivación y de expresión, son conscientes y es relativo a un sistema particular de signos, como el lenguaje natural, matemático o gráfico, se refieren al mundo de las estructuras físicas y los sistemas de notación. Ellas tienen dos aspectos: la forma (representante) y el contenido (representado). Tienen doble carácter funcional; actúan como estímulo para los sentidos en los procesos de construcción de las nuevas estructuras mentales y permiten la expresión de conceptos e ideas a los sujetos que las utilizan.

j. Representación fraccional

Sistema de representación simbólica del número racional expresado en un par ordenado de número enteros, donde la segunda componente es diferente de cero. Es una variedad de las representaciones simbólicas.

CAPÍTULO II

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

2.1 DETERMINACIÓN DEL PROBLEMA

Esta investigación descriptiva correlacional transversal trata sobre la comprensión del número racional positivo en su representación fraccional de los estudiantes del nivel de educación secundario de la ciudad de Puno, En este numeral se exponen el origen y racionalidad del problema de investigación, que se concreta en la formulación de las interrogantes, además de la justificación e importancia del estudio, así como su pertinencia y viabilidad. Como es normal en un estudio de este nivel en el proceso se encuentran limitaciones que quedan explicitadas.

Se parte del supuesto que, los planteamientos teóricos sobre temas de comprensión y representación del conocimiento matemático y sus consecuencias teóricas han de contribuir a la solución de problemas de aprendizaje de la matemática en general, y específicamente, en el pensamiento numérico en la educación básica. El tema de investigación se centra en los significados, operaciones básicas y propiedades elementales de los números racionales positivos en su representación fraccional.

2.1.1 ORIGEN Y RACIONALIDAD

A lo largo de las últimas décadas, diversos estudios realizados a nivel internacional han venido indicando el bajo nivel educativo en el país, concretamente, en el ámbito del aprendizaje de la matemática. Un indicador de ello son los resultados del Estudio Internacional Comparativo de la UNESCO sobre Lenguaje y Matemática. Así mismo, los factores asociados en tercer y cuarto grado de primaria, muestran que el Perú ocupa el último lugar en matemática, según el informe realizado por el Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación (LLECE, 1998). Igualmente, la Unidad de Medición de la Calidad Educativa del Ministerio de Educación, concluye en el informe pedagógico "Como rinden los estudiantes peruanos en comunicación, matemática, resultados de la Evaluación Nacional 2001, sexto grado de primaria", que un "escaso porcentaje de estudiantes muestran rendimientos aceptables para el grado, pues en seis de las siete competencias, el Nivel Suficiente es el que contiene el menor número de estudiantes"; además la mayoría de estudiantes presentan limitaciones para representar cantidades y operar con fracciones (homogéneas) y expresiones decimales. Más recientemente, la Unidad de Medición de la Calidad Educativa en el año 2004 en su informe concluye lo siguiente:

> El 6.0% de los estudiantes de tercer grado de secundaria se ubican en el nivel suficiente. Esto significa que solo este pequeño porcentaje muestra un desarrollo de sus capacidades matemáticas aceptable para el grado. Lo preocupante de estos resultados radica en que el resto de estudiantes (94.0%) muestra no haber desarrollado adecuadamente las habilidades matemáticas requeridas para el grado que están culminando. Esto implica que, un gran porcentaje de los estudiantes no han logrado incorporar importantes nociones matemáticas, ni han desarrollado habilidades necesarias para enfrentarse con éxito a diversas situaciones problemáticas tanto dentro como fuera de la escuela. (p. 219).

Estos resultados desfavorables exigen respuestas urgentes a ciertas interrogantes que expliquen esta deficiencia en el aprendizaje matemático, con relativa rigurosidad científica.

Dejando al margen, dimensiones sobre la validez real y pertinencia práctica de estos estudios comparativos, lo cierto es, que estos resultados constituyen un indicador de la necesidad de realizar esfuerzos más intensos y sistemáticos, que los hasta ahora desplegados, destinados a mejorar la enseñanza de la matemática en el país.

Ante este problema, resulta imprescindible la investigación destinada a profundizar en la naturaleza de las dificultades de aprendizaje existentes, además de caracterizar los detalles y las limitaciones en la educación matemática. Nos referimos a una vía de actuación (un enfoque, una nueva perspectiva) fundada en la convicción de que conocer los resultados negativos no son suficientes por sí mismos, sino a partir de ellos establecer líneas de acción y realizar las reformas necesarias. Por cierto, es necesario posicionar y caracterizar con detalle los distintos problemas de aprendizaje de la matemática, pues la complejidad del conocimiento matemático y su enseñanza así lo exigen.

En este sentido, la presente investigación constituye un aporte para entender las razones del deficiente aprendizaje de las fracciones. Apoyado en un marco teórico sobre la comprensión, sistemas semióticos de representación y un marco metodológico, sustentado en el análisis didáctico, se realizó el estudio de tres variables: las interferencias en la comprensión de los significados del número racional positivo en su representación fraccional, la capacidad de resolver operaciones básicas con fracciones y el conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales que poseen los estudiantes del nivel de educación secundaria.

2.1.2 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

La enseñanza aprendizaje de la matemática fue una preocupación permanente durante el siglo XX. Un notable estudioso de la educación peruana, José Antonio Encinas, objetaba la enseñanza libresca y carente de principios didácticos. Encinas (1928) en su obra *"Un Ensayo de Escuela Nueva en el Perú"* criticó la:

> ...clásica y artificial división de las operaciones de cálculo en enteros, quebrados y decimales; las tablas de sumar, restar, multiplicar y dividir; las definiciones redactadas en forma ininteligible, los ejemplos expuestos con ambigüedad, todas con una macabra procesión de números que los niños debían retener en la cabeza. (p.116).

El pedagogo en mención, planteó la enseñanza de la matemática "mediante problemas escogidos en relación a su capacidad y a sus necesidades, calculando con todas las operaciones" (p. 116), por ejemplo, proponía que la enseñanza de las fracciones debe partir de los conocimientos que el niño tiene como producto de su experiencia en la vida diaria, cuando habitualmente usa fracciones de la unidad. Recomendó que, si se tenía que enseñar a sumar no se debe proceder en forma abstracta y aislada de la realidad cotidiana del niño, sino en la resolución de problemas, deben ser graduados convenientemente, buscando que el niño discipline su inteligencia haciendo que la enseñanza de la matemática sea más útil, amena, y sobre todo, comprensiva (Encinas, 1928).

Como constatamos, la preocupación por la educación matemática, en general, y específicamente la enseñanza aprendizaje de las fracciones fue y sigue siendo una constante. La manera de abordar la enseñanza de las fracciones tiene deficiencias conceptuales y metodológicas, esto queda evidente en la revisión de los textos escolares de matemática. El manejo casi exclusivo del concepto "parte-todo" de las fracciones, se traduce en un deficiente aprendizaje comprensivo de los números racionales positivos. En la resolución y planteo de problemas predominan casi exclusivamente las representaciones simbólicas, descuidando otras representaciones del número racional.

La organización de la enseñanza de los números racionales, basado casi exclusivamente en el significado parte-todo y el olvido negligente de la enseñanza de los demás significados como: medida, razón, cociente y operador, trajo como consecuencia resultados insuficientes en la comprensión de la noción de número racional. Este aprendizaje deficiente se traduce en las dificultades que tiene el estudiante al momento de utilizar este conocimiento en el aprendizaje de otros contenidos que tienen relación con él. Se ha observado, en la labor docente, que en el aprendizaje de las proporciones, razones, fracciones parciales, fracciones algebraicas, funciones trigonométricas, probabilidad, funciones exponenciales y otras, los alumnos tienen dificultades porque carecen de un sólido aprendizaje comprensivo de los números racionales como par ordenado. Si no se atienden estos problemas de aprendizaje, es altamente probable que el alumno los sopese durante sus estudios superiores.

Algo que nos sorprende es encontrar personas adultas que olvidan con frecuencia el algoritmo de la adición de fracciones heterogéneas, o no pueden explicar por qué razón tienen que calcular el mínimo común múltiplo para sumar. Nos atrevemos a afirmar que, esta dificultad se debe a que el aprendizaje de los algoritmos matemáticos se basa en la repetición y memorización mecánica, razón por la que no han sido asimilados de forma racional. Estas deficiencias quizás se deban a un aprendizaje mecánico (*rote learning*), donde se ejerce la memoria sin preocuparse por comprender el significado de los procesos algorítmicos, ni desarrollar una comprensión adecuada del concepto de fracción.

Es probable que estas personas no hayan tenido la necesidad de utilizar las fracciones en mucho tiempo o tengan oportunidades escasas de manipular fracciones de cierta complejidad, limitando sus necesidades cotidianas a utilizar situaciones del tipo: medio litro de leche, varillas de fierro de 3/8, 1/8 de galón de pintura, ¼ de pollo, diez céntimos de Sol. Como sea, las fracciones están presentes en la vida diaria y son necesarias para ejercer su ciudadanía plenamente; así en el *Informe Cockcroft,* "*Las matemáticas sí cuentan,* recomiendan Cockcroft et al. (1985) que: "Los alumnos deben ser capaces de realizar cálculos que incluyan la palabra "de", tales como 1/3 de 4.50 libras: Sumar y restar fracciones con denominadores 2, 4, 8 ó 16 en el contexto de la medida" (p.167). De allí surge la necesidad de comprender la naturaleza de los números racionales positivos, el cómo se la conceptúa y cuáles son sus significados.

En el informe pedagógico de los resultados de la Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil 2004 (ENRE 2004) del tercero y quinto grados de educación secundaria, elaborado por la Unidad de Medición de la Calidad, en una muestra de 640 instituciones educativas de educación secundaria de todas las regiones del Perú, se evaluaron alrededor de 14 500 estudiantes en cada grado; se encontró que el 74.1% de los estudiantes de tercer grado no han incorporado el manejo de las propiedades y operaciones aritméticas en los diversos conjuntos numéricos (N, Z, Q, R).

El informe en referencia (ENRE 2004) "ha encontrado que los estudiantes de quinto grado presentaron dificultades en el manejo de las nociones de número en el conjunto de los racionales" (p. 179), lo que evidencia que los estudiantes tienen dificultades en la comprensión de los números racionales y sus operaciones aritméticas básicas; así mismo, en la interpretación y recodificación en sus diversas representaciones (decimal, fraccionaria, simbólica, porcentual, gráfica, etc.), no tienen incorporadas las nociones de número (entero, racional, real) y no realizan conexiones entre estos conjuntos numéricos.

Una de las posibles causas que explican el problema que expone el informe es que los estudiantes no comprenden el concepto de número, ni sus representaciones y mucho menos sus propiedades, y consecuentemente tiene serias dificultades en el manejo de los algoritmos de las operaciones aritméticas básicas de los diferentes conjuntos numéricos (N, Z, Q y R).

La explicación a las deficiencias anteriores, que proponen los especialistas, es la falta de significatividad de las actividades matemáticas, la compartimentalización -organización del conocimiento matemático escolar en temas o disciplinas desconectadas- y la baja demanda cognitiva de las actividades propuestas. Así, los números racionales positivos, en su representación fraccional, son estudiados como un tema desconectado de los demás sistemas numéricos, sin relacionarlos con otros tópicos de la matemática escolar; además, los problemas de los números racionales son planteados aisladamente de su fenomenología y divorciados de las situaciones problemáticas de la vida real. Por otra parte, la resolución de problemas se basa en estrategias de memorización e imitación al docente de la manera como resuelve «problemas tipo», constituyéndose en modelo constante de resolutor a imitar.

Consideramos que las sugerencias propuestas por el informe de la ENRE 2004, pueden servir al docente para reflexionar sobre su práctica y buscar mejores estrategias para promover el aprendizaje comprensivo. Su propuesta se centra en que se debe trabajar con los números racionales positivos, estudiar sus propiedades de equivalencia, orden y densidad en sus diferentes representaciones simbólicas y gráficas; así también, la representación fraccional se debe interpretar en sus diferentes significados como: fracción en sí (parte-todo), medida, cociente entre dos números, razón y operador.

En conclusión, se encontró que las evaluaciones nacionales e internacionales demuestran las limitaciones de la enseñanza y aprendizaje de la matemática en general, y específicamente, de los números racionales; esto justifica a plenitud la necesidad de abordar la problemática que se formula en el siguiente bloque.

2.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

La enseñanza y aprendizaje del número racional positivo, en su representación fraccional, en el nivel de educación secundaria, se caracteriza por su marcado énfasis en el cálculo y resolución de ejercicios de aplicación de algoritmos explicados por el profesor, donde el alumno imita la demostración previa del docente, utilizando casi exclusivamente el significado parte-todo en su representación simbólica-numérica. El enfoque tradicional de la enseñanza del número racional, se traduce en la utilización exclusiva de la representación simbólica numérica, al momento de abordar su enseñanza en el nivel secundario. La investigación evalúa el conocimiento de los algoritmos de las operaciones básicas con fracciones y el conocimiento de las propiedades básicas de los números racionales, y su implicancia en la comprensión de los significados de las fracciones como medida, razón, cociente y operador; así como, las interferencias entre las diferentes interpretaciones o, concretamente, la interferencia del significado parte-todo en las demás acepciones. Estos fenómenos son el núcleo de esta investigación.

El problema de investigación pretende responder a cuestiones referentes a la comprensión interferente de los significados del número racional positivo, y su relación con la capacidad de resolución de operaciones básicas con fracciones y el conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales, a través de la observación del desempeño de los estudiantes del nivel de educación secundaria. El campo problemático del objeto matemático se limita a los números racionales positivos, representados en forma de números fraccionales, lo que implica que no hemos investigado cuestiones relativas a su representación decimal.

La interrogante general es la siguiente:

2.2.1 PROBLEMA GENERAL

¿Cómo se relaciona la capacidad de resolución de operaciones básicas con fracciones y el conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales, con la comprensión de los significados del número racional positivo que revelan los estudiantes del nivel de educación secundaria de los colegios de la ciudad de Puno en el año 2009?

La absolución de esta interrogante aspira a contribuir al entendimiento del fenómeno de la comprensión del número racional que muestran los estudiantes, a través de una evaluación de la interpretación de los significados, resolución de operaciones y conocimiento de las propiedades de los números racionales. La dilucidación de la interrogante general se da a través de las interrogantes específicas.

2.2.2 PROBLEMÁTICA ESPECÍFICA

Coherente con el nivel descriptivo correlacional múltiple se plantea las siguientes interrogantes específicas:

a) ¿Qué tipo de interferencias presentan los estudiantes en la comprensión de los significados del número racional cuando se enfrentan a situaciones problemáticas con fracciones?
b) ¿Cuál es la naturaleza de la comprensión de los significados del número racional positivo, en su representación fraccional, que revelan los estudiantes del nivel de educación secundaria de la ciudad de Puno?
c) ¿Cómo es la comprensión de los algoritmos de las operaciones básicas con fracciones?
d) ¿Cuánto conocen sobre las propiedades elementales del conjunto de los números racionales?
e) ¿Qué tipo de relación existe entre la capacidad de resolución de operaciones básicas con fracciones y el conocimiento de las

propiedades elementales de los números racionales, con la comprensión de los significados del número racional positivo?

f) ¿Está relacionado la capacidad de resolución de operaciones básicas con fracciones con la comprensión de los significados del número racional positivo?

g) ¿Está relacionado el conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales con la comprensión de los significados del número racional positivo?

2.3 IMPORTANCIA Y ALCANCE DE LA INVESTIGACIÓN

La proliferación de reformas que cíclicamente se han realizado en los sistemas educativos a nivel mundial, son evidencia de la inconformidad con su funcionamiento y/o con los resultados que ellos obtienen. Particularmente, en Puno, es claro que el problema de la deficiente calidad de la formación matemática de los estudiantes en el nivel escolar persiste y es grave, sin importar las definiciones de "calidad" y de "formación matemática" que se acojan. Por eso, este estudio se propone escudriñar cuestiones más específicas de la enseñanza y aprendizaje de las fracciones, la naturaleza de la misma y la comprensión que el estudiante tiene sobre el conjunto de los números racionales.

La investigación correlacional evalúa de forma sistemática el estado y características de la comprensión de los significados del número racional y su relación con la capacidad de resolver problemas que involucran operaciones básicas con fracciones y el conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales. Los resultados de este estudio permitirán dar pautas para plantear acciones de capacitación para los profesores y proponer algunos recursos didácticos que servirán para la conducción del aprendizaje de las fracciones.

2.4 LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN

Los resultados y conclusiones del presente estudio corresponden al caso de los estudiantes del nivel de educación secundario de la ciudad de Puno, por tanto, no se aplican a otros casos, por lo que no pueden extenderse a la población regional y menos al ámbito nacional. Es un estudio de caso, que corresponde al distrito de Puno, de una muestra de 380 estudiantes distribuidos en los cinco grados de estudio, a quienes se les aplicó tres pruebas, una sobre comprensión de los significados del número racional, otra que evalúa la capacidad operativa con las fracciones, y una última que evalúa el conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales.

Como se podrá deducir de los objetivos de esta investigación, no se han considerado aspectos relativos al proceso de enseñanza en general, como metodología, currículo o evaluación, aspectos que pueden ser materia de otras investigaciones; nuestra preocupación es estudiar la naturaleza de la comprensión del concepto y significados del número racional, expresado como fracciones y su relación con las operaciones básicas y propiedades elementales.

Entre otras limitantes que se enfrenta está el dominio del idioma. La documentación revisada tiene su fuente en investigaciones, actas, libros esencialmente en idioma español; y algunos informes de investigación de universidades brasileñas, en idioma portugués. El idioma inglés como tercera opción, permitió en forma limitada acceder a la información sobre teoría de la educación matemática que forma parte de la fundamentación teórica.

Creemos que la revisión de antecedentes sobre los significados del número racional fue parcial, pero suficiente para tener una visión general del estado actual de la cuestión en el espectro de la comunidad de investigadores de la educación matemática.

Si bien, las interferencias de los significados es una de las múltiples razones de la deficiente comprensión de los significados del número racional, en esta investigación tenemos el propósito de estudiar solo esta arista del problema; en consecuencia, este aspecto más que una restricción es un elemento delimitador de las fronteras de la investigación.

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

3.1 PROPUESTA DE OBJETIVOS

3.1.1 OBJETIVO GENERAL

Determinar el tipo de relación entre la capacidad de resolución de operaciones básicas con fracciones y el conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales, con la comprensión de los significados del número racional positivo, de alumnos de educación secundaria que estudian en la ciudad de Puno.

3.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

a) Caracterizar la comprensión de los significados del número racional positivo, en su representación fraccional, que ostentan los estudiantes del nivel de educación secundaria de los colegios de la ciudad de Puno.

b) Identificar los tipos de interferencias en la comprensión de los significados del número racional que revelan los estudiantes.

c) Caracterizar la comprensión de los algoritmos de las operaciones básicas con fracciones.

d) Determinar cuánto conocen sobre las propiedades del conjunto de los números racionales.

e) Determinar el tipo de relación existente entre la capacidad de resolución de operaciones básicas con fracciones y el conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales con la comprensión de los significados del número racional positivo.

f) Establecer el tipo de relación entre la capacidad de resolución de operaciones básicas con fracciones con la comprensión de los significados del número racional positivo.

g) Establecer el tipo de relación entre el conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales con la comprensión de los significados del número racional positivo.

3.2 SISTEMA DE HIPÓTESIS

3.2.1 HIPÓTESIS GENERAL

A mayor capacidad de resolución de operaciones básicas con fracciones y un mayor conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales corresponde mayor comprensión de los significados del número racional positivo.

3.2.2 HIPÓTESIS ESPECÍFICAS

a) La comprensión de los significados del número racional positivo, en su representación fraccional, es de naturaleza intuitiva y parcial, sustentado esencialmente en el significado parte-todo.

b) El significado parte-todo interfiere en la interpretación de los significados de medida, razón, cociente y operador.

c) La comprensión de los algoritmos de las operaciones adición, sustracción, multiplicación y división de fracciones es obstaculizado por algoritmos previamente aprendidos.

d) Demuestran escaso conocimiento de las propiedades elementales del conjunto de los números racionales.

e) La capacidad de resolución de operaciones básicas con fracciones y el conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales se relacionan directamente con la comprensión de los significados del número racional positivo.

f) A mayor capacidad de resolución de las operaciones básicas con fracciones, mayor es la comprensión de los significados del número racional.

g) A mayor conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales, corresponde una mayor comprensión de los significados del número racional positivo.

3.3 SISTEMA DE VARIABLES

3.3.1 VARIABLES DE ESTUDIO A CORRELACIONAR

Variables de Independencia Estadística:

X_1: Resolución de operaciones básicas con fracciones.

X_2: Conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales.

Variable de Dependencia Estadística:

Y: Comprensión de los significados del número racional positivo.

3.3.2 DEFINICIÓN OPERATIVA DE LAS VARIABLES

Indicadores de la Variable X_1:

i. Realiza la adición de fracciones utilizando el algoritmo de la operación aritmética.
ii. Efectúa la operación de sustracción de fracciones.
iii. Efectúa la operación de multiplicación de fracciones utilizando el algoritmo correspondiente.
iv. Utiliza el algoritmo en la realización de la división de fracciones.

Indicadores de la Variable X_2:

i. Identifica la definición de número racional.
ii. Formula el opuesto de un número racional escrito como fracción.
iii. Formula el inverso de un número racional como fracción.

iv. Evalúa la relación de equivalencia del número racional en su representación fraccional.
v. Ordena de menor a mayor los números racionales en su representación fraccional.
vi. Interpreta la propiedad de densidad de los números racionales.

Indicadores de la Variable *Y*:

i. Comprensión del significado parte-todo.
ii. Comprensión del significado de medida.
iii. Comprensión del significado razón.
iv. Comprensión del significado cociente.
v. Comprensión del significado operador.

3.4 TIPO Y MÉTODOS DE INVESTIGACIÓN

3.4.1 METODOLOGÍA

El enfoque de investigación es cuantitativo, por lo que, acotamos información esencialmente cuantitativa para deducir conocimiento. Por tal razón, en el primer capítulo delineamos teorías y de ella derivamos hipótesis, las cuales se someten a prueba utilizando diseños estadísticos, específicamente correlacionales. En el cuarto capítulo se aporta resultados empíricos que corroboran esas hipótesis.

Las fases de esta investigación son:

Primera, realizamos la caracterización del fenómeno de la comprensión a través de un estudio descriptivo sobre las dificultades que tienen los estudiantes en la comprensión de los significados de los números racionales positivos (Q^+).

Segunda, identificamos los tipos de interferencia y establecemos suposiciones como consecuencia de la descripción anterior. Estas suposiciones se ven plasmadas en un conjunto de clasificaciones y tipificaciones de las interferencias.

Tercera, evaluamos la capacidad que ostentan los estudiantes en la resolución de operaciones básicas con fracciones y el conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales.

Cuarta, establecemos relaciones múltiples entre las variables de estudio.

3.4.2 NIVEL Y TIPO DE INVESTIGACIÓN

El enfoque de investigación es cuantitativo, se recolecta y analizan datos para probar la hipótesis y establecer con un grado de probabilidad los patrones de comportamiento de la población. El alcance de la investigación es correlacional múltiple. El propósito del estudio es evaluar la relación que existe entre tres variables.

El estudio es de nivel descriptivo correlacional, reporta información sobre el estado actual de la comprensión de los significados del número racional positivo, en su representación fraccional. La técnica de observación del fenómeno de comprensión fue a través de la aplicación de pruebas. Cabe recalcar que en este estudio no tenemos control de la variable, lo que hacemos es estudiarla en su estado natural. En el estudio se hace una tipificación y clasificación de las interferencias de los significados y los errores en la resolución de operaciones básicas con fracciones, con la intención de realizar una aproximación cualitativa del estudio.

De acuerdo a la clasificación propuesta por Sierra Bravo (1988), la investigación por su finalidad es del tipo básico, pues, tiene el objetivo de evaluar, describir y correlacionar la comprensión de los significados del número racional con el dominio de las operaciones básicas con fracciones y el conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales, así mismo, no deja de tener una naturaleza aplicativa, ya que sus conclusiones y recomendaciones estarán dirigidas a solucionar el problema de los bajos niveles de comprensión que presentan los estudiantes del nivel de educación secundaria.

3.5 DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

Como el estudio tiene el objetivo de evaluar el estado de la comprensión de los significados del número racional positivo, en un momento dado y determinar la relación entre las variables en un punto del tiempo, nuestro diseño apropiado es el transversal o transeccional, concordante con el alcance correlacional.

El diseño de investigación es transeccional descriptivo correlacional, porque se indaga la incidencia y los valores en que se manifiestan las variables, las cuales son categorizadas. Es correlacional, porque describe las relaciones entre la comprensión de los significados del número racional que ostentan los estudiantes con el dominio de las operaciones básicas con fracciones y el conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales. La relación insinúa una naturaleza de tipo causal.

El esquema del diseño se configura de la siguiente manera:

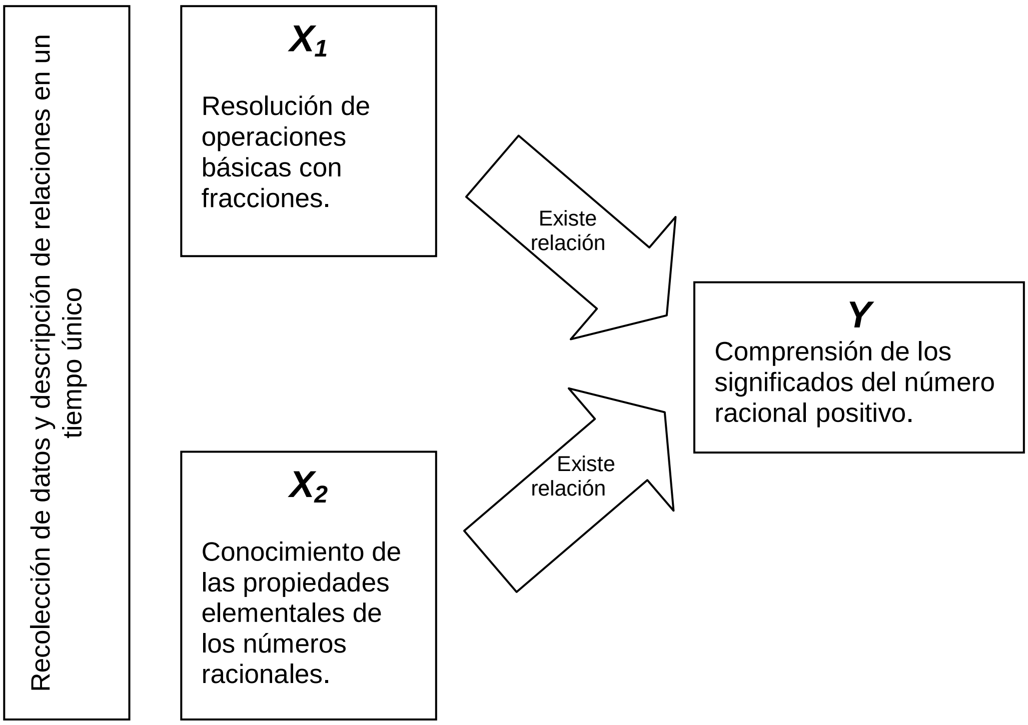


Figura 3.1. Diseño transeccional correlacional múltiple de la investigación.

3.6 INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS

El instrumento es concebido como el medio material empleado para recoger y almacenar la información. En esta investigación se utilizó el cuestionario o prueba de tipo cerrado y abierto, diseñado en forma sencilla y clara, de manera que sea comprendida con facilidad. En cuanto a la validez del instrumento fue favorablemente validado por la correlación por rangos. Los instrumentos que se aplicaron son los siguientes:

- Prueba de comprensión de los significados del número racional.
- Prueba de operaciones básicas con fracciones.
- Prueba sobre las propiedades elementales de los números racionales.

3.6.1 DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DEL INSTRUMENTO DE RECOLECCIÓN DE DATOS

Para la evaluación de la comprensión de los significados que manifiestan los estudiantes se diseñó una prueba de seis preguntas abiertas, se optó por estas, porque son más adecuadas para recoger información que, podría quedar oculta con preguntas cerradas o de alternativa múltiple.

El instrumento tiene un conjunto de orientaciones como “Instrucciones para responder el cuestionario”; seguidamente, se proponen las seis cuestiones organizadas según los significados del número racional, tal como se muestra en el Anexo A. 2 “Prueba sobre comprensión de los significados del número racional”. En este instrumento se propone dos cuestiones sobre el significado “parte-todo continuo” y “parte-todo discreto”; la tercera pregunta evalúa el significado de “cociente”; la cuarta, la “medida”; la quinta, la “razón”; y finalmente, el significado de “operador”. De los seis enunciados, solo el cuarto tiene una representación gráfica de segmentos. En lo posible, se ha procurado que los enunciados se hallen sin el auxilio de gráficos, con la finalidad de dejar abierta la posibilidad de que sea el estudiante quien utilice las representaciones gráficas.

Se ha pretendido que los instrumentos de medición registren datos observables que denoten con nitidez los procesos cognitivos involucrados, lo más cercano posible a la variable de interés; se trató de alcanzar este requisito con la formulación de preguntas abiertas, porque estas dan mayor posibilidad de recoger información sobre lo que acontece en el ámbito de las representaciones internas del sujeto, exteriorizadas a través de las representaciones externas que presentan en cada respuesta.

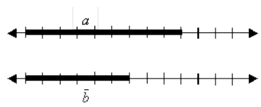
Para acceder a la mayor riqueza de las respuestas se habilitó un espacio determinado “sector de respuestas”; en la resolución del problema se sugirió hacer todos los cálculos en el mismo folio; además, se pidió no borrar los errores o equivocaciones para tener pistas sobre sus procesos de solución.

3.6.2 PROCESO DE ELABORACIÓN DEL INSTRUMENTO

La secuencia del proceso de construcción del instrumento se inicia con la definición de los significados del número racional. Para esta tarea se tomó como documento orientador el libro de Gairín y Sancho (2002); luego, se exponen los objetivos de cada ítem, que en la tabla se muestra como “Desempeño esperado”, es decir, las habilidades que deberán mostrar los sujetos. Estas habilidades están referidas a la comprensión de los cinco significados más usuales que tienen los números racionales: la fracción como parte-todo, cociente, medida, razón y operador. Paso seguido, se formula una pregunta por cada desempeño esperado, tal como muestran los cuadros que a continuación se exponen:

Tabla 3.1

Matriz de Formulación del Instrumento de Recolección de Información sobre Significados del Número Racional

Definición de los significados de número racional, según Gairín y Sancho 2002.		Desempeño esperado	Problemas
El número racional como "parte-todo": Este significado se da cuando existe la división de una unidad en partes iguales, de las que se "destacan" algunas. Las partes en que se ha dividido la unidad son el denominador de la fracción, mientras que las partes que se destacan están indicadas por el numerador. La relación "parte-todo" se presenta cuando un "todo" (continuo o discreto) se divide en partes "congruentes" (equivalentes como cantidad de superficie o cantidad de "objetos"). La fracción indica la relación que existe entre un número de partes y el número total de partes (que puede estar formado por varios "todos"). El todo recibe el nombre de unidad.	Continuo	Interpreta una situación problemática, enunciada en forma verbal, de la fracción en su significado 'parte-todo continuo' proponiendo una explicación simbólica y gráfica.	1) Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar 3 de un total de 4 trozos?
	Discreto	Interpreta una situación problemática de la fracción, enunciada en forma verbal, en su significado 'parte-todo discreto' proponiendo una explicación simbólica y gráfica.	2) Si en una reunión de amigos, tres son chicos y cuatro, chicas, ¿qué fracción del grupo de amigos son chicos?
El número Racional como "cociente": En este caso, la fracción ***a/b*** representa una situación de reparto, en la que se trata de conocer el tamaño de cada una de las partes que resulta de distribuir ***a*** unidades en ***b*** partes iguales.		Interpreta una situación problemática, enunciada en forma verbal, de la fracción en su significado como "cociente" y explica el reparto usando símbolos y gráficas.	3) Tres amigos quieren repartirse 5 chocolates de manera equitativa, ¿cuánto chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?
El número Racional como "medida": En este constructo se plantea la necesidad de medir la longitud de un segmento AB tomando como unidad de medida la longitud de un segmento CD, que no está incluido un número entero de veces en el segmento AB. En términos generales se puede decir que la fracción como medida responde a la necesidad de medir una magnitud tomando como unidad de medida otra magnitud de la misma naturaleza que la anterior, que no está incluido un número entero de veces en ella. El objeto a medir no siempre será una longitud, puede ser un área, el tiempo, masa, etc.		Interpreta una representación gráfica lineal que trasmite el significado de la fracción como 'medida' y traduce a representación simbólica.	4) De la observación de la figura: ¿Qué parte de $\bar{a}$ es $\bar{b}$?, ¿cuánto mide $\bar{a}$? 

El número Racional como "razón": En este constructo *a/b* no representa la partición de ningún objeto o cantidad de magnitud, sino la relación que existe entre dos cantidades de magnitud, la comparación entre los cardinales de dos conjuntos o la comparación entre una cantidad de magnitud y el cardinal de un conjunto. La comparación se establece entre las cantidades que expresan el numerador y el denominador y, por tanto, el orden en que se citan las magnitudes que se están comparando es esencial. La comparación entre cantidades que indica la fracción ha de entenderse como el tanto por uno, es decir, como la cantidad de la magnitud a que se refiere el numerador que corresponde a cada unidad de la magnitud considerada en el denominador	Interpreta el enunciado problemático que involucra fracciones en su significado de 'razón' a través de una explicación simbólica y o gráfica.	5) En una mesa hay 9 libros, de los cuales 5 son de matemáticas y 4 de investigación; ¿qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?
El número Racional como "operador": En este constructo se parte de un número o figura dada y mediante la realización de operaciones se transforma en un segundo número o figura. Por tanto, se puede interpretar a la fracción como una función de cambio. El trabajo con operadores conecta las fracciones con las propiedades algebraicas de multiplicación inversa y de identidad de elementos, y con propiedades del análisis como son los de composición de funciones.	Identifica la fracción en su significado como 'operador' y lo utiliza para la solución de una situación problemática.	6) En un salón de clases, de los 35 alumnos aprueban matemática los 4/5 ¿cuántos aprueban matemática?

Elaborado por el investigador.

3.7 DESCRIPCIÓN DE LA POBLACIÓN Y MUESTRA

3.7.1 POBLACIÓN

La población de estudio está constituido por Instituciones Educativas del Nivel Secundario, de la modalidad de menores (FO) correspondiente a la variante Ciencias y Humanidades. Estos centros educativos son de gestión estatal (A1) de financiamiento público. Los educandos asisten en el turno diurno.

Tabla 3.2

Población de estudiantes de los cinco grados de estudio del nivel secundario de la ciudad de Puno. 2009.

N°	NÚMERO Y/O NOMBRE DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA	NÚMERO DE ALUMNOS POR GRADO DE ESTUDIO					
		1ro.	2do.	3ro.	4to.	5to	Total
1	GRAN UNIDAD ESCOLAR SAN CARLOS	241	303	243	244	291	1322
2	GLORIOSO SAN CARLOS	368	317	300	297	258	1540
3	SANTA ROSA	247	222	226	230	228	1153
4	MARÍA AUXILIADORA	228	272	246	283	261	1290
5	INDEPENDENCIA NACIONAL	205	154	191	183	144	877
6	JOSÉ ANTONIO ENCINAS	86	73	66	83	62	370
7	CARLOS RUBINA BURGOS	77	75	77	76	99	404
8	JOSÉ CARLOS MARIÁTEGUI APLICACIÓN UNA	47	63	57	67	65	299
	Total	1499	1479	1406	1463	1408	7255

Fuente: Actas de evaluación integral de las ocho Instituciones Educativas.
Elaborado por el investigador.

3.7.2 MUESTRA

El tamaño de la muestra fue determinado por la fórmula $n = \dfrac{n'}{1 + \dfrac{n'}{N}}$,

donde n' es el tamaño provisional de la muestra y es directamente proporcional a la varianza de la muestra e inversamente proporcional a la varianza de la población $n' = \dfrac{s^2}{V^2}$. (Sampiere, 2006)

Siendo la población todos los estudiantes de instituciones educativas secundarias de menores de variante ciencias y humanidades de gestión estatal, el tamaño poblacional es N= 7 255. Entonces, el tamaño de la muestra de estudiantes (*n*) a quienes se aplicó los instrumentos de recolección de datos está calculado con un error estándar menor de 0.05.

N = tamaño de la población de 7 255.

se = error estándar = 0.015, determinado por nosotros.

s^2 = varianza de la muestra expresada como la probabilidad de ocurrencia del valor promedio de una variable: *p = 0.9*.

V^2 = varianza de la población al cuadrado que se definición como el cuadrado del error estándar (se^2).

n´= tamaño de la muestra sin ajustar.

n = tamaño de la muestra definitivo.

Tenemos el cálculo:

$$s^2 = p(1-p) = 0.9\ (1- 0.9) = 0.09$$

$$V^2 = se^2 = (0.015)^2 = 0.000225$$

$$n' = \frac{s^2}{V^2} = \frac{0.09}{0.000225} = 400$$

$$n = \frac{n'}{1+\frac{n'}{N}} = \frac{400}{1+\frac{400}{7255}} = \frac{400}{1+0.05513} = \frac{400}{1.05513} = 379.1 = 380$$

La muestra de estudio es probabilística estratificada, porque tenemos subgrupos en el que la población se divide en segmentos y se seleccionó una muestra para cada segmento poblacional. El interés del estudio es comparar los resultados entre segmentos, grupos o nichos de la población. En nuestro caso los grados de estudio del nivel secundario son los segmentos en referencia.

La estratificación en estratos de estudio aumenta la precisión de la muestra, además, implica el uso de diferentes tamaños de muestras para cada estrato, con el objetivo de reducir la varianza de cada unidad de la media muestral. Kish (1995, citado por Sampiere 2006) sostiene que, un número determinado de elementos muestrales $n = \sum nh$, la varianza de la media muestral puede reducirse al mínimo cuando el tamaño de la muestra para cada estrato es proporcional a la desviación estándar dentro del estrato.

Si la población es N= 7 255 estudiantes de los cinco grados de estudio y el tamaño de la muestra es *n* = 380 estudiantes, la muestra que necesitamos para cada estrato es:

$\frac{n}{N} = \frac{379}{7255} = 0.0522$ de manera que el total de la subpoblación se multiplica por esta fracción constante para obtener el tamaño de la muestra por cada estrato.

Tabla 3.3

Muestra probabilística estratificada de estudiantes de los cinco grados de estudio del nivel secundario de la ciudad de Puno. 2009.

N°	NÚMERO Y/O NOMBRE DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA	NÚMERO DE ALUMNOS POR GRADO DE ESTUDIO					
		1ro.	2do.	3ro.	4to.	5to	Total
1	GRAN UNIDAD ESCOLAR SAN CARLOS	13	16	13	13	15	70
2	GLORIOSO SAN CARLOS	19	17	16	16	13	81
3	SANTA ROSA	13	12	12	12	12	61
4	MARÍA AUXILIADORA	12	14	13	15	14	68
5	INDEPENDENCIA NACIONAL	11	8	10	10	8	47
6	JOSÉ ANTONIO ENCINAS	4	4	3	4	3	18
7	CARLOS RUBINA BURGOS	4	4	4	4	5	21
8	JOSÉ CARLOS MARIÁTEGUI APLICACIÓN UNA	2	3	3	3	3	14
	Total	78	78	74	77	73	380

Fuente: Actas de evaluación integral de las ocho Instituciones Educativas.
Elaborado por el investigador.

3.8. TRATAMIENTO ESTADÍSTICO

3.8.1 ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

1. Una primera tarea fue clasificar los datos individuales sin agrupamiento, es decir, agrupar los datos recogidos de cada una de las variables, y presentarlas en tablas de frecuencia y gráficos. La clasificación implica que realicemos lo siguiente: codificación, transferencia y tabulación. (Sierra Bravo, 1994)

   - Gráficas de barras: para presentar datos discretos en escalas nominales y ordinales, como por ejemplo tipos de respuestas presentadas por los educandos y porcentaje de respuestas correctas e incorrectas.
   - Gráficas circulares: estas se utilizaron para presentar información en gran número de categorías, sin que se confundan o sobrelapen, como suele ocurrir con las gráficas lineales.
   - Gráficas acumulativas: para representar las distribuciones de frecuencias acumuladas, de las que resultarán las ojivas.
   - Gráficas lineales: para representar datos continuos en escalas de intervalos o razones. Utilizamos para graficar datos continuos y tendencia de la conducta de nuestro interés sobre el tiempo (grados de estudio) y sobre diferentes condiciones experimentales.
   - Los análisis visuales en base a las gráficas: para observar la dirección, la variabilidad, la tendencia y el nivel.
2. Se utilizaron los estadígrafos de tendencia central, dispersión, posición y forma para realizar una descripción estadística de las variables.
3. En la lógica de la contrastación de hipótesis se ha previsto los siguientes procesos: formulación de las hipótesis estadísticas que han de contrastarse, elección de una determinada estadística, análisis de la distribución muestral, adopción de un nivel de significancia, toma de decisión y control de los posibles tipos de errores.

4. Para el análisis de la evolución de la comprensión de los significados, capacidad de operar con fracciones y conocimiento de propiedades elementales de los números racionales se utilizó la prueba o inferencia respecto a la diferencia entre las medias de dos muestras independientes de varianza poblacional desconocida.

   Para esta prueba, según Johnson (1988) si se seleccionan aleatoriamente muestras independientes de tamaños n_1 y n_2 de grandes poblaciones con medias μ_1 y μ_2 y varianza σ_1^2 y σ_2^2 respectivamente, la distribución de muestreo de $\bar{x}_1$-$\bar{x}_2$, la diferencia entre las medias, entonces:

   - La distribución de datos es aproximadamente normal.
   - Tiene media: $\mu_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \mu_1 - \mu_2$.
   - Tiene desviación estándar: $\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} - \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$.

   Si se sume que, la distribución muestral es aproximadamente normal, se utilizará la estadística *Z* en las inferencias. En los contrastes o pruebas de hipótesis, *Z* estará determinado por

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

   cuando σ_1y σ_2 son conocidos.

   En tanto que la hipótesis alternativa H_a: μ_A - $\mu_B > 0$, se admite que la prueba será unilateral (de una sola cola).

3.8.2 ESTADÍSTICA CORRELACIONAL

El fenómeno de comprensión de los significados del número racional, por su complejidad necesitan explicaciones multicausales, como en el conocimiento de algoritmos de las operaciones básicas y sus propiedades. El modelo de regresión que se ajusta al fenómeno de estudio es la lineal múltiple (Silva, 1992).

La forma del modelo de regresión para 2 variables independientes está dado por:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$$

3.8.2.1 Determinación de la Ecuación de Regresión

Los parámetros del modelo (b_K) o coeficientes de regresión se estiman por ecuaciones normales:

$$\sum_{i=1}^{n} Y = nb_o + b_1 \sum_{i=1}^{n} X_1 + b_2 \sum_{i=1}^{n} X_2$$

$$\sum_{i=1}^{n} YX_1 = b_o \sum_{i=1}^{n} X_1 + b_1 \sum_{i=1}^{n} X_1{}^2 + b_2 \sum_{i=1}^{n} X_1 X_2$$

$$\sum_{i=1}^{n} YX_2 = b_o \sum_{i=1}^{n} X_2 + b_1 \sum_{i=1}^{n} X_1 X_2 + b_2 \sum_{i=1}^{n} X_2^2$$

La estimación de los parámetros del modelo, también se puede realizar por método matricial. Para calcular los estimadores b_0, b_1, b_2, es necesario definir una matriz X y una matriz vector columna Y, constituidos de la siguiente manera:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} \end{bmatrix}_{n\times 3} \qquad Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \dots \\ Y_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

La estimación matricial de los parámetros se da por la siguiente fórmula:

$$b_k = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}_{3\times 1} = \left(X^T X\right)^{-1} (X^T Y)$$

Donde:

X^T : es la transpuesta de la matriz *X.*

$\left(X^T X\right)^{-1}$: es la inversa de la matriz $(X^T X)$.

$(X^T Y)$: es el producto de la matriz X^T por la matriz vector columna *Y.*

3.8.2.2 Evaluación General del Modelo de Regresión Múltiple

La evaluación del modelo de regresión múltiple se realiza midiendo la magnitud en que los valores estimados o predichos por el modelo se desvían de los valores observados en la muestra. Si el modelo se ajusta a los datos, la desviación es nula. Esto es:

$$Y_i - \hat{Y}_i = 0, \text{ o } Y_i = \hat{Y}_i$$

Para obtener los valores estimados o predichos por el modelo de regresión múltiple se resuelve la siguiente ecuación matricial:

$$\hat{Y} = Xb,$$

donde, *b* es la matriz vector columna de estimadores de mínimos cuadrados y *X* es la matriz de las variables independientes.

3.8.2.3 Coeficiente de Determinación Múltiple

El modelo de regresión múltiple supone que la variación total de la variable dependiente está formada por una variación explicada, la cual mide la magnitud de la variable total que es explicada por el modelo de regresión estimado y por una variación inexplicada, que mide la magnitud de la variación total que no queda comprendida dentro del modelo de regresión ajustado. Esta suposición se expresa en la siguiente ecuación:

$$SC_{total} = SC_{explicada} + SC_{inexplicada}$$

SC: Suma de cuadrados.

Queda expresado matemáticamente en la siguiente fórmula:

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

Donde:

Y : Valor observado.

$\bar{Y}$: Promedio.

$\hat{Y}$: Valor estimado.

3.8.2.4 Análisis de Varianza

Este análisis de varianza sirve para probar la hipótesis nula de que:

$\beta_1 = \beta_2 = 0$

Lo que significa que, todas las variables independientes no tienen ningún valor explicativo de la variación de Y. Es decir, la capacidad de efectuar las operaciones básicas con fracciones y el conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales no tienen ningún valor explicativo en la comprensión de los significados del número racional.

Tomando los tres términos de la suma de cuadrados con sus respectivos grados de libertad asociados, se puede construir la tabla de abajo, que sirve para probar la hipótesis nula:

$\beta_1 = \beta_2 = \ldots \beta_k = 0$

es decir, todas las variables independientes no tienen ningún valor explicativo de la variación de Y.

Tabla 3.4.

Análisis de Varianza para el modelo de regresión lineal múltiple.

Fuentes de variación	*SC*	*gl*	*MC*	*Razón F*
Regresión Lineal	$SC_{\exp licada}$	*K*	$\frac{SC_{\exp licada}}{K}$	$\frac{MC_{\exp licada}}{MC_{in\exp licada}}$
Residual (error)	$SC_{in\exp licada}$	*n*-*K*-1	$\frac{SC_{in\exp licada}}{n-K-1}$	
Total	SC_{total}	*n*-1		
$_{1-\alpha}F_{K,n-K-1}$	Si $F_c > F_t$, entonces se rechaza H_o.			

Donde:

SC : Suma de cuadrados.

gl : Grados de libertad.

MC : Media de cuadrado.

F_c : Valor de F calculado.

F_t : Valor de F tabulado ($_{1-\alpha}F_{K,n-K-1}$)

k : Número de variables independientes.

n : Total de valores en la muestra.

Para nuestro estudio:

H_0: $\beta_1 = \beta_2 = 0$

H_1: $\beta_1 \neq \beta_2 \neq 0$

$\alpha = 0.05$ (α: nivel de la probabilidad de significancia).

3.8.2.5 Evaluación Particular del Modelo de Regresión Múltiple

Fue necesario determinar la importancia relativa de cada variable independiente, en particular en la descripción de la variable dependiente (Silva, 1992, p. 551-554).

a. Evaluación de los parámetros del modelo

Para determinar la importancia que tiene cada variable independiente en la explicación de la variable dependiente es necesario computar el estadístico t_{bj}, que se distribuye como el valor de la distribución *t de Student* con *n-k-1* grados de libertad, el cual se define por la ecuación:

$$t_{bj} = \frac{b_j}{S_{bj}}$$

Donde:

b_j: es el estimador de mínimos cuadrados de β_j, y

S_{bj}: es el error estándar del estimador b_j, que se calcula mediante la fórmula:

$$S_{bj} = s\sqrt{c_{jj}}$$

donde:

$$s = \sqrt{MC_{in\exp licada}}$$

C_{jj} es el *(j, j)* ésimo elemento de la matriz $(X^TX)^{-1}$ usada en la estimación de los mínimos cuadrados, son los valores de la diagonal de la matriz definida.

Para nuestro caso será:

$$(X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Los estimadores de los parámetros son:

$$b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}_{3\times 1} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

y el error estándar es:

$$s = \sqrt{MC_{in\exp licada}}$$

Así pues, se pueden establecer las siguientes hipótesis:

H_0: $\beta_0 = 0$

H_1: $\beta_0 \neq 0$

$\alpha = 0.05$

Recordemos que β_0 representa el punto en el que la ecuación de regresión múltiple corta al eje Y. Conforme a esto, la hipótesis nula establece que el modelo de regresión parte de cero. Por el contrario, la hipótesis alterna señala que el origen es diferente de cero.

Sustituyendo tenemos entonces, para la ordenada al origen, el error estándar del estimador b_0 es:

$$S_{bo} = s\sqrt{c_{oo}}$$

b. Intervalos de confianza para los parámetros

Los coeficientes de regresión parcial tienen un intervalo de confianza, y se calcula con la siguiente ecuación:

$$b_j \pm t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n-k-1)} s\sqrt{c_{jj}}$$

3.8.2.6 Correlación Parcial

Utilizamos para medir la intensidad de la relación lineal entre dos variables, cuando se ha eliminado el efecto de la otra variable, se usa el coeficiente de correlación parcial.

Denotaremos el coeficiente $r_{y1.2}$ como la medida de la correlación entre la variable dependiente Y y X_1, manteniéndose constante X_2. Los coeficientes de correlación parcial pueden calcularse a partir de los coeficientes de correlación simple, ya que estos evalúan la correlación entre dos variables, cuando no se ha hecho ningún intento de controlar a las demás.

Los coeficientes de correlación simple se calculan a partir de la matriz cuadrada $(k+1)^2$. Cuando existen k variables independientes y una variable dependiente, se obtiene una matriz R de correlación simple de la forma:

$$R = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} Y & X_1 & X_2 & \cdots\cdots & X_k \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & r_{y1} & r_{y2} & \ldots & r_{yk} \\ r_{1y} & 1 & r_{12} & \ldots & r_{1k} \\ r_{2y} & r_{21} & 1 & \ldots & r_{2k} \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ r_{ky} & r_{k1} & r_{k2} & \ldots & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} Y \\ X_1 \\ X_2 \\ . \\ . \\ . \\ X_K \end{array} \end{array}$$

esta matriz es cuadrada y simétrica.

En nuestro estudio la matriz será de 3x3. Se tiene dos variables independientes y una dependiente, luego, existen tres coeficientes de correlación simple, que son:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{y1} & r_{y2} \\ r_{1y} & 1 & r_{12} \\ r_{2y} & r_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

r_{y1}, la correlación simple entre Y y X_1,

r_{y2}, la correlación simple entre Y y X_2,

r_{12}, la correlación simple entre X_1 y X_2,

Para calcular la matriz *R*, primero se deben estandarizar las puntuaciones de cada variable. Las calificaciones estándar tienen una media de cero y una varianza de uno. La fórmula para calcular las calificaciones estándar es:

$$Z = \frac{X_i - \bar{X}}{s}$$

De la puntuación tipificada para cada una de las variables calculamos la matriz de correlación *R*, por medio de la fórmula:

$$R = \frac{1}{n} M^T M$$

a. Contraste de los coeficientes de Correlación Parcial

Aquí se prueba la hipótesis nula de que el valor correspondiente en la población de cualquier coeficiente de correlación parcial es cero, por medio de la fórmula:

$$t = r_{y1.2....k} \left(\frac{n-k-1}{1-r^2_{y1,2,...,k}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

la cual se distribuye como el valor de la distribución *t* de *Student,* con *n*-*k*-1 grados de libertad.

TÍTULO SEGUNDO

TRABAJO DE CAMPO

CAPÍTULO IV

DE LOS INSTRUMENTOS DE INVESTIGACIÓN Y RESULTADOS

4.1 VALIDACIÓN DE LOS INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS

Se evaluó la capacidad que poseen los instrumentos para obtener y proporcionar información directa y efectiva acerca de la comprensión de los significados, manejo de algoritmos de las operaciones básicas y conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales.

4.1.1 VALIDACIÓN DEL CONTENIDO DE LAS PRUEBAS

Para la evaluación de la comprensión de los significados que poseen los estudiantes se ha diseñado una prueba de seis ítems, correspondiente a los significados parte-todo continuo, parte-todo discreto, cociente, medida, razón y operador. La secuencia del proceso de diseño del instrumento se inicia con la definición del número racional, para esta tarea se tomó como fuente el documento de Gairín y Sancho (2002); luego, se expone los objetivos de cada ítem como se detalla en Tabla 4.1.

Las definiciones de los significados del número racional consideradas por Gairín y Sancho (2002) en esta investigación son:

El número racional como “parte-todo”: Este significado se da cuando existe la división de una unidad en partes iguales de las que se “destacan” algunas. Las partes en que se ha dividido la unidad son el denominador de la fracción, mientras que las partes que se destacan están indicadas por el numerador. La relación “parte-todo” se presenta cuando un “todo” (continuo o discreto) se divide en partes “congruentes” (equivalentes como cantidad de superficie o cantidad de “objetos”). La fracción indica la relación que existe entre un número de partes y el número total de partes (que puede estar formado por varios “todos”). El todo recibe el nombre de unidad.

El número Racional como “cociente”: En este caso, la fracción ***a/b*** representa una situación de reparto, en la que se trata de conocer el tamaño de cada una de las partes que resulta de distribuir ***a*** unidades en ***b*** partes iguales.

El número Racional como “medida”: En este constructo se plantea la necesidad de medir la longitud de un segmento AB tomando como unidad de medida la longitud de un segmento CD, que no está incluido un número entero de veces en el segmento AB.

En términos generales se puede decir que la fracción como medida responde a la necesidad de medir una magnitud tomando como unidad de medida otra magnitud de la misma naturaleza que la anterior que no está incluido un número entero de veces en ella. El objeto a medir no siempre será una longitud, puede ser un área, el tiempo, masa, etc.

El número Racional como “razón”: En este constructo *a/b* no representa la partición de ningún objeto o cantidad de magnitud, sino la relación que existe entre dos cantidades de magnitud, la comparación entre los cardinales de dos conjuntos, o la comparación entre una cantidad de magnitud y el cardinal de un conjunto. La comparación se establece entre las cantidades que expresan el numerador y el denominador y, por tanto, el orden en que se citan las magnitudes que se están comparando es esencial. La comparación entre cantidades que indica la fracción ha de entenderse como el tanto por uno, es decir, como la cantidad de la magnitud a que se refiere el numerador que corresponde a cada unidad de la magnitud considerada en el denominador

El número Racional como "operador": En este constructo se parte de un número o figura dada, y mediante la realización de operaciones se transforma en un segundo número o figura, por tanto, se puede interpretar a la fracción como una función de cambio. El trabajo con operadores conecta las fracciones con las propiedades algebraicas de multiplicación inversa y de identidad de elementos, y con propiedades del análisis como son los de composición de funciones.

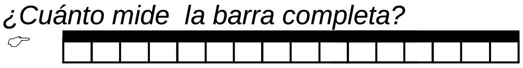
La validez descriptiva se logra a partir de la definición del universo conductual por evaluar. Para ello se ha delimitado:

a) Los tipos de contenidos o tareas por considerar como base representativa, tanto de la comprensión de significados como del manejo de algoritmos de las operaciones básicas y las propiedades elementales de los números racionales.

b) Las formas de comportamiento que se desea observar y evaluar, está establecido por los objetivos y concretado en los ítems. Tal como se presenta en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1

Universo conductual para la distribución de los ítems por significados del número racional.

Universo de significados	Objetivos	Enunciado de Ítems
Parte-todo (continuo)	Interpretar una situación problemática, enunciada en forma verbal, de la fracción en su significado 'parte-todo continuo' proponiendo una explicación simbólica y gráfica.	**[S1]** *Si divide una naranja en cuatro trozos iguales, de los cuales come tres, ¿qué fracción de naranja le queda?*
Parte-todo (discreto)	Interpretar una situación problemática de la fracción, enunciada en forma verbal, en su significado 'parte-todo discreto' proponiendo una explicación simbólica y gráfica.	**[S2]** *Si tienes tres lapiceros de color rojo y cuatro de color azul, ¿qué fracción del total de lapiceros son de color azul?*
Cociente	Interpretar una situación problemática, enunciada en forma verbal, de la fracción en su significado como "cociente" y explica el reparto usando símbolos y gráficas.	**[S3]** *Tres amigos quieren repartirse 5 barras de chocolate de manera equitativa, ¿qué cantidad de chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?*
Medida	Interpretar una representación gráfica lineal que trasmite el significado de la fracción como 'medida' y traduce a representación simbólica.	**[S4]** *Utilizando esta unidad de medida:*  *¿Cuánto mide la barra completa?* 
Razón	Interpretar el enunciado problemático que involucra fracciones en su significado de 'razón' a través de una explicación simbólica y o gráfica.	**[S5]** *Para elaborar una torta, se necesitan cuatro kilos de harina y nueve huevos, ¿cuál es la razón entre la cantidad de harina y huevos?*
Operador	Identificar la fracción en su significado como 'operador' y lo utiliza para la solución de una situación problemática.	**[S6]** *En un salón de 35 estudiantes aprueban matemática solo 4/5. ¿Cuántos aprueban matemática?*

Elaborado por el investigador.

Este instrumento determina el grado de comprensión del universo de situaciones relativo a los significados que tiene el número racional en su representación fraccional. La validez de contenido se justifica por cuanto los ítems que conforman el instrumento, representan el universo de significados establecidos por los investigados. Además, tienen la característica de ser elementales y libre de distractores.

Tabla 4.2

Universo conductual para la distribución de los ítems por tipo de operación aritmética básica con fracciones.

Universo de operaciones	Objetivos	Enunciado del Ítems
Adición	Realizar la adición de fracciones utilizando el algoritmo adecuado.	**[O1]** *Realizar la adición de fracciones:* $\frac{3}{5}+\frac{4}{7}=$ ______
Sustracción	Efectuar la operación de sustracción de fracciones.	**[O2]** *Realizar la sustracción de fracciones:* $\frac{3}{7}-\frac{5}{6}=$ ______
Multiplicación	Efectuar la operación de multiplicación de fracciones utilizando el algoritmo correspondiente.	**[O3]** *Realizar la multiplicación de fracciones:* $\frac{7}{8}\times\frac{6}{9}=$ ______
División	Efectuar la división de fracciones utilizando el algoritmo correctamente.	**[O4]** *Realizar la división de fracciones:* $\frac{4}{7}\div\frac{5}{6}=$ ______

Elaborado por el investigador.

El instrumento que evalúa el manejo de algoritmos de las operaciones básicas con fracciones: adición, sustracción, multiplicación y división es esencialmente elemental, lo que se pretende con este instrumento es evaluar si los estudiantes de los cinco grados de estudio del nivel secundario puede efectuar las operaciones con dos números fraccionarios. Se ha tenido el cuidado en no introducir distractores en su formulación, de ahí su enunciado simple, directo y concreto “realizar la operación”. Es evidente que el Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular (DCN, 2008) y los libros de texto patrocinados por el Ministerio de Educación promueven el estudio de las operaciones básicas con fracciones, así en el MED. DCN (2008) señala la capacidad: “Calcula la suma y la diferencia de fracciones heterogéneas usando fracciones homogéneas” (p. 197) en cuarto grado de educación primaria y como conocimiento “Adición, sustracción, multiplicación y división con fracciones” (p. 203) en sexto grado. Considerando los argumentos precedentes se afirma con seguridad que el

100% de los estudiantes de la muestra estudiaron los algoritmos básicos de las operaciones con fracciones.

Tabla 4.3

Universo conductual de la distribución de los ítems por propiedad elemental de los números racionales.

Universo de propiedades elementales	Objetivos y fuente	Enunciado del Ítems
Definición del conjunto de los números racionales	- Identificar la definición de número racional. **Fuente:** Palomares (2008), p. 73.	**[P1]** Identifique y marque la definición correcta del conjunto de los números racionales: ☐ a) Es el conjunto de los números enteros y fracciones, por ejemplo $\frac{\sqrt{3}}{5}$. ☐ b) Un número racional es el cociente de dos **números**, tal que el divisor es diferente de cero. ☐ c) $Q=\left\{(a,b)/a\in Z; b\in Z \ \wedge \ b\neq 0\right\}$ ☐ d) $Q=\left\{\frac{a}{b}/a\in Z \ \wedge \ b\in Z\right\}$
Opuesto aditivo	- Formular el opuesto de un número racional escrito como fracción. **Fuente:** Palomares (2008), p. 76.	**[P2]** Escriba en el recuadro el opuesto "aditivo" del siguiente número racional: $\frac{3}{8}$ ☐
Inverso multiplicativo	- Formula el inverso de un número racional como fracción. **Fuente:** Palomares (2008), p. 79. Vera (2004), p. 83.	**[P3]** Escriba en el recuadro el inverso "multiplicativo" del siguiente número racional: $\frac{2}{5}$ ☐
Clase de equivalencia	- Evaluar la relación de equivalencia del número racional en su representación fraccional. **Fuente:** Palomares (2008), p. 73. Vera (2004), p. 75. Ozejo, et al. (2004), p. 65.	**[P4]** Completa el recuadro vacío para que las fracciones sean equivalentes: $\frac{3}{5}\cong\frac{\square}{15}$
Relación de orden	- Ordenar de menor a mayor los números racionales en su representación fraccional. **Fuente:** Vera (2004), p.79. Ozejo, et al. (2004), p. 11.	**[P5]** Ordena de menor a mayor los siguientes números racionales: $\frac{3}{7}$ y $\frac{2}{5}$. ___ < ___
Densidad	- Interpretar la propiedad de densidad de los números racionales. **Fuente:** Palomares (2008), p. 77. Vara(2004), p. 82 Ozejo, et al. (2004), p. 11.	**[P6]** Hallar un número racional entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$.

Elaborado por el investigador.

El instrumento que evalúa el conocimiento sobre las propiedades elementales de los números racionales que posee el estudiante de educación secundaria, tiene por finalidad evaluar el conocimiento sobre la definición de número racional, opuesto aditivo, inverso multiplicativo, relación de orden, relación de equivalencia y densidad de los números racionales.

Estas propiedades fueron seleccionadas de entre otras muchas que poseen los números racionales por ser elementales; y de orden común en todos los libros de texto del primer y segundo grado de educación secundaria y especialmente por los distribuidos por el Ministerio de Educación; Palomares (2008) y Vera (2004). Así mismo, ya en los libros de texto de sexto y quinto grado del nivel de educación primaria se avizora las propiedades de las fracciones, por ejemplo Ozejo, et al. (2004), distribuido por el Ministerio de Educación, es explícito respecto al abordaje de las propiedades de relación de orden y equivalencia de las fracciones, además de las operaciones básicas.

Los instrumentos "*Prueba sobre operaciones básicas con fracciones*" y "*Prueba sobre propiedades elementales de los números racionales*" ostentan una validez de contenido, por cuanto contienen una muestra representativa de las conductas y conocimientos que se pretende medir; así mismo, se ha evitado introducir factores no pertinentes que pueden distraer la atención del sujeto observado. Para su validación de contenido se ha realizado un examen lógico del contenido y confirmado que los reactivos cubren los objetivos de la evaluación.

4.1.2 VALIDEZ CONCURRENTE DE LOS INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS

En la investigación se tuvo especial cuidado en conseguir la validez concurrente. Para conseguirlo se ha procedido a correlacionar dos resultados; primero, los resultados de la prueba que se va a validar, y segundo, el criterio externo.

Pruebas que se validaron: (X)

a) Prueba sobre comprensión de los significados del número racional
b) Prueba sobre operaciones básicas con fracciones

c) Prueba sobre propiedades elementales de los números racionales

Criterios Externos: (Y)

Estimación del investigador como resultado de una sesión de aprendizaje en el que se trabajó una práctica calificada de:

a) Práctica de interpretación de los significados del número racional en su representación fraccional.

b) Taller de operaciones combinadas de adición, sustracción multiplicación y división de fracciones.

c) Práctica sobre la propiedades del los números racionales.

Para determinar la validez concurrente, se realizó un análisis estadístico correlacional de los resultados. Este análisis se hizo utilizando la correlación por rangos o lugares (*rho*). Tal procedimiento fue propuesto por Spearman y se basa en la fórmula:

$$rho = 1 - \frac{6\sum D_R^2}{N(N^2 - 1)}$$

$\sum D_R^2$: Suma de los cuadrados de las diferencias entre los rangos.

N : Total de parejas de datos correlacionados.

Escala de medición cualitativa: $0 \leq rho \leq 1$

Cálculo de la correlación por rangos para la prueba de significados:

Tabla 4.4

Rango de puntuaciones obtenidas para la validación de la prueba de significados.

Sujetos	Prueba X	Criterio Y	Lugar o rango de R_X	Lugar o rango de R_Y	Diferencia de rangos D_R	D_R^2
1	3	6	16	20	-4	16
2	2	6	20.5	20	0.5	0.25
3	5	12	5	5.5	-0.5	0.25
4	1	10	24	10	14	196
5	4	5	10	24	-14	196
6	4	9	10	12	-2	4
7	4	10	10	10	0	0
8	4	10	10	10	0	0
9	6	15	2	2	0	0
10	6	17	2	1	1	1
11	6	14	2	3	-1	1
12	2	6	20.5	20	0.5	0.25
13	2	6	20.5	20	0.5	0.25
14	2	6	20.5	20	0.5	0.25
15	1	5	24	24	0	0
16	1	5	24	24	0	0
17	4	11	10	7.5	2.5	6.25
18	3	7	16	16	0	0
19	3	7	16	16	0	0
20	4	11	10	7.5	2.5	6.25
21	4	8	10	13.5	-3.5	12.25
22	5	13	5	4	1	1
23	5	12	5	5.5	-0.5	0.25
24	3	7	16	16	0	0
25	3	8	16	13.5	2.5	6.25
					$\sum D_R^2$=	447.5

Fuente: Instrumentos de recolección de datos.
Elaborado por el investigador.

De acuerdo a datos procesados, el cálculo del coeficiente de correlación por rangos (*rho*) para verificar la validez concurrente de la *Prueba sobre comprensión de los significados del número racional* es:

$$rho = 1 - \frac{6 \times 447.5}{25(25^2 - 1)} = 0.82788462$$

El valor *rho*= 0.82788462 equivale a una correlación o asociación muy aceptable, que permite sostener que “existe una relación directa y significativa", pero no determinante, entre el desempeño en la *Prueba sobre comprensión de los significados del número racional* y el criterio externo *Interpretación de los significados del número racional en su representación fraccional*. En términos concluyentes, la prueba en cuestión posee una validez concurrente aceptable.

Correlación por rangos para la prueba de operaciones básicas

Tabla 4.5

Rango de puntuaciones obtenidas para la validación de la prueba de operaciones básicas.

Sujetos	Prueba X	Criterio Y	Lugar o rango de R_X	Lugar o rango de R_Y	Diferencia de rangos D_R	D_R^2
1	14	18	6.5	1.5	5	25
2	14	18	6.5	1.5	5	25
3	12	17	12	3	9	81
4	12	16	12	4.5	7.5	56.25
5	7	10	23.5	18.5	5	25
6	7	6	23.5	23.5	0	0
7	6	5	25	25	0	0
8	15	16	4.5	4.5	0	0
9	11	11	15	16.5	-1.5	2.25
10	9	9	19.5	20	-0.5	0.25
11	8	8	21.5	21	0.5	0.25
12	8	7	21.5	22	-0.5	0.25
13	12	12	12	14	-2	4
14	13	14	9	8.5	0.5	0.25
15	13	14	9	8.5	0.5	0.25
16	13	13	9	11	-2	4
17	10	11	17.5	16.5	1	1
18	10	10	17.5	18.5	-1	1
19	17	15	1	6.5	-5.5	30.25
20	16	15	2.5	6.5	-4	16
21	16	13	2.5	11	-8.5	72.25
22	15	13	4.5	11	-6.5	42.25
23	9	6	19.5	23.5	-4	16
24	11	12	15	14	1	1
25	11	12	15	14	1	1
					$\sum D_R^2=$	404.5

Fuente: Instrumentos de recolección de datos.
Elaborado por el investigador.

De los datos procesados, el cálculo del coeficiente de validez concurrente para la *Prueba sobre operaciones básicas con fracciones* es:

$rho = 1 - \frac{6 \times 404.5}{25(25^2-1)}$ =0.84442308

El coeficiente de correlación de Spearman *rho*= 0.84442308 tiene un valor cercano a 1, expresa que las calificaciones obtenidas en la Prueba sobre operaciones básicas con fracciones y en el *Taller de Operaciones combinadas de adición, sustracción multiplicación y división de fracciones* están bastante asociados o son muy afines, por tanto, es aceptable la validez concurrente del instrumento materia de validación.

Correlación por rangos para la prueba de propiedades elementales

Tabla 4.6

Rango de puntuaciones obtenidas para la validación de la prueba de propiedades elementales.

Sujetos	Prueba X	Criterio Y	Lugar o rango de R_X	Lugar o rango de R_Y	Diferencia de rangos D_R	D_R^2
1	17	19	1.5	1	0.5	0.25
2	8	11	21.5	16	5.5	30.25
3	7	11	24.5	16	8.5	72.25
4	15	15	4.5	7	-2.5	6.25
5	16	15	3	7	-4	16
6	11	11	15	16	-1	1
7	14	16	7	4.5	2.5	6.25
8	10	6	17.5	24	-6.5	42.25
9	5	12	25	13.5	11.5	132.25
10	13	13	10	11	-1	1
11	17	18	1.5	2	-0.5	0.25
12	12	10	12.5	18.5	-6	36
13	7	6	24.5	24	0.5	0.25
14	11	7	15	22	-7	49
15	12	10	12.5	18.5	-6	36
16	11	12	15	13.5	1.5	2.25
17	8	8	21.5	21	0.5	0.25
18	14	15	7	7	0	0
19	13	14	10	9	1	1
20	10	13	17.5	11	6.5	42.25
21	9	6	19.5	24	-4.5	20.25
22	9	9	19.5	20	-0.5	0.25
23	15	16	4.5	4.5	0	0
24	14	17	7	3	4	16
25	13	13	10	11	-1	1
					$\sum D_R^2$=	512.5

Fuente: Instrumentos de recolección de datos.
Elaborado por el investigador.

De acuerdo a datos procesados, el cálculo del coeficiente por rangos (*rho*) de validez concurrente del instrumento *Prueba sobre propiedades elementales de los números racionales* es:

$rho = 1 - \frac{6 \times 447.5}{25(25^2-1)}$ =0.82788462

El coeficiente de correlación por rangos *rho* = 0.82788462 revela una asociación o correlación positiva fuerte entre los calificativos obtenidos con la *Práctica sobre las propiedades de los números racionales* y la *Prueba sobre las propiedades elementales de los números racionales*. En términos generales, se puede aseverar que el instrumento en cuestión posee una validez aceptable.

Respecto a los tres casos de validación concurrente, podemos concluir que estas pruebas son útiles para la función de convergencia informativa con fines de diagnóstico del alumno. Se infiere que las pruebas utilizadas son un procedimiento alternativo muy adecuado, es decir, válidos para juzgar sin grandes equívocos la capacidad para comprender los significados del número racional, efectuar operaciones básicas con fracciones e interpretar las propiedades elementales de los números racionales.

4.2 CONFIABILIDAD DE LOS INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS

Para el proceso de recolección de datos se evaluó la estabilidad de los mismos, analizando la bondad que poseen los instrumentos, para obtener y suministrarnos información idéntica o similar sobre la comprensión de los significados, dominio de las operaciones básicas y conocimientos de las propiedades elementales de los números racionales, que posee un determinado estudiante, indagadas en dos oportunidades con un intervalo de tiempo prudente.

En este estudio se decidió por el método de prueba reiterada para evaluar la estabilidad de los datos. Se calculó el coeficiente de estabilidad, el cual deberá ser mayor que +0.70 o más para garantizar la efectividad de la estimación de la confiabilidad.

El método de prueba reiterada requirió la aplicación del mismo instrumento de prueba dos veces, al mismo grupo de estudiantes, con un intervalo de dos días. Los resultados de las pruebas reiteradas se comparan mediante la correlación, obteniendo el coeficiente de confiabilidad que es representado por el grado de estabilidad de la capacidad cognitiva de los estudiantes frente a la misma prueba en ambas ocasiones.

Considerando que el desempeño de los estudiantes son mensurados en un nivel ordinario, siendo el número de datos inferior a 31, se decide que para el cálculo del coeficiente de confiabilidad se utilizará la correlación por rangos (*rho)* propuesta por Spearman.

Cálculo de la correlación por rangos para la prueba de significados:

Tabla 4.7

Rango de puntuaciones obtenidas para la confiabilización de la prueba de significados.

Sujetos	Prueba X	Criterio Y	Lugar o rango de R_X	Lugar o rango de R_Y	Diferencia de rangos D_R	D_R^2
1	4	5	8.5	4	4.5	20.25
2	4	4	8.5	7	1.5	2.25
3	6	4	2	7	-5	25
4	2	2	14	14	0	0
5	0	1	17	16.5	0.5	0.25
6	5	5	5	4	1	1
7	5	4	5	7	-2	4
8	2	3	14	10.5	3.5	12.25
9	5	5	5	4	1	1
10	3	3	11.5	10.5	1	1
11	4	3	8.5	10.5	-2	4
12	4	2	8.5	14	-5.5	30.25
13	3	3	11.5	10.5	1	1
14	6	6	2	1.5	0.5	0.25
15	1	1	16	16.5	-0.5	0.25
16	6	6	2	1.5	0.5	0.25
17	2	2	14	14	0	0
					$\sum D_R^2=$	103

Fuente: Instrumentos de recolección de datos.
Elaborado por el investigador.

De acuerdo a los datos procesados, el cálculo del coeficiente por rangos (*rho*) de confiabilidad de la *Prueba sobre comprensión de los significados del número racional* es:

$$rho = 1 - \frac{6 \times 103}{17(17^2 - 1)} = 0.87377451$$

Como el valor obtenido 0.87377451 es superior al coeficiente 0.70, establecido como asociación mínima aceptable para propósitos de confiabilidad, entonces se infiere que el desempeño en la *Prueba sobre comprensión de los significados del número racional* mostrada en las ocasiones por los estudiantes ha permanecido real y efectivamente estable.

Cálculo de la correlación por rangos para la prueba de operaciones básicas:

Tabla 4.8

Rango de puntuaciones obtenidas para la confiabilización de la prueba de operaciones básicas.

Sujetos	Prueba X	Criterio Y	Lugar o rango de R_X	Lugar o rango de R_Y	Diferencia de rangos D_R	D_R^2
1	10	10	14.5	15	-0.5	0.25
2	13	13	7	6.5	0.5	0.25
3	15	14	3.5	4.5	-1	1
4	14	15	5.5	2.5	3	9
5	8	8	17.5	19	-1.5	2.25
6	12	12	9	9.5	-0.5	0.25
7	8	9	17.5	17.5	0	0
8	7	9	19	17.5	1.5	2.25
9	11	12	12	9.5	2.5	6.25
10	14	13	5.5	6.5	-1	1
11	16	16	1.5	1	0.5	0.25
12	11	11	12	12.5	-0.5	0.25
13	15	15	3.5	2.5	1	1
14	12	12	9	9.5	-0.5	0.25
15	10	11	14.5	12.5	2	4
16	9	10	16	15	1	1
17	16	14	1.5	4.5	-3	9
18	12	12	9	9.5	-0.5	0.25
19	11	10	12	15	-3	9
					$\sum D_R^2=$	47.5

Fuente: Instrumentos de recolección de datos.
Elaborado por el investigador.

El cálculo del coeficiente por rangos, asociado al coeficiente de estabilidad para la *Prueba sobre operaciones básicas con fracciones* es:

$$rho = 1 - \frac{6 \times 47.5}{19(19^2 - 1)} = 0.95833333$$

El coeficiente de correlación de Spearman *rho*= 0.95833333 es un valor muy superior a 0.70, el cual permite inferir que la *Prueba sobre operaciones básicas con fracciones* es altamente confiable.

Cálculo de la correlación por rangos para la prueba de propiedades elementales

Tabla 4.9

Rango de puntuaciones obtenidas para la confiabilización de la prueba de propiedades elementales.

Sujetos	Prueba X	Criterio Y	Lugar o rango de R_X	Lugar o rango de R_Y	Diferencia de rangos D_R	D_R^2
1	8	9	19	19	0	0
2	12	14	10.5	10.5	0	0
3	8	10	19	17.5	1.5	2.25
4	7	7	21	21	0	0
5	15	17	4.5	3.5	1	1
6	10	12	15	14	1	1
7	16	16	2.5	6	-3.5	12.25
8	8	13	19	12	7	49
9	14	15	7	8.5	-1.5	2.25
10	13	15	9	8.5	0.5	0.25
11	12	11	10.5	16	-5.5	30.25
12	10	8	15	20	-5	25
13	9	10	17	17.5	-0.5	0.25
14	11	12	12.5	14	-1.5	2.25
15	17	19	1	1	0	0
16	16	16	2.5	6	-3.5	12.25
17	11	14	12.5	10.5	2	4
18	15	18	4.5	2	2.5	6.25
19	14	17	7	3.5	3.5	12.25
20	10	12	15	14	1	1
21	14	16	7	6	1	1
					$\sum D_R^2$=	162.5

Fuente: Instrumentos de recolección de datos.
Elaborado por el investigador.

El cálculo del coeficiente por rangos (*rho*) para estimar la confiabilidad de la *Prueba sobre propiedades elementales de los números racionales* es:

$$rho = 1 - \frac{6 \times 162.5}{21(21^2 - 1)} = 0.89448052$$

Dado que *rho*= 0.89448 es superior a 0.70 se puede inferir que la *Prueba sobre propiedades elementales de los números racionales* es confiable, es decir, en la aplicación reiterada de la prueba se ha obtenido información similar.

4.3 TRATAMIENTO ESTADÍSTICO E INTERPRETACIÓN DE DATOS

4.3.1 SOBRE LA COMPRENSIÓN DE LOS SIGNIFICADOS

4.3.1.1 Evaluación Cuantitativa de los Significados del Número Racional

a. Histograma de los significados del número racional

Tabla 4.10

Distribución del desempeño en la Prueba sobre Significados del Número Racional de los colegios de la ciudad de Puno, según el número de respuestas correctas 2009.

Clase	*Frecuencia*	*Frecuencia relativa*	*% acumulado*	*Clase*	*Frecuencia*	*% acumulado*
0	22	5.79	5.79%	2	83	21.84%
1	35	9.21	15.00%	3	80	42.89%
2	83	21.84	36.84%	4	67	60.53%
3	80	21.05	57.89%	6	47	72.89%
4	67	17.63	75.53%	5	46	85.00%
5	46	12.11	87.63%	1	35	94.21%
6	47	12.37	100.00%	0	22	100.00%
Total	380	100.00			380	

Fuente: Anexos A.4.1 a A.4.5.
Elaborado por el investigador.

Existe 83 alumnos que interpretan, tan solo, 2 situaciones problemáticas de significados de números racionales; y 22 estudiantes no logran resolver ninguna. En tanto que, 47 (12.4%) personas interpretan correctamente los 6 significados de los números racionales.

El 57% de los estudiantes resuelven entre 0 y 3 situaciones problemáticas sobre significados. Así mismo, el 60.53% de los estudiantes resuelven 2, 3 o 4 situaciones problemáticas.

Un dato relevante es que la mayoría de los estudiantes resuelven dos cuestiones ascendiendo al orden del 21.84%.

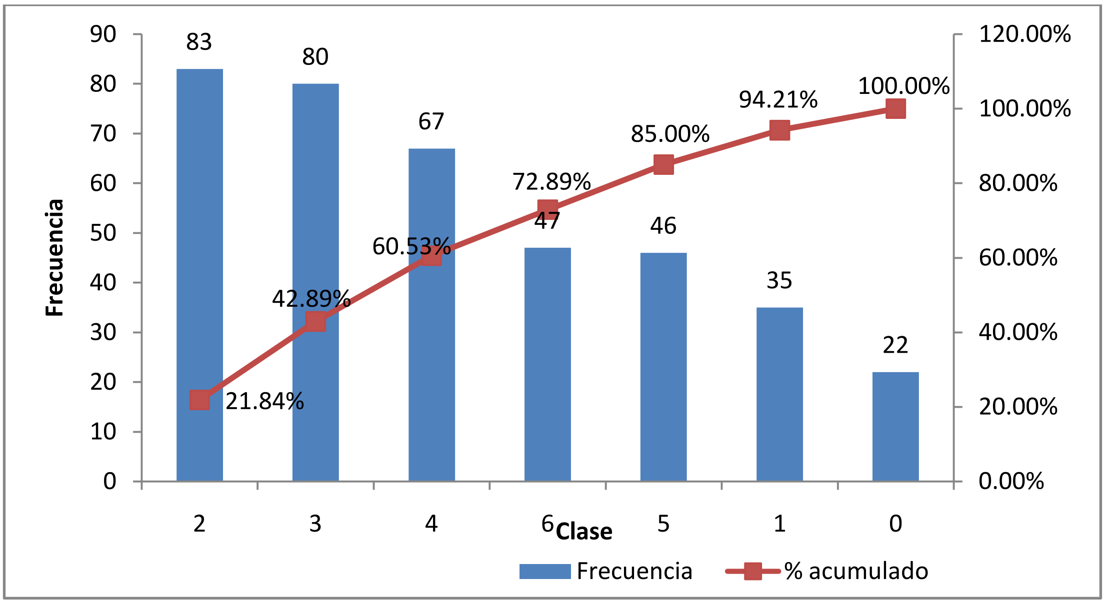


Figura 4.1. Desempeño en la Prueba sobre Significados del Número Racional de los colegios de la ciudad de Puno, según el número de respuestas correctas 2009, en porcentajes.

b. Estadísticas descriptivas de los significados

Tabla 4.11

Estadígrafos descriptivos de la Prueba sobre Significados del Número Racional, según grados de estudios escolares

Estadígrafos	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	Quinto
Promedio	2.115	2.679	3.135	3.597	4.630
Mediana	2	3	3	3	5
Moda	2	2	2	3	6
Desviación estándar	1.450	1.372	1.682	1.426	1.369
Coeficiente de variación	68.560	51.212	53.666	39.637	29.575
Curtosis	-0.285	-0.051	-0.753	-0.854	-0.152
Coeficiente de asimetría	0.344	0.356	-0.077	0.161	-0.765

Fuente: Anexos A.4.1 a A.4.5.
Elaborado por el investigador.

Los resultados de la *Prueba sobre comprensión de los significados del número racional* presentan los siguientes estadígrafos descriptivos: El logro promedio de los estudiantes de los cinco grados de educación secundaria, oscila entre 2.12 y 4.63 puntos. La mitad de los alumnos tienen como máximo 2 en primer grado, en tanto que en los grados segundo, tercero y cuarto la mitad de los estudiantes tienen como máximo 3 puntos. Solo en quinto grado se observa mayor performance. Es en este último grado, que la mayoría de los estudiantes alcanza un puntaje de 6.

En todos los casos el calificativo de los estudiantes se dispersa respecto al valor central en una desviación estándar que oscila entre 1.37 y 1.68 puntos. De primero a cuarto grado el coeficiente de variación es mayor al 30%, entonces el promedio es una medida poco representativa. En tanto que, en quinto grado el coeficiente de variación es 29.6%, menor que 30%, entonces se sostiene que el promedio es una medida representativa del conjunto de datos.

La asimetría es moderadamente positiva en los grados primero, segundo y cuarto, en tanto que en los grados tercero y quinto la asimetría es discretamente negativa, porque el coeficiente de asimetría es negativo, o sea menor que cero. En términos generales, como los coeficientes de asimetría tienden a cero, se puede afirmar que la información se distribuye aproximadamente de forma simétrica. En todos los grados el coeficiente de apuntamiento o curtosis es negativo, lo que indica que la distribución es platicúrtica.

4.3.1.2 Análisis de las Respuestas por Significados

En este numeral se presenta los resultados cuantitativos de la evaluación de la comprensión de los significados del número racional. El análisis cuantitativo abre posibilidades de percepción de patrones de regularidad que permita identificar el fenómeno de interferencia de significados. En adelante se establecen las categorías de análisis para el proceso de clasificación y tipificación de las respuestas a las seis situaciones problemáticas que evalúan los significados.

Las Categorías de análisis

La observación e interpretación del fenómeno de interferencia entre los significados de la fracción ha permitido establecer las siguientes categorías:

- **Empleo Propio Correcto (EPC).** Son las respuestas que evidencian el vínculo fenomenológico del significado propuesto y el uso oportuno del significado en la interpretación de la situación problemática.
- **Empleo Propio Incorrecto (EPI).** Son las respuestas que revelan la incongruencia fenomenológica del significado propuesto en la situación problemática y el uso inapropiado del significado en la solución del problema.
- **Interferencia Externa (IE).** Son las respuestas incorrectas que emplean otros conocimientos ajenos a los números racionales positivos en su representación fraccional.
- **Respuesta Dudosa (RD).** Son las respuestas que no manifiestan indicios suficientes y racionales para ser catalogadas dentro de las categorías anteriores.

A continuación se exhibe la información cuantitativa organizada en tablas, figuras y aproximaciones analíticas.

Tabla 4.12

Distribución porcentual de respuestas a la prueba sobre significados del número racional, según sean del Empleo Propio Correcto y respuestas equivocadas.

Tipo de Respuesta	**Significado**					
	Parte-todo Continuo	**Parte-todo Discreto**	**Cociente**	**Medida**	**Razón**	**Operador**
Empleo Propio Correcto	76.8	62.6	52.9	25.5	52.4	51.05
Equivocada	23.2	37.4	47.1	74.5	47.6	48.95
Total	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.00

Fuente: Anexos A.3.1 a A.3.5.
Elaborado por el investigador.

Los índices porcentuales de la Tabla 4.12 revelan que en la mayoría de los significados existe una superioridad del porcentaje de Empleo Propio Correcto frente a las respuestas equivocadas, pero los porcentajes del significado de medida dejan ver que las respuestas correctas apenas llegan a 25.5% frente al 74.5% de respuestas erradas. Es evidente que los escolares tienen más dificultad para interpretar el significado de medida.

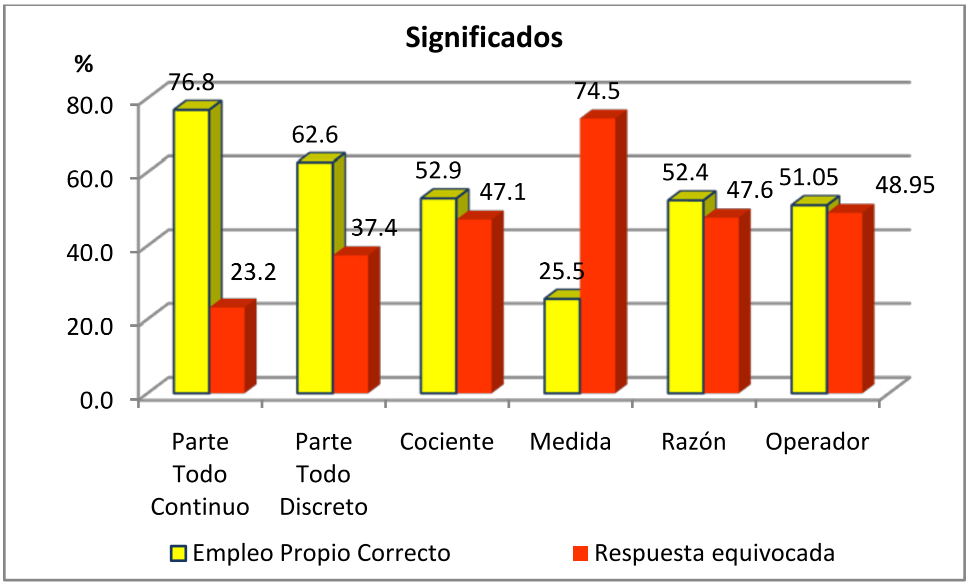


Figura 4.2. *Distribución porcentual de respuestas a la prueba sobre significados del número racional.*

a. Análisis del Significado "Parte-todo Continuo"

Tabla 4.13

Tipos de respuestas al ítem que evalúa el significado "Parte-todo Continuo", por grados de estudio escolar

	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	Quinto	Total
EPC	56	71	84	84	90	77
EPI(R-PT)	15	9	12	9.1	1.4	9.5
IE	9	5.1	1.4	1.3	0	3.4
RD	19	15	2.7	5.2	8.2	10
SUMA	100	100	100	100	100	100

Fuente: Anexos A.3.1 a A.3.5.
Elaborado por el investigador.

La situación problemática *"1) Si divide una naranja en cuatro trozos iguales, de los cuales come tres, ¿qué fracción de naranja le queda?"* evalúa la capacidad de interpretar el significado parte-todo continuo de una fracción. El 77% de los estudiantes emplean correctamente el significado (EPC) en la solución del problema. Entre las respuestas de carácter dudoso (RD) y las respuestas en que se utilizan conocimientos matemáticos extraños a las fracciones, a los que denominamos respuestas de interferencias externas (IE), ascienden al 13.4%.

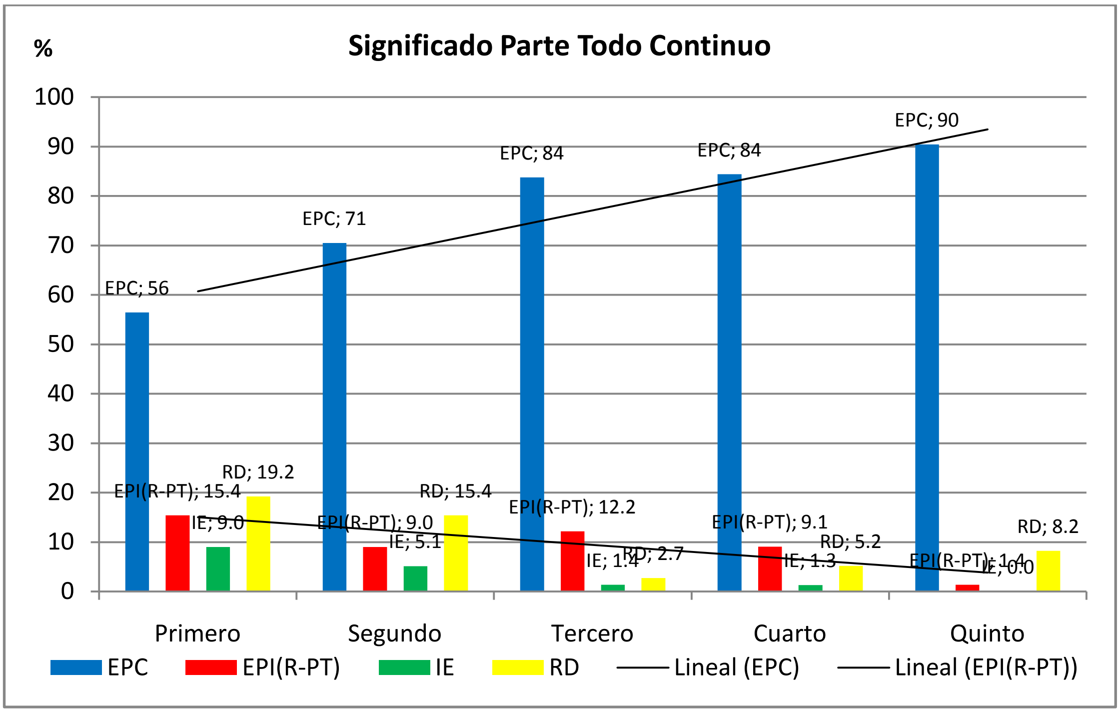


Figura 4.3. Histograma y línea de tendencia del Tipo de respuestas al ítem sobre el "significado parte-todo continuo".

Interferencias en la interpretación del “significado parte-todo continuo”

Una constante en las soluciones erráticas son las llamadas interferencias, que en este caso son del tipo “*interferencia del significado razón en la interpretación parte-todo continuo*” EPI (R-PT). Estas respuestas se caracterizan por que existe un empleo propio de las fracciones pero que son incorrectas, por eso se denominan EPI, estos ascienden al 9.5% en los cinco grados de estudio.

La Figura 4.3 muestra un tendencia ascendente en el porcentaje del Empleo Propio Correcto (EPC), así mismo, la recta de tendencia del Empleo Propio Incorrecto de Interferencia Razón en Parte-todo (EPI(R-PT)) muestra una pendiente negativa.

Interferencia del “significado de razón” en el “significado parte-todo continuo”

Esta interferencia se presenta en la interpretación del significado de parte-todo continuo. Fenómeno por el cual el estudiante establece una relación de razón entre las partes en que fue fraccionado el todo continuo. Así en el ejemplo se observa que la interpretación del estudiante es de razón: “*una parte no sombreada es a las tres partes sombreadas*”.

1) Si divide una naranja en cuatro trozos iguales, de los cuales come tres, ¿qué fracción de naranja le queda?

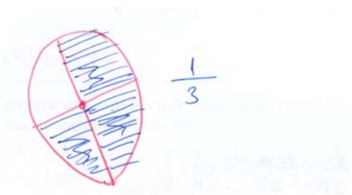


Figura 4.4. Ejemplo de interferencia del “significado de razón en el significado de parte-todo continuo”. Código 5-5° CRB.

b. Análisis del Significado “Parte-todo Discreto”

La interrogante “*2) Si tienes tres lapiceros de color rojo y cuatro de color azul, ¿qué fracción del total de lapiceros son de color azul?”* evalúa la interpretación del significado parte-todo-discreto. Los resultados globales muestran que entre los dos tipos de respuestas (IE) y (RD) asciende a 19.9%. En tanto que las respuestas de Empleo Propio Correcto (EPC) son del orden de 62.6%, con una tendencia al crecimiento, conforme se pasa de un grado inferior a otro superior, así lo ilustra la recta de tendencia de la Figura 4.5.

Tabla 4.14

Tipos de respuestas al ítem que evalúa el significado "Parte-todo Discreto", por grados de estudio escolar

	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	Quinto	Total
EPC	46	49	61	77	82	62.6
EPI(R-PT)	23	15	24	13	11	17.4
IE	5.1	3.8	1.4	2.6	1.4	2.89
RD	26	32	14	7.8	5.5	17.1
SUMA	100	100	100	100	100	100

Fuente: Anexos A.3.1 a A.3.5.
Elaborado por el investigador.

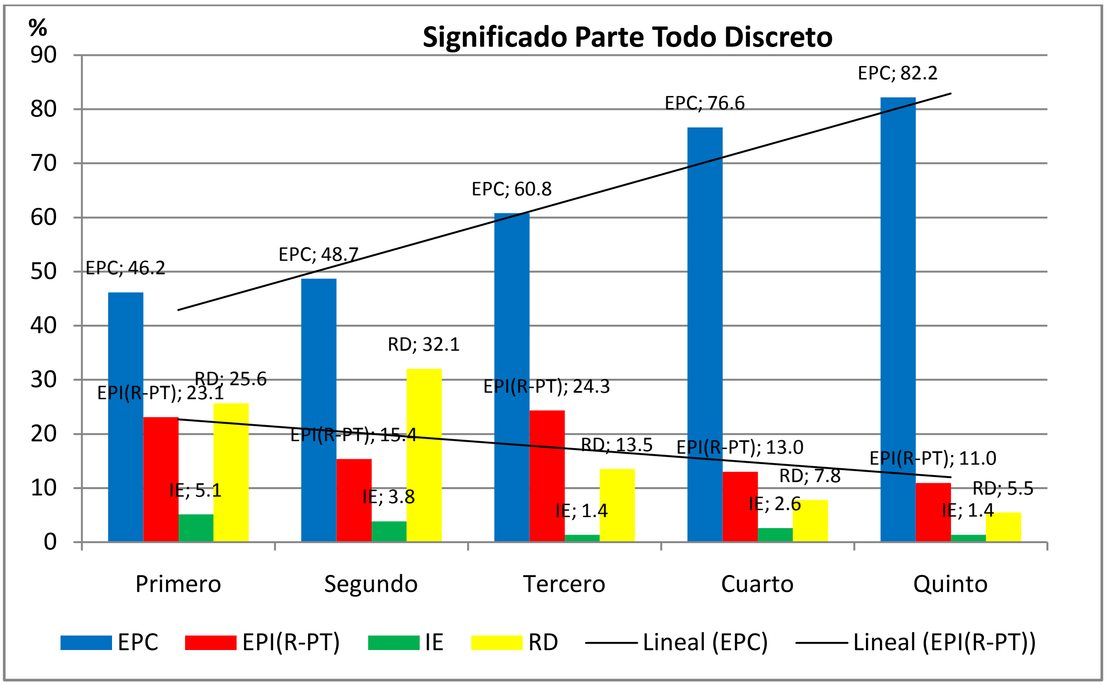


Figura 4.5. Histograma y línea de tendencia del Tipo de respuestas al ítem sobre el "significado parte-todo discreto".

Interferencias en la interpretación del “significado parte-todo discreto”

Las respuestas del tipo Empleo Propio Incorrecto de interferencia del significado de razón en el significado parte-todo discreto (EPI(R-PT)) representan el 17.4%, además la recta de tendencia muestra que este porcentaje es decreciente conforme se asciende de primero a quinto grado de estudio.

La interferencia del “significado de razón en el significado parte-todo discreto” se caracteriza porque en su interpretación se emplea de forma incorrecta el significado de razón en la solución de un problema que para su solución se debe usar el concepto de parte-todo discreto. En el ejemplo se puede ver que el sujeto en lugar de responder 4/7 establece una razón entre el número de lapiceros rojos y lapiceros azules, es decir, presenta como solución ¾.

2) Si tienes tres lapiceros de color rojo y cuatro de color azul, ¿qué fracción del total de lapiceros son de color azul?

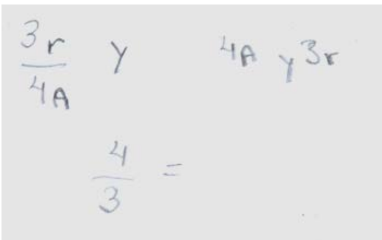


Figura 4.6. Ejemplo de interferencia del “significado de razón en el significado de parte-todo discreto”. Código 1-4° SR.

c. Análisis del Significado de “Cociente”

En la solución al problema *“3) Tres amigos quieren repartirse 5 barras de chocolate de manera equitativa, ¿qué cantidad de chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?”* se encontró que 53 estudiantes de cada 100 emplean apropiadamente el significado de cociente y aproximadamente el 16% resuelven sin éxito, utilizando conocimientos no relacionados con las fracciones, ya sea porque tienen respuestas poco comprensibles o absurdas.

Tabla 4.15

Tipos de respuestas al ítem que evalúa el significado de "Cociente", por grados de estudio escolar

	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	Quinto	Total
EPC	50	41	38	55	82	52.89
EPI(PT-C)	32	36	43	26	16	30.79
IE	2.6	0	0	1.3	0	0.789
RD	15	23	19	18	1.4	15.53
Total	100	100	100	100	100	100

Fuente: Anexos A.3.1 a A.3.5.
Elaborado por el investigador.

La Figura 4.7 muestra que el porcentaje de EPC es creciente conforme se asciende de grado de estudio escolar, consecuentemente, se puede afirmar con relativa certeza que las interferencias disminuyen conforme los estudiantes suben de grado. De la misma manera las respuestas dudosas que no se ajustan a ninguna tipificación también disminuyen de grado a grado, tal como se puede ver en la grafica.

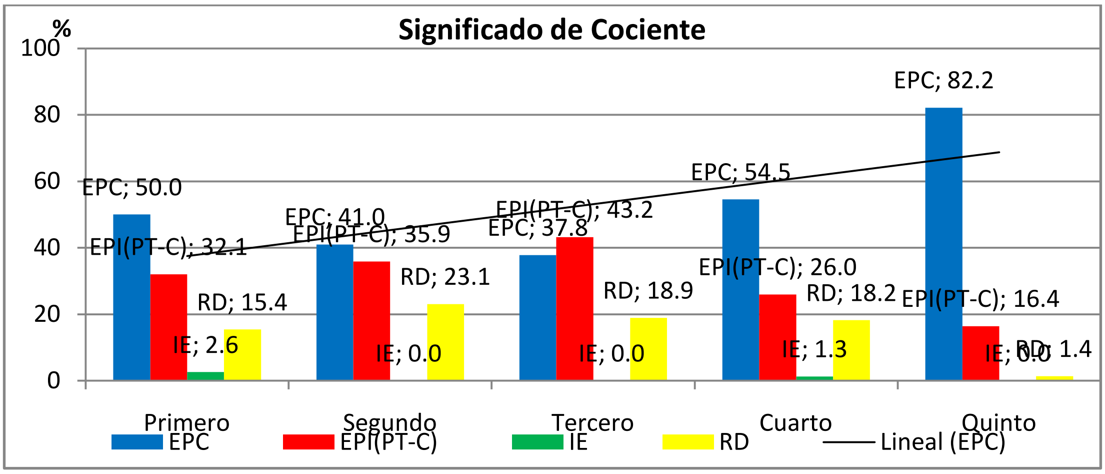


Figura 4.7. Histograma y línea de tendencia del Tipo de respuestas al ítem sobre el "significado de cociente".

Interferencia del "significado de parte-todo" en el "significado de cociente"

La interpretación que se puede realizar de este tipo de respuestas es la siguiente: primeramente, el estudiante representa un todo discreto a través de una representación continua (cinco barras de chocolate representado por una barra dividida en cinco partes). Segundo, aplica el significado parte-todo a esta representación inapropiada. Tercero, concluye que a cada alumno le corresponde 3/5 de chocolate. Este es un ejemplo paradigmático de interferencia del significado parte-todo en la interpretación del significado de cociente del número racional.

3) Tres amigos quieren repartirse 5 barras de chocolate de manera equitativa, ¿qué cantidad de chocolate le corresponde a cada uno de los amigos?

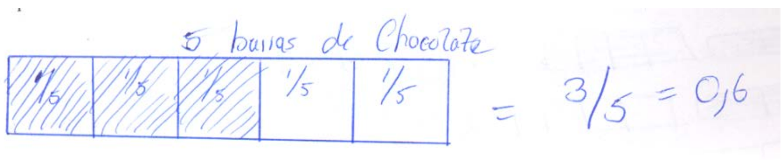


Figura 4.8. Ejemplo de interferencia del "significado parte-todo en el significado de cociente". Código 8-3° GLO.

d. Análisis del Significado de "Medida"

En la solución a la interrogante 4 de la *Prueba sobre Comprensión de los Significados del Número Racional* se ha encontrado que solo un 26% de los estudiantes logran emplear correctamente el significado pertinente (EPC). En tanto que el 27% de los estudiantes tratan de encontrar una solución utilizando conocimientos matemáticos extraños (IE) a los números racionales sin éxito; y el 6.3% presentan respuestas ininteligibles o dudosas.

Tabla 4.16

Tipos de respuestas al ítem que evalúa el significado de "Medida", por grados de estudio escolar

	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	Quinto	Total
EPC	6.4	17	30	22	55	26
EPI(PT-M)	14	27	35	19	19	23
EPI(R-M)	17	23	22	17	15	19
IE	51	23	11	36	9.6	27
RD	12	10	2.7	5.2	1.4	6.3
Total	100	100	100	100	100	100

Fuente: Anexos A.3.1 a A.3.5.
Elaborado por el investigador.

Es importante hacer notar que si bien los EPC tienen una tendencia al crecimiento respecto a los grados de estudio, más no es así con las interferencias, como se aprecia en la Figura 4.9, la recta de tendencia de EPI (PT-M) es una constante y la recta de EPI (R-M) tiene una pendiente levemente negativa, lo que significa que estos tipos de respuestas a las cuestiones son una constante en los estudiantes de los cinco grados de estudio del nivel de educación secundario.

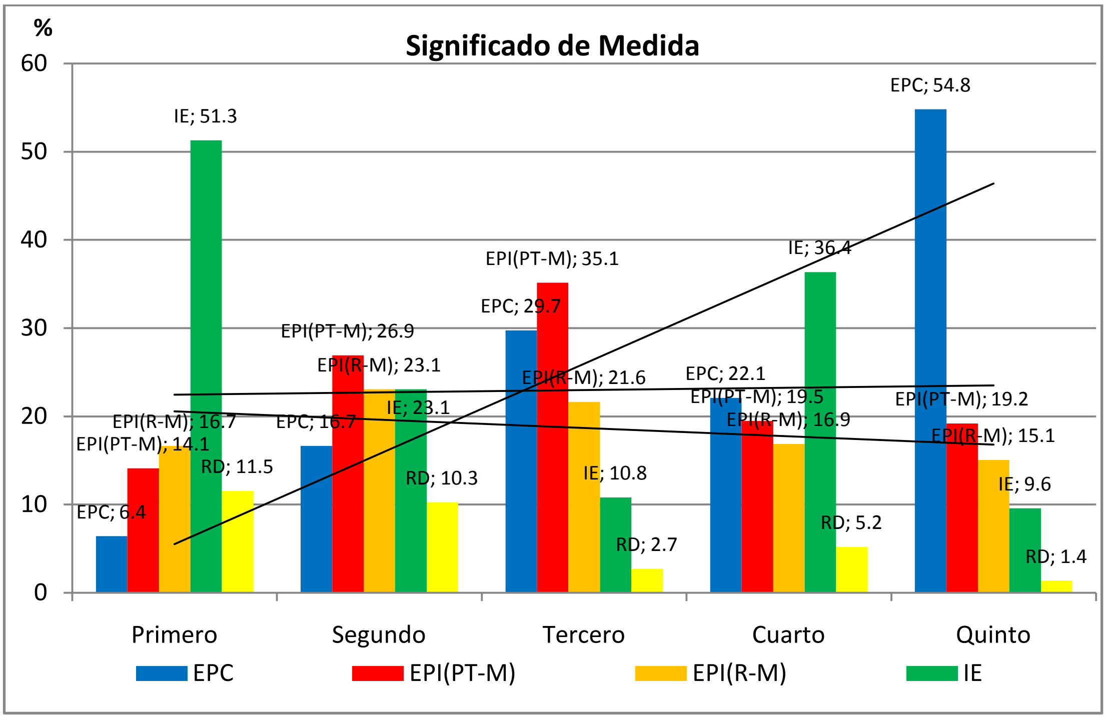


Figura 4.9. Histograma y línea de tendencia del Tipo de respuestas al ítem sobre el "significado de medida".

Interferencia del “significado parte-todo” en el “significado de medida”

En la solución del problema que en su enunciado posee el significado de medida del número racional, se ha encontrado que el significado parte-todo está presente en su interpretación equivocada. Así, en el ejemplo que ilustra la Figura 4.10, el estudiante utiliza la unidad de medida para encontrar que la barra mide dos unidades, pero en la medición del “pedazo restante” utiliza de forma incorrecta el significado parte-todo, porque identifica el retazo con un cuarto que visiblemente lo grafica en la barra.

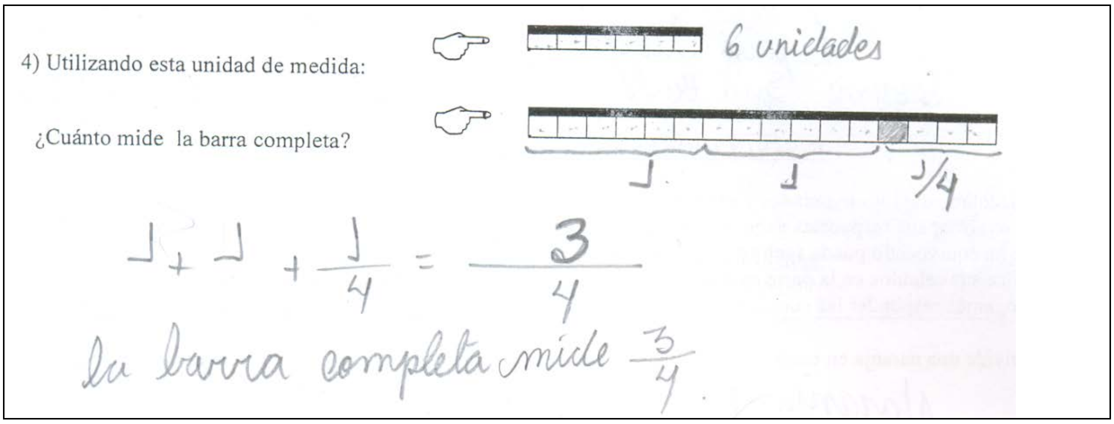


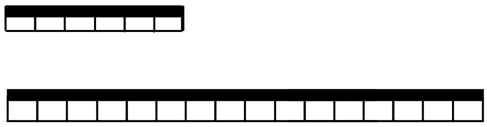
Figura 4.10. Ejemplo de interferencia del “significado parte-todo en el significado de medida”. Código 15-3° GLO.

Interferencia del “significado de razón” en el “significado de medida”

Este tipo de interferencia queda ilustrado en la solución del estudiante de código 2-3ª JCM, donde se observa que: primero, utiliza el significado de parte-todo (12/16); seguido del significado de razón, porque está estableciendo una relación de 6 a 16, suponemos porque la unidad de medida tiene 6 subunidades y la barra 16; finalmente, utiliza una sustracción de fracciones de forma inapropiada.

4) Utilizando esta unidad de medida: ☞

¿Cuánto mide la barra completa? ☞



$\frac{12}{16} - \frac{6}{16} = \frac{6}{16}$ //

Figura 4.11. Ejemplo de interferencia del “significado de razón en el significado de medida”. Código 2-3° JCM

e. Análisis del Significado de “Razón”

La interrogante “*5) Para elaborar una torta, se necesitan cuatro kilos de harina y nueve huevos, ¿cuál es la razón entre la cantidad de harina y huevos?”* evalúa la capacidad del estudiante de identificar y aplicar el significado de razón del número racional. Los resultados de la evaluación deja ver que 52 estudiantes de cada 100 emplean correctamente el significado (EPC), en tanto que el 36.6% emplea otras nociones matemáticas de forma incorrecta (IE),ya sea presentando respuestas dudosas o incomprensibles.

Al igual que en el caso anterior, en las soluciones se presentaron dos tipos de interferencias: el EPI (PT-R) y EPI (C-R). El 10.8% de las soluciones equivocadas son de interferencias en la interpretación del significado pertinente. Corresponde el 4.5% a las interferencias del tipo EPI (PT-R) y 6.3% al tipo EPI (C-R).

Tabla 4.17

Tipos de respuestas al ítem que evalúa el significado de “Razón”, por grados de estudio escolar

	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	Quinto	Total
EPC	28	47	57	64	67	52
EPI(PT-R)	6.4	3.8	5.4	3.9	2.7	4.5
EPI(C-R)	2.6	2.6	20	2.6	4.1	6.3
IE	51	41	12	22	23	30
RD	12	5.1	5.4	7.8	2.7	6.6
Total	100	100	100	100	100	100

Fuente: Anexos A.3.1 a A.3.5.
Elaborado por el investigador.

Las líneas de tendencia graficadas en la Figura 4.12 muestran claramente que el EPC del significado es de pendiente positiva, lo que significa que la comprensión de este significado aumenta conforme el estudiante pasa de grado, en tanto que la recta de tendencia de los Empleos Propios Incorrectos (EPI) de interferencia es de pendiente negativa, lo que significa que los estudiantes mejoran su comprensión de los significados conforme se pasa de grado de estudio.

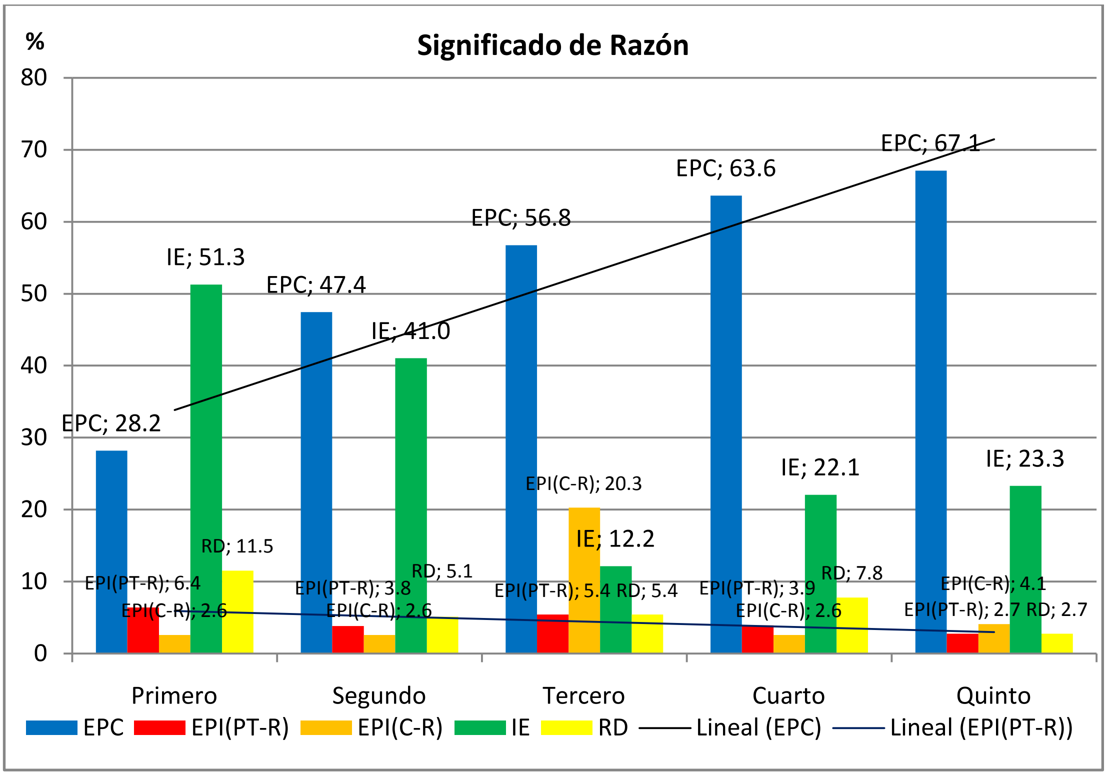


Figura 4.12. Histograma y línea de tendencia del Tipo de respuestas al ítem sobre el “significado de razón”.

Interferencia del “significado parte-todo” en el “significado de razón”

En lugar de la respuesta correcta 4/9 (por cada 4 kilos de harina se necesita 9 huevos), que se ajusta al significado de razón, los estudiantes aun utilizan el significado de parte-todo en su interpretación, en el ejemplo se observa que luego de adicionar el número de kilos de harina y número de huevos establece una relación de parte-todo discreto presentando como solución 4/13, además, para su razonamiento utiliza representaciones pictóricas discretas.

5) Para elaborar una torta, se necesitan cuatro kilos de harina y nueve huevos, ¿cuál es la razón entre la cantidad de harina y huevos?

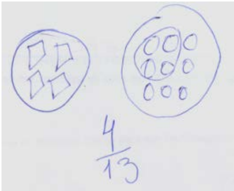


Figura 4. 13. Ejemplo de interferencia del “significado parte-todo en el significado de razón”. Código 14-2° GUE.

Interferencia del “significado de cociente” en el “significado de razón”

El significado de cociente es un elemento extraño, interferente al momento de interpretar el significado de razón, en la solución del problema. Así por ejemplo, el estudiante de código 3-4°INDP procede por realizar el cociente 9÷4 =2 ignorando por completo la interrogante ¿Cuál es la razón entre la cantidad de harina y huevo? No es extraño este tipo de razonamientos, se ha encontrado que el significado de cociente es un elemento muy arraigado en la conciencia del estudiante.

5) Para elaborar una torta, se necesitan cuatro kilos de harina y nueve huevos, ¿cuál es la razón entre la cantidad de harina y huevos?

Figura 4.14. Ejemplo de interferencia del “significado cociente en el significado de razón”. Código 3-4° INDP.

f. Análisis del Significado de “Operador”

Frente a la cuestión “*6) En un salón de 35 estudiantes aprueban matemática solo 4/5. ¿Cuántos aprueban matemática?*” de cada cien 51 estudiantes emplean correctamente el significado de operador en la solución que amerita su uso. En tanto que, un promedio de 32.2% de los estudiantes utilizan conocimientos matemáticos extraños a las fracciones o presentan respuestas inexplicables o dudosas en la errática solución del problema.

Tabla 4.18

Tipos de respuestas al ítem que evalúa el significado de "Operador", por grados de estudio escolar

	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	Quinto	Total
EPC	24	44	45	58	86	51.1
EPI(PT-O)	12	14	23	7.8	4.1	12.1
EPI(C-O)	3.8	2.6	8.1	7.8	1.4	4.7
IE	28	23	11	12	5.5	16.1
RD	32	17	14	14	2.7	16.1
SUMA	100	100	100	100	100	100

Fuente: Anexos A.3.1 a A.3.5.
Elaborado por el investigador.

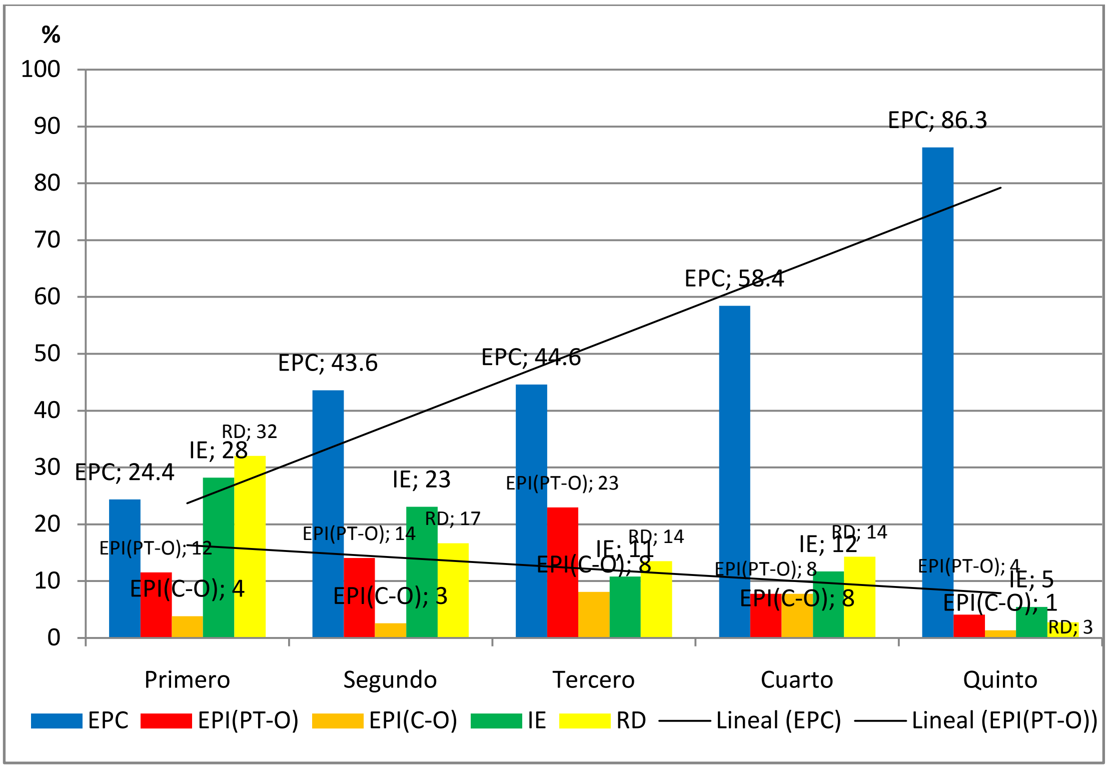


Figura 4.15. Histograma y línea de tendencia del Tipo de respuestas al ítem sobre el "significado de operador".

Las soluciones que revelan una interferencia de significados en la interpretación del problema son del orden del 16.8%. El significado parte-todo interfiere (EPI(PT-O)) en la solución del problema en un orden del 12.1%, siendo incidental la interferencia del significado de cociente de solo 4.7% EPI(C-O)

Las líneas de tendencias de la Figura 4.15 indican que el Empleo Propio Correcto (EPC) del significado es creciente, en tanto que, las interferencias son decrecientes conforme cambia ascendentemente de grado de estudio.

Interferencia del “significado parte-todo” en el “significado de operador”

El uso del “significado parte-todo” en la solución de problemas que involucran otros significados del número racional es una constante. Así por ejemplo, el estudiante de código 8-1° GUE, si bien hace una correcta interpretación del significado operador, pero concluye afirmando que el número de alumnos que aprueban matemática son 28/35, esta afirmación revela claramente la intromisión del significado parte-todo en la solución del problema.

6) En un salón de 35 estudiantes aprueban matemática solo 4/5. ¿Cuántos aprueban matemática?

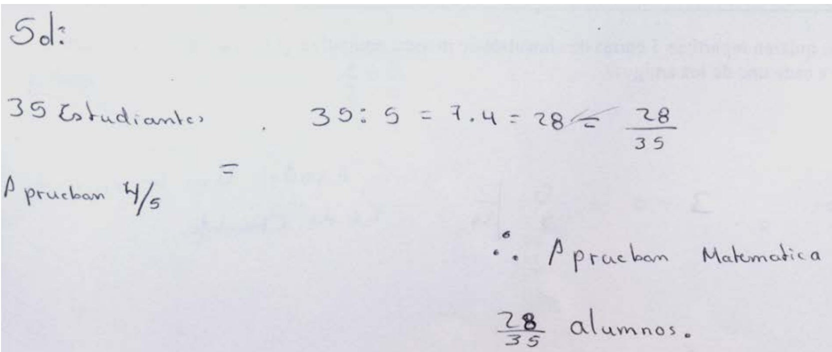


Figura 4.16. Ejemplo de interferencia del “significado parte-todo en el significado de operador”. Código 8-1° GUE.

Interferencia del “significado de cociente” en el “significado de operador”

En la solución de la cuestión que evalúa la capacidad de interpretar el significado de operador del número racional, el estudiante primeramente opera el operador 4/5 como si se tratara del significado cociente, para luego dividirlo entre el número total de estudiantes. Como podemos observar, se utiliza dos veces la acción de dividir.

6) En un salón de 35 estudiantes aprueban matemática solo 4/5. ¿Cuántos aprueban matemática?

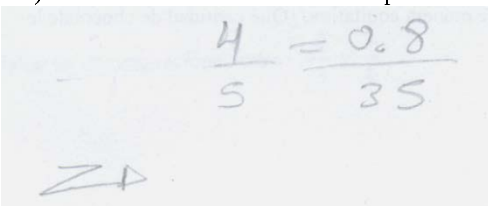


Figura 4.17. Ejemplo de interferencia del “significado de cociente en el significado de operador”. Código 14-4° MA.

Tabla 4.19

Resultados globales del empleo propio incorrecto (EPI) como interferencias en la interpretación de los significados, en porcentajes.

	Parte-todo Continuo	Parte-todo Discreto	Cociente	Medida	Razón	Operador
Empleo Propio Correcto	76.8	62.6	52.9	25.5	52.4	51.1
EPI* (Parte-todo-Cociente)	0.0	0.0	30.8	0.0	0.0	0.0
EPI (Parte-todo-Medida)	0.0	0.0	0.0	22.9	0.0	0.0
EPI (Parte-todo-Operador)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	12.1
EPI (Parte-todo-Razón)	0.0	0.0	0.0	0.0	4.5	0.0
EPI (Razón-Parte-todo)	9.5	17.4	0.0	0.0	0.0	0.0
EPI (Razón-Medida)	0.0	0.0	0.0	18.7	0.0	0.0
EPI (Cociente-Razón)	0.0	0.0	0.0	0.0	6.3	0.0
EPI (Cociente-Operador)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	4.7
Interferencias Externas	3.4	2.9	0.8	26.6	30.3	16.1
Respuestas Dudosas	10.3	17.1	15.5	6.3	6.6	16.1
Total	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0

* EPI: Empleo Propio Incorrecto.
Fuente: Anexos A.3.1 a A.3.5.
Elaborado por el investigador.

En la Tabla 4.19 se observa como una regularidad la interferencia del significado parte-todo en los significados de cociente llegando a un 30.8%, de medida a un 22.9%, de razón a un 4.5% y de operador al 12.1%, esta constante confirma la aseveración de la discusión anterior, sin embargo, es revelador que el significado de razón interfiera en la interpretación de los significados de parte-todo continuo llegando a un 9.5%, parte-todo discreto al 17.4% y de medida al 18.7%, además, el significado de cociente tiene su presencia como interferente en los significados de razón con 6.3% y operador con 4.7%.

4.3.1.3 Prueba de Diferencia Entre las Medias de los Significados

El estudio toma muestras estratificadas de estudiantes de los cinco grados (*n_1*, *n_2*, *n_3*, *n_4*, *n_5*,) de educación secundaria, en cada grado se seleccionó muestras independientes de más 70 estudiantes. En los cuatro casos siguientes se compara la media del logro de comprensión de los significados del número racional. A continuación se presentan las estadísticas muestrales de los cuatro casos:

Caso IV

Grados	n	$\bar{X}$	s
Quinto	73	4.630	1.369
Cuarto	77	3.597	1.426

Z_c= 4.525>1.65

Caso III

Grados	n	$\bar{X}$	s
Cuarto	77	3.597	1.426
Tercero	74	3.135	1.682

Z_c = 1.818>1.65

Caso II

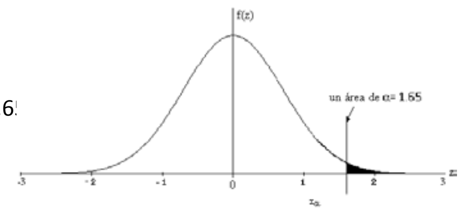
Grados	n	$\bar{X}$	s
Tercero	74	3.135	1.682
Segundo	78	2.679	1.372

Z_c = 1.824>1.65

Caso I

Grados	n	$\bar{X}$	s
Segundo	78	2.679	1.372
Primero	78	2.115	1.450

Z_c = 2.495>1.6



El análisis comparativo de los puntajes de comprensión de los significados de los cinco grados, la prueba de diferencia de medias dio los siguientes resultados:

Las hipótesis son:

H₀: $\mu_{i+1} - \mu_i = 0$

No existe diferencia entre los promedios $\mu_{i+1}\, y\, \mu_i$ de los puntajes de comprensión de los significados del número racional de los dos grados.

H_1: $\mu_{i+1} - \mu_i > 0$

El promedio μ_{i+1} de los puntajes de comprensión de los significados del número racional del grado superior es mayor al promedio μ_i de los puntajes del grado inferior.

El nivel de la probabilidad de significancia es α = 0.05

En cada caso la regla de decisión es si la Z_c calculada es mayor que la $Z_{(0,05)}$ tabulada, se rechaza la H_0.

Considerando que en los cuatro casos el valor de la Z_c es mayor que $Z_{(0,05)}$ =1.65, se puede concluir.

En la muestra de estudiantes del nivel de educación secundaria de los colegios de ciencias y humanidades de la ciudad de Puno, se encontró que, en la prueba de medias, en los cuatro casos (primero-segundo, segundo-tercero, tercero-cuarto y cuarto-quinto), se rechaza la hipótesis nula H_0, pues la Z_c calculada es mayor que $Z_{(0.05)}$ tabulada; y se concluye que, los promedios de los puntajes de comprensión de los significados del número racional de los grados superiores son mayores al de los grados inferiores.

4.3.2 SOBRE LAS OPERACIONES BÁSICAS CON FRACCIONES

4.3.2.1 Evaluación Cuantitativa de la Resolución de Operaciones Básicas

a. Histograma de la resolución de las operaciones básicas

Tabla 4.20

Distribución del desempeño en la Prueba sobre Operaciones Básicas con Fracciones de los colegios de la ciudad de Puno, según el número de respuestas correctas, 2009.

Clase	*Frecuencia*	*Frecuencia relativa*	*% acumulado*	*Clase*	*Frecuencia*	*% acumulado*
0	24	6.32	6.32%	4	111	29.21%
1	63	16.58	22.89%	3	99	55.26%
2	83	21.84	44.74%	2	83	77.11%
3	99	26.05	70.79%	1	63	93.68%
4	111	29.21	100.00%	0	24	100.00%
Total	380	100			380	

Fuente: Anexos A.4.1 a A.4.5.
Elaborado por el investigador.

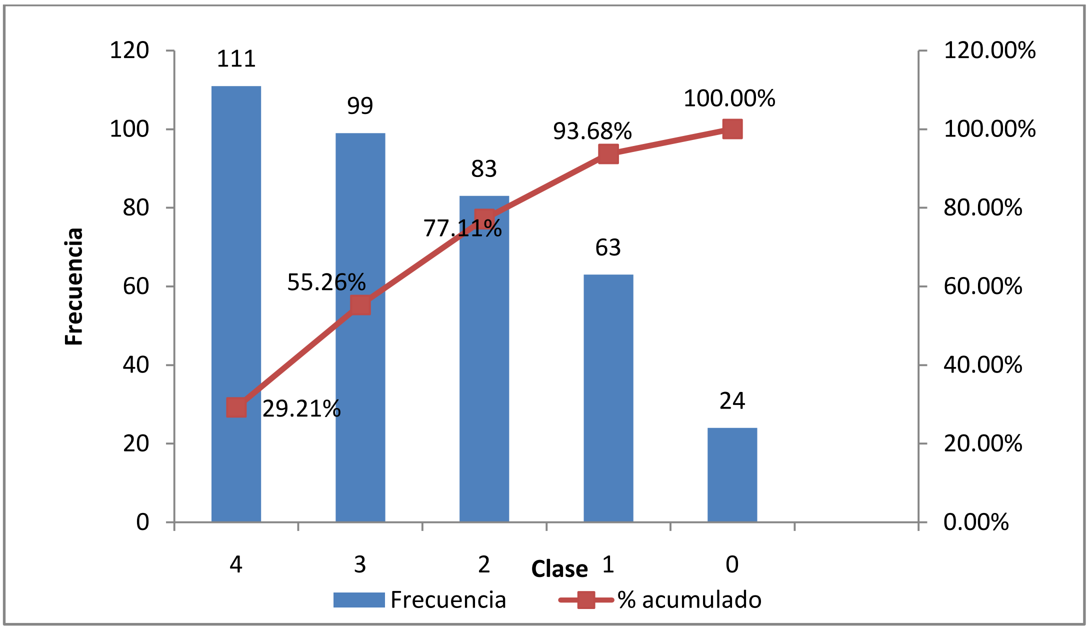


Figura 4.18. Desempeño en la Prueba sobre Operaciones Básicas con fracciones de los colegios de la ciudad de Puno, según el número de respuestas correctas 2009, en porcentajes.

b. Estadística descriptiva de las operaciones básicas con fracciones

Tabla 4.21

Estadígrafos descriptivos de la Prueba sobre Operaciones Básicas con Fracciones, según grados de estudios escolares

Estadígrafos	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	Quinto
Promedio	1.872	2.218	2.554	2.909	3.260
Mediana	2	2	3	3	4
Moda	2	3	3	4	4
Desviación estándar	1.166	1.147	1.207	1.194	1.014
Coeficiente de variación	62.303	51.713	47.243	41.047	31.107
Curtosis	-0.751	-0.763	-0.812	-0.085	0.846
Coeficiente de asimetría	0.205	-0.230	-0.419	-0.916	-1.288

Fuente: Anexos A.4.1 a A.4.5.
Elaborado por el investigador.

Es revelador que el promedio crece conforme se pasa de grado, así esta asciende de 1.87 en primero a 3.26 en quinto grado. Un dato relevante es que en los grados primero, tercero y quinto la moda y el promedio coinciden en 2, 3 y 4 puntos respectivamente; en tanto que en el cuarto grado el 50% de los estudiantes tienen como máximo 3 puntos, y la otra mitad tienen más de 3 puntos. Además, la mayoría de los estudiantes del cuarto grado obtienen un puntaje de 4.

Respecto a los estadígrafos de dispersión, el coeficiente de variación, mayor de 30%, revela que la media aritmética es una medida poco representativa del conjunto de datos. El puntaje alcanzado en la prueba denota que los alumnos se dispersan respecto al valor central en 1 punto aproximadamente.

En primer grado, el coeficiente de asimetría tiende a cero y es positivo, lo que indica que la distribución de la información es aproximadamente simétrica, en tanto que en los grados restantes (segundo a quinto) el coeficiente es negativo, lo que indica que la distribución es negativa. El coeficiente de curtosis es negativo de primero a cuarto grado, lo que significa que la curva correspondiente a la distribución de frecuencias es platicúrtica.

Solo en quinto grado se puede afirmar que la distribución es leptocúrtica por que el coeficiente de curtosis 0.846 es positivo.

4.3.2.2 Valoración de la Resolución de Operaciones

Para acometer el análisis de las respuestas en la resolución de operaciones básicas con fracciones, se procede a clasificar y tipificarlas para reconocer indicios del fenómeno que se denomina superposición de algoritmos que a continuación se define:

Superposición de algoritmos:

En la medida que el algoritmo es un conjunto ordenado y finito de operaciones, procedimientos o instrucciones bien definidas que permiten realizar de forma correcta una operación básica como la adición, sustracción, multiplicación o división de fracciones; el fenómeno de la superposición de algoritmos se definirá en los siguientes términos:

Es el fenómeno por el cual el sujeto utiliza o añade instrucciones, reglas o procedimientos de un algoritmo extraño encima del algoritmo pertinente. Así por ejemplo, en la resolución de la multiplicación de fracciones la superposición se manifiesta cuando el sujeto multiplica en cruz el primer numerador por el segundo denominador y escribe el producto en el numerador de la fracción producto, y seguidamente multiplica el primer denominador por el segundo numerador y escribe el resultado en el denominador de la fracción producto. Esto evidencia que el estudiante superpone el algoritmo de la división de fracciones sobre el algoritmo de la multiplicación de fracciones. Este fenómeno también se manifiesta en la superposición del algoritmo de la adición sobre el algoritmo de la multiplicación o la división.

En adelante, se expone los resultados cuantitativos para encontrar regularidades del fenómeno de superposición de algoritmos.

La Tabla 4.22 exhibe los resultados porcentuales globales de la *Prueba sobre operaciones básicas con fracciones,* de los cinco grados de estudio, según el tipo de respuestas ya sean correctas o equivocadas.

Tabla 4.22

Tipos de respuestas en la Prueba de Operaciones Básicas con Fracciones, en porcentaje.

Respuestas	Adición	Sustracción	Multiplicación	División
Correctas	75.79	51.32	74.21	53.95
Error Tipo A	15.26	12.89	10.00	10.26
Error Tipo B	0.79	1.58	2.37	7.37
Error Tipo C	3.68	2.37	13.42	13.42
Error Tipo D	2.37	2.11	__	7.37
Error Tipo E	0.79	1.32	__	1.58
Error Tipo F	1.32	28.42	__	6.05
Total	100.0	100.0	100.0	100.0

Fuente: Anexos A.3.1 a A.3.5.
Elaborado por el investigador.

Las respuestas equivocadas fueron tipificadas según el tipo de error.

a. Resultados de la Evaluación de la Adición de Fracciones

En la realización de la adición de fracciones heterogéneas los resultados son más alentadores, solo el 24.21% de los educandos cometen algún tipo de error. El error Tipo A es el más significativo, representa el 15.3% de la muestra, en tanto que los demás son incidentales.

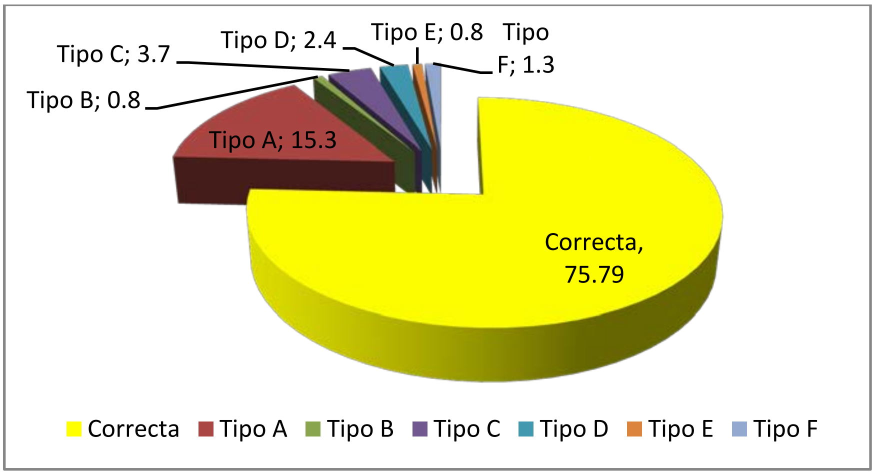


Figura 4.19. Resultado porcentual de la evaluación de adición de fracciones. Respuestas correctas y tipos de errores.

b. Resultados de la Evaluación de la Sustracción de Fracciones

En la realización de la sustracción de fracciones heterogéneas el 48.68% de los educandos de los cinco grados cometen diversos errores, entre ellos los errores Tipo F y A son los más frecuentes, mientras que los otros apenas llegan al 2.4 %.

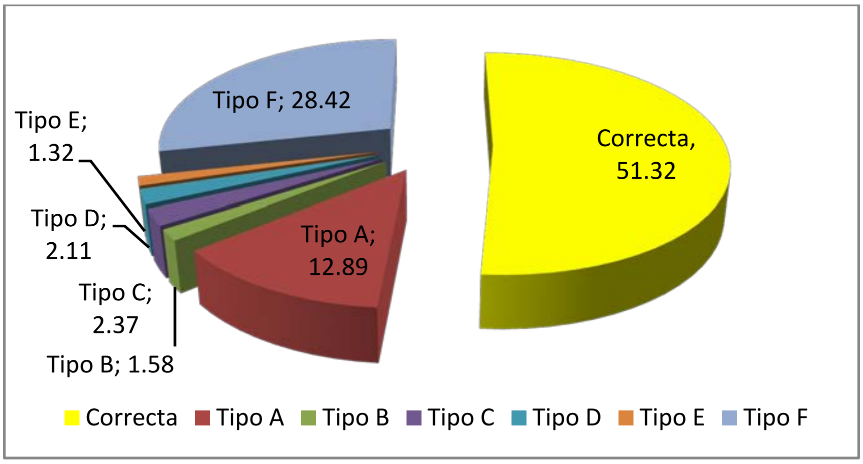


Figura 4.20. Resultado porcentual de la evaluación de sustracción de fracciones. Respuestas correctas y tipos de errores.

c. Resultados de la Evaluación de la Multiplicación de Fracciones

En la realización de la multiplicación de fracciones el 24.79% de los estudiantes cometen equivocaciones al aplicar el algoritmo de multiplicación de fracciones. Los errores Tipo C y A son los más frecuentes, en tanto que el Tipo B es incidental.

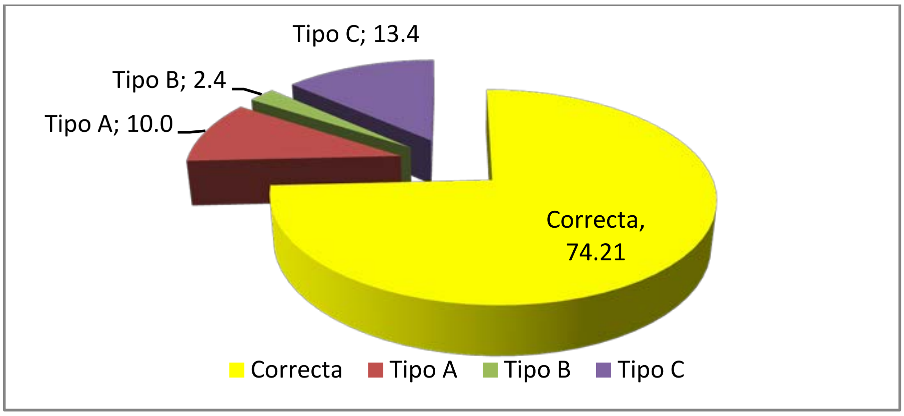


Figura 4.21. Resultado porcentual de la evaluación de multiplicación de fracciones. Respuestas correctas y tipos de errores.

d. Resultados de la Evaluación de la División de Fracciones

En los cinco grados se ha encontrado que en la realización de la división de dos fracciones el 46.05% de los estudiantes comete algún tipo de error en el cálculo, de ellos el más frecuente es del Tipo C. Además, los errores del Tipo A, B, D y F merecen atención por cuanto representan entre 10.3% y 7.4% respectivamente, el error Tipo E es un caso esporádico, poco frecuente.

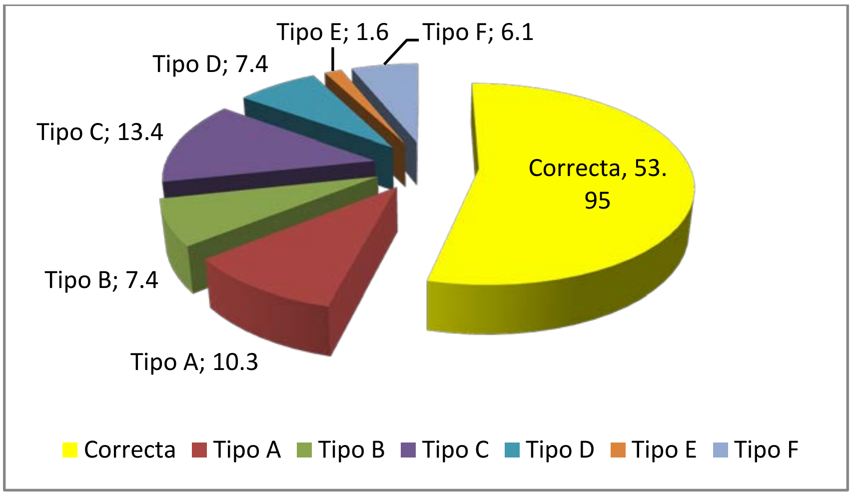


Figura 4.22. Resultado porcentual de la evaluación de división de fracciones. Respuestas correctas y tipos de errores.

e. Tendencias en el desarrollo de la capacidad del manejo de algoritmos

Se percibe que la capacidad de manejar algoritmos, de las operaciones básicas con fracciones, comporta una regularidad o tendencia a mejorar conforme se pasa de un grado inferior a otro inmediato superior. La Tabla 4.23 y los histogramas de la Figura 4.23 exhiben este patrón de formación.

Tabla 4.23

Distribución de respuestas correctas y con errores a la prueba sobre operaciones básicas con fracciones

Cálculo	**Adición**					**Sustracción**					**Multiplicación**					**División**				
	1°	**2°**	**3°**	**4°**	**5°**	**1°**	**2°**	**3°**	**4°**	**5°**	**1°**	**2°**	**3°**	**4°**	**5°**	**1°**	**2°**	**3°**	**4°**	**5°**
Correcto	52.6	78.2	79.7	77.9	91.8	23.1	37.2	54.1	64.9	79.5	66.7	62.8	67.6	87.0	87.7	44.9	43.6	54.1	61.0	67.1
Con errores	47.4	21.8	20.3	22.1	8.2	76.9	62.8	45.9	35.1	20.5	33.3	37.2	32.4	13.0	12.3	55.1	56.4	45.9	39.0	32.9
Total	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

Fuente: Anexos A.3.1 a A.3.5.
Elaborado por el investigador.

Como se observa, el porcentaje de respuestas correctas en cada operación crece conforme se transita de un grado inferior a otro superior.

Es evidente que el porcentaje de cálculos correctos en la realización de las operaciones básicas con fracciones tiene una tendencia progresiva de desarrollo conforme el estudiante va ascendiendo de grados de estudio, en concordancia con la observación anterior, en forma reciproca, se disminuye el porcentaje de cálculos erráticos.

Así por ejemplo, en la realización correcta de la operación sustracción de fracciones, este llega al 76.9% en primer grado y desciende hasta el 20.5% en quinto grado. De forma simétrica el porcentaje de cálculos correctos en los primeros grados crece de 23.1% hasta llegar a un 79.5% en quinto grado.

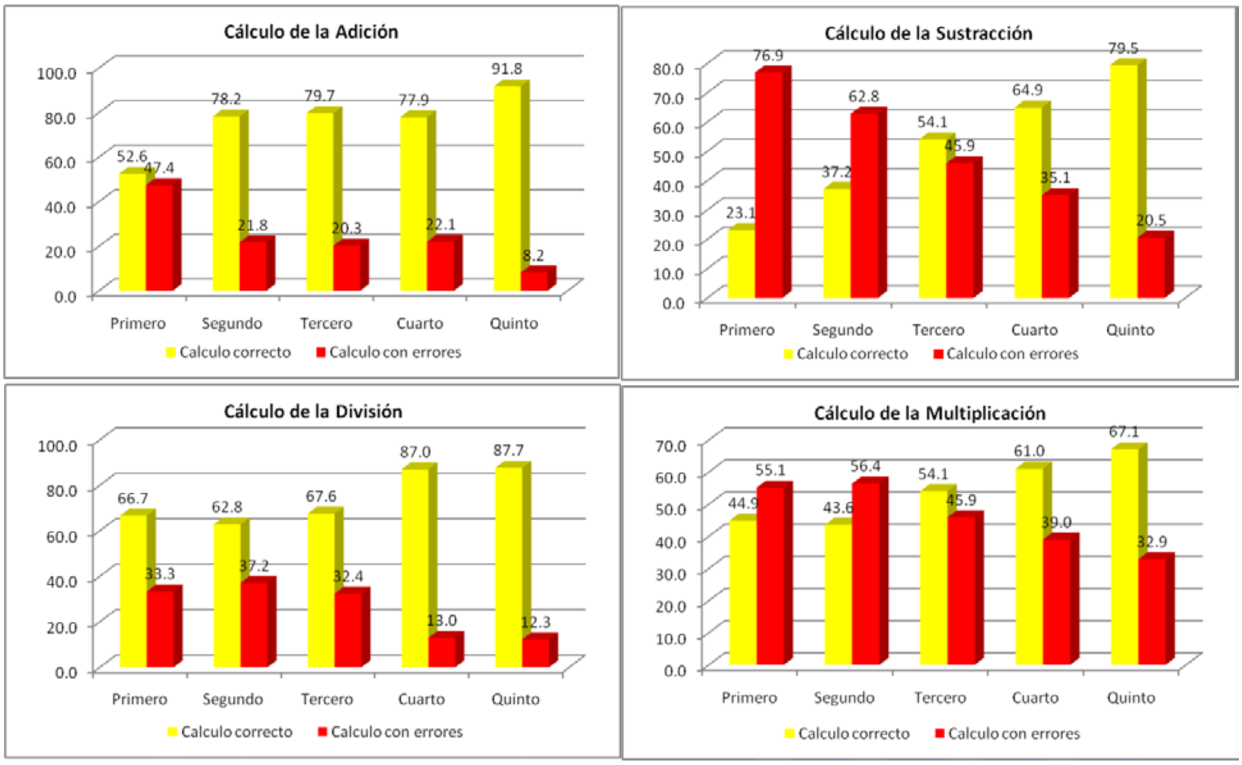


Figura 4.23. Resultado porcentual de la prueba sobre operaciones básicas con fracciones, por grados de estudio escolar, según sean los cálculos correctos o con errores.

Sin embargo, esta afirmación será confirmada con la prueba de hipótesis respecto a la diferencia entre medias de los grados consecutivos.

4.3.2.3 Tipificación de los Errores en la Resolución de Operaciones Básicas con Fracciones

Se han identificado los siguientes tipos de errores en la adición de fracciones heterogéneas.

a. Tipos de errores en la adición

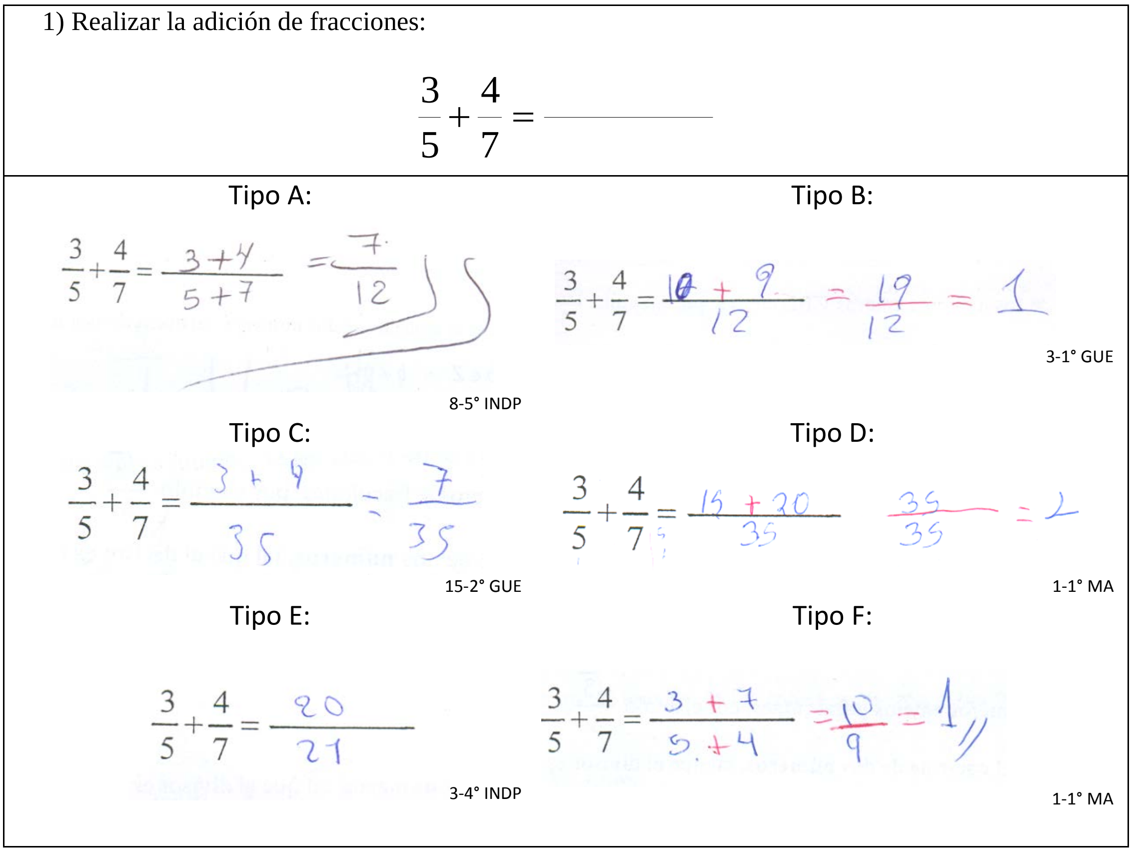


Figura 4.24. Tipos de errores en el cálculo de adición de fracciones.

El error de Tipo A es el más común, consiste en la adición directa e independiente entre numeradores y denominares. En el error de Tipo B se observa una intromisión de uno de los procesos de la división de fracciones, también se observa la multiplicación en cruz, en este error el estudiante efectúa adiciones en cruz para formar los sumandos del numerador, el denominador de la suma se forma como la suma de los denominadores del sumando. En el error de Tipo C, el estudiante inicia con la multiplicación de los denominadores, este proceso es completamente correcto cuando son primos entre sí, pero el numerador de la suma se forma con una suma directa de los numeradores.

Los errores de Tipo D responden a equivocaciones de multiplicación o adición en el numerador de la suma que escapan al algoritmo propio de la adición de fracciones. Los estudiantes, a pesar de que manejan adecuadamente el algoritmo de la adición de fracciones terminan cometiendo equivocaciones.

Los errores del Tipo E son una clara intromisión del algoritmo de la división de fracciones, realizan multiplicaciones en cruz, tanto para conformar el numerador como el denominador. Finalmente, el error de Tipo F resulta muy interesante, es una variante del Tipo E. En vez de multiplicar en cruz, en este caso se adiciona en cruz para conformar la suma.

b. Tipos de errores en la sustracción

Los errores típicos identificados en la realización de sustracción de fracciones heterogéneas son los siguientes:

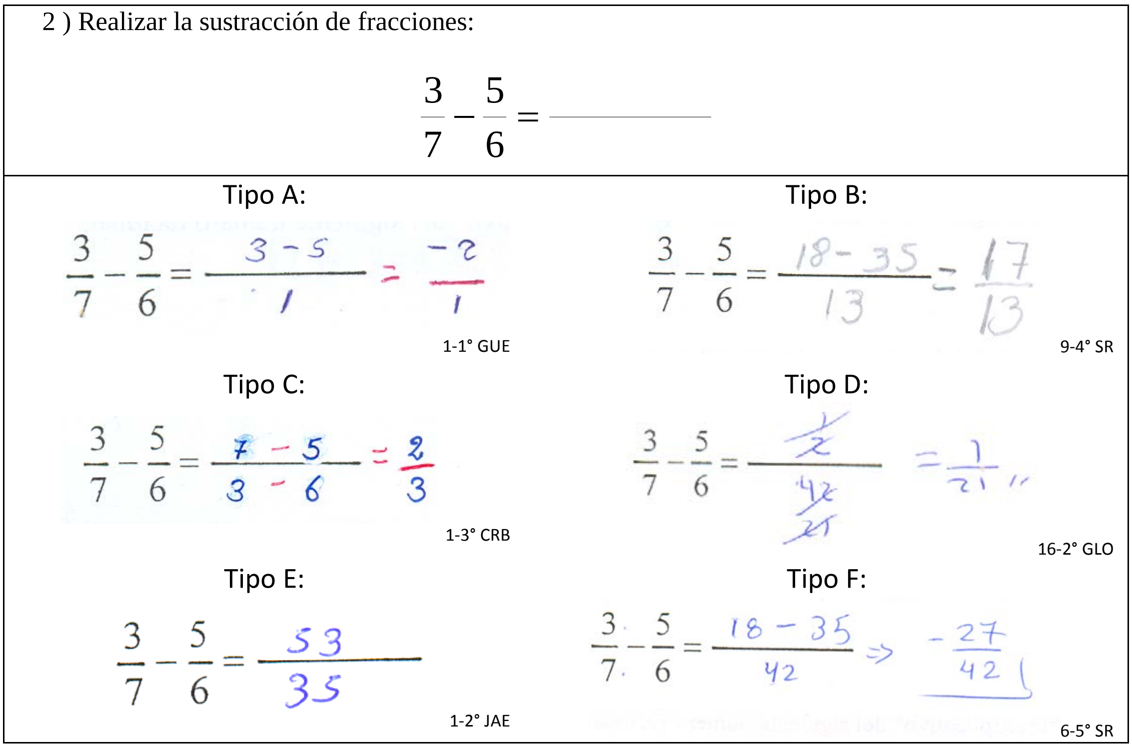


Figura 4.25. Tipos de errores en el cálculo de sustracciones de fracciones.

El error de Tipo A, de sustracción de fracciones, es análogo al error de Tipo A de la adición, de la misma manera efectúan sustracciones de los numeradores y denominadores respectivamente, como si se tratara de números enteros.

En el error de Tipo B se procede primero, con la adición de los denominadores; seguidamente, se efectúa la multiplicación en cruz para efectuar una sustracciones de estos productos en el numerador de la diferencia.

En el caso del error de Tipo C se procede a realizar sustracciones en cruz, el numerador de la diferencia es la sustracción del denominador del minuendo menos el numerador del sustraendo, en tanto que el denominador de la diferencia es la sustracción entre el numerador del minuendo menos el denominador del sustraendo.

En el caso del error de Tipo D, la sustracción comienza con una multiplicación de los denominadores, lo cual es correcto, pero luego realiza una sustracción directa de los numeradores para formar el numerador de la diferencia.

El error de Tipo E tiene el siguiente algoritmo errático: El denominador de la diferencia es el producto del denominador del minuendo por el numerador del sustraendo; en tanto que el numerador de la diferencia es la suma de la multiplicación de $3\times6 + 7\times5= 53$.

El error de Tipo F revela, simplemente, dificultades menores como equivocaciones en la sustracción de números enteros o errores de multiplicación.

c. Tipos de errores en la multiplicación

A diferencia de la adición y sustracción de fracciones, en la multiplicación, se han detectado solo tres tipos de errores que son los siguientes:

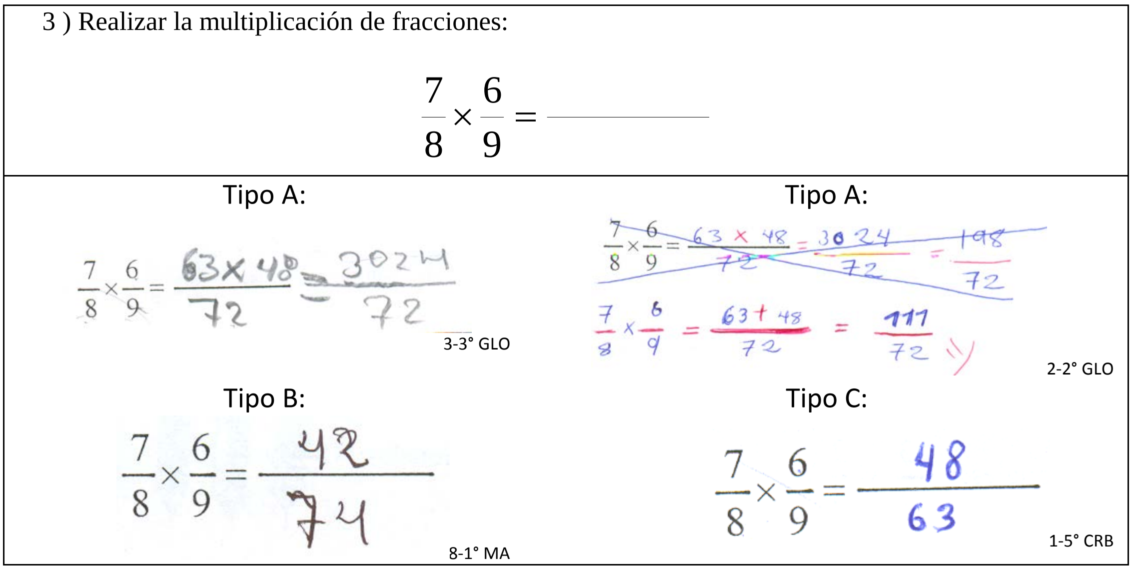


Figura 4.26. Tipos de errores en el cálculo de multiplicación de fracciones.

Los errores de Tipo A siguen el siguiente procedimiento: primero, efectúan la multiplicación de los denominadores, que es correcto; segundo, realizan dos multiplicaciones en cruz y estos a la vez son multiplicados en el numerador de la fracción producto. En algunos casos el producto de las multiplicaciones en cruz es adicionado en el numerador de la fracción producto.

Los errores de Tipo B son el resultado del desconocimiento de la tabla de multiplicar, que no merece mayor comentario. Finalmente, los errores de Tipo C tienen el siguiente procedimiento: se multiplica el primer numerador con el segundo denominador para formar el denominador de la fracción producto, seguidamente, se multiplica el primer denominador por el segundo numerador para conformar el numerador de la fracción producto.

d. Tipos de errores en la división

En la división de fracciones se ha podido identificar seis tipos de errores a ver:

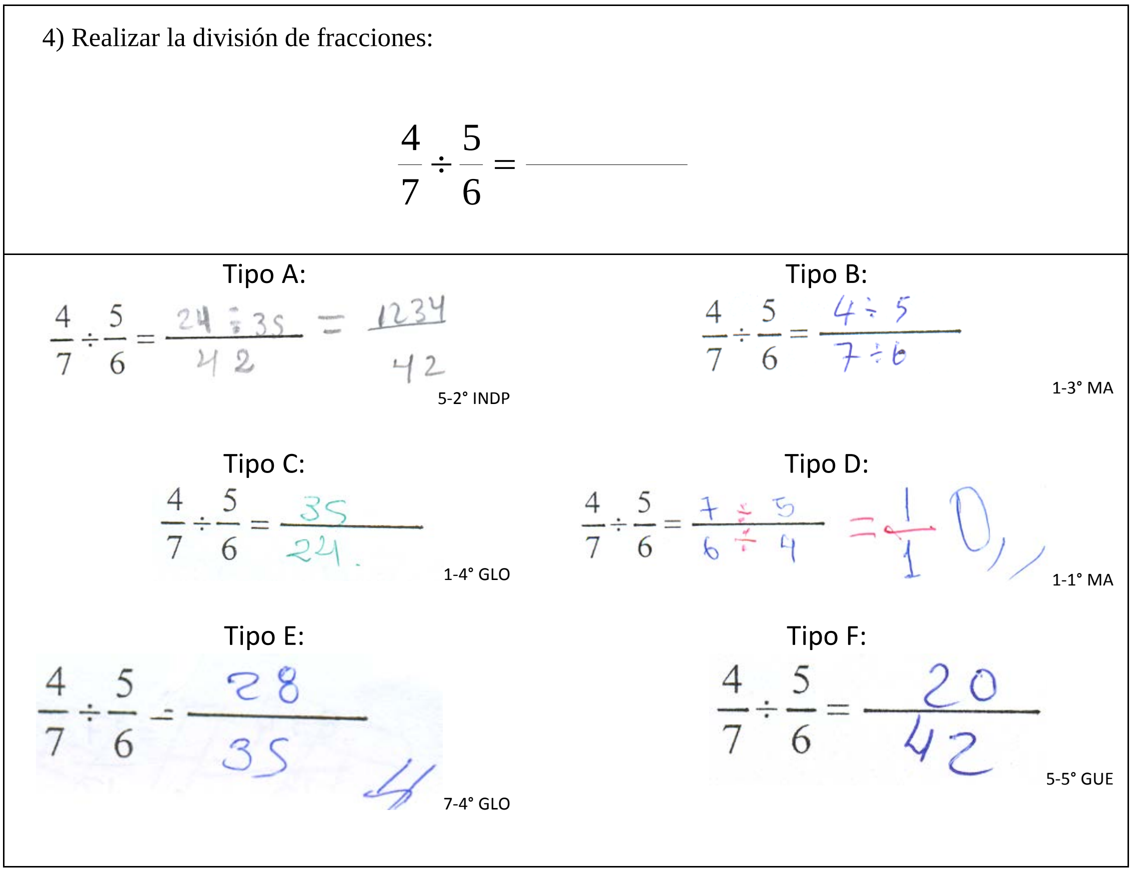


Figura 4.27. Tipos de errores en el cálculo de una división de fracciones.

En la división de fracciones el error de Tipo A es análogo al error de Tipo A de multiplicaciones. A diferencia de los anteriores, en este caso se dividen los productos de la multiplicación en cruz para conformar el numerador de cociente.

El error de Tipo B, de división de fracciones, es análogo al error de Tipo A de la adición; en este caso, la división se efectúa como si se tratara de números enteros, numerador entre numerador y denominador entre denominador.

El error de Tipo C es el resultado de multiplicar el primer numerador por el segundo denominador para formar el denominador del cociente; y luego, multiplicar el primer denominador por el segundo numerador para formar el numerador del cociente.

El error de Tipo D, una vez más, evidencia la obsesión por operar en cruz, así en este caso el estudiante procede a dividir fracciones siguiendo el siguiente proceso: en el numerador del cociente se realiza una división del primer denominador entre el segundo numerador y en el denominador del cociente se realiza la división del segundo denominador entre el primer numerador.

Los errores de Tipo E obedecen a equivocaciones en la adición o multiplicación de números enteros, como en el ejemplo, el estudiante confunde la multiplicación de $4 \times 6 = 28$ en vez de 24.

Los errores de Tipo F son el resultado de confundir el algoritmo de la multiplicación de fracciones con el algoritmo de la división de fracciones. Es decir, "divide" efectuando multiplicaciones directas de numerador con numerador y denominador con denominador.

4.3.2.4 Prueba de Diferencia Entre las Medias

Se desea saber si es posible concluir que el puntaje promedio obtenido en la *Prueba sobre operaciones básicas con fracciones,* de los estudiantes que cursan un grado de estudio, es mayor conforme se sube al grado inmediato superior. El caso que tratamos es de un muestreo de dos poblaciones independientes que están distribuidas aproximadamente en forma normal con varianza poblacional desconocida, pero iguales.

Se computa los puntajes totales de éxito, en el cálculo de operaciones básicas con fracciones, de los estudiantes de los cinco grados de estudio del nivel de educación secundaria. La comparación se realiza considerando la diferencia de medias de un grado inferior con el grado inmediato superior. A continuación se exhiben las estadísticas muestrales de los cuatro casos de comparación. El procedimiento de verificación de las hipótesis es:

Caso IV

Grados	n	$\bar{X}$	s
Quinto	73	3.260	1.014
Cuarto	77	2.909	1.194

$Z_c =$ 1.945>1.65

Caso III

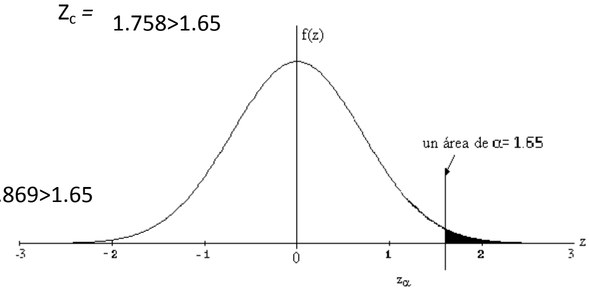
Grados	n	$\bar{X}$	s
Cuarto	77	2.909	1.194
Tercero	74	2.554	1.207

$Z_c =$ 1.817>1.65

Caso II

Grados	n	$\bar{X}$	s
Tercero	74	2.554	1.207
Segundo	78	2.218	1.147

$Z_c =$ 1.758>1.65



Caso I

Grados	n	$\bar{X}$	s
Segundo	78	2.218	1.147
Primero	78	1.872	1.166

$Z_c =$ 1.869>1.65

Planteamiento de la hipótesis.

***H_0*: $\mu_{i+1} - \mu_i = 0$**

No existe diferencia entre los promedios μ_{i+1} y μ_i de los puntajes de la capacidad de resolución de operaciones básicas con fracciones de los dos grados consecutivos.

***H_1*: $\mu_{i+1} - \mu_i > 0$**

El promedio μ_{i+1} de los puntajes de la capacidad de resolución de operaciones básicas del grado superior es mayor al promedio μ_i de los puntajes del grado inferior.

Donde μ_{i+1} es el logro promedio del grado superior y μ_i el logro promedio del grado inferior.

El nivel de la probabilidad de significancia es α = 0.05.

Descripción de las poblaciones y suposiciones. Las formas funcionales de las poblaciones no se conocen, pero, no es una limitante para determinar que el estadístico de prueba sea la Z_c, puesto que las muestras son independientes y suficientemente grandes, mayores a 70, como para estimar aceptablemente que las varianzas poblacionales sean iguales.

Justificación del estadístico pertinente: la prueba estadística más adecuada es $\mu_{i+1} - \mu_i$, y como consecuencia del teorema del límite central, está distribuido en forma aproximadamente normal.

*El estadístico de prueba: c*on base en las consideraciones anteriores, el estadístico de prueba adecuado es *Z* (distribución normal).

Región de rechazo o de aceptación: el valor crítico de *Z* para un nivel de significancia de $\alpha = 0.05$ es 1.645 ($Z_{(0.05)}$=1.645).

Recolección de datos y cálculos: con los datos exhibidos se calcula la Z_c.

*Decisión estadística: c*omo en los cuatro casos $Z_c > Z_{(0.05)}$=1.645, por lo tanto rechazamos la hipótesis nula H_0.

***Conclusión*.** El promedio μ_{i+1} de logro en el cálculo de operaciones básicas con fracciones, de los estudiantes de los grados superiores, es mayor que el promedio μ_i del logro de los grados inferiores.

4.3.3 SOBRE LA COMPRENSIÓN DE LAS PROPIEDADES ELEMENTALES

4.3.3.1 Evaluación Cuantitativa del Conocimiento de las Propiedades Elementales de los Números Racionales

El tercer instrumento de investigación evalúa el conocimiento de las propiedades que poseen los estudiantes, en los cinco grados de estudio. Además de la definición del conjunto de los números racionales, las propiedades: *opuesto aditivo*, *inverso multiplicativo*, *relación de equivalencia*, *relación de orden* y *densidad de los números racionales* son materia de evaluación. Los resultados obtenidos son los siguientes:

a. Histograma de la comprensión de las propiedades del número racional

En este numeral, se hace una presentación de la frecuencia absoluta y acumulada de la comprensión de las propiedades, que ostentan los estudiantes de los cinco grados de estudio. En la Tabla 4.24 se observa que el 72.11% de los estudiantes resuelven correctamente hasta tres cuestiones, en tanto que el 28.42% resuelve tres cuestiones y solo el 1.58% logra resolver las 6 cuestiones de la prueba.

Tabla 4.24

Distribución del desempeño en la Prueba sobre Propiedades Elementales de los Números Racionales de los colegios de la ciudad de Puno, según el número de respuestas correctas, 2009.

Clase	*Frecuencia*	*Frecuencia relativa*	*% acumulado*	*Clase*	*Frecuencia*	*% acumulado*
0	15	3.95	3.95%	3	108	28.42%
1	54	14.21	18.16%	2	97	53.95%
2	97	25.53	43.68%	4	61	70.00%
3	108	28.42	72.11%	1	54	84.21%
4	61	16.05	88.16%	5	39	94.47%
5	39	10.26	98.42%	0	15	98.42%
6	6	1.58	100.00%	6	6	100.00%
Total	380	100			380	

Fuente: Anexos A.4.1 a A.4.5.
Elaborado por el investigador.

Del histograma podemos deducir que el 53.95% de los estudiantes resuelven entre 3 y 2 cuestiones planteadas y el 84.21% logra resolver entre 1 y 4 cuestiones, sin embargo, existe un porcentaje mínimo de estudiantes que se ubican en los extremos, quienes resuelven todas las cuestiones o ninguna.

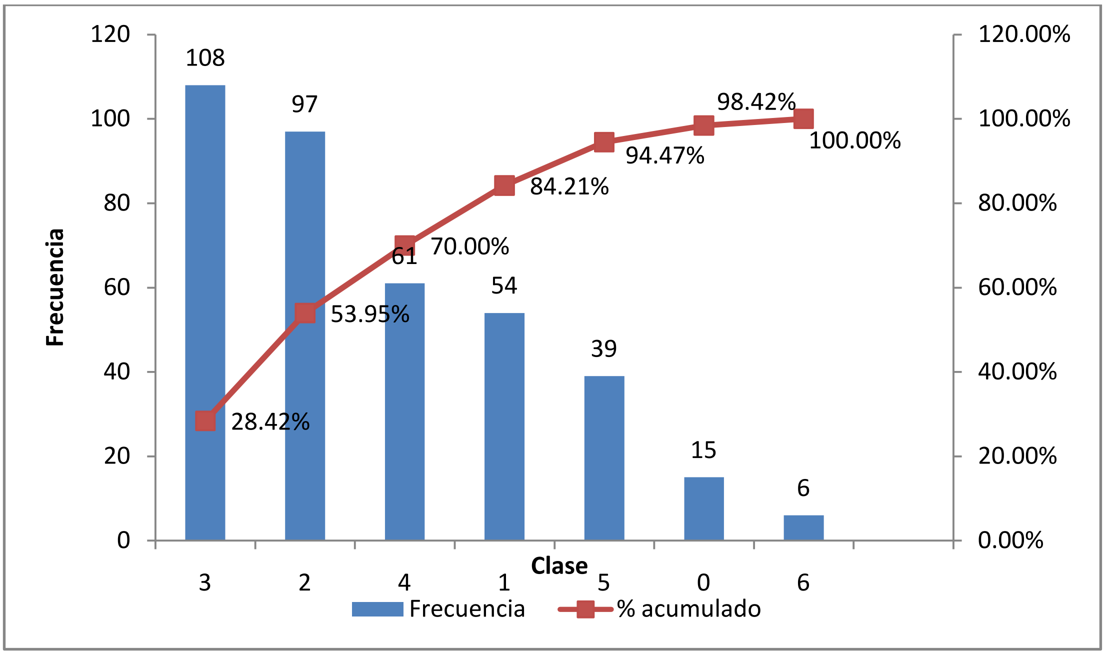


Figura 4.28. Desempeño en la Prueba sobre Propiedades Elementales de los Número Racionales, de los colegios de la ciudad de Puno, según el número de respuestas correctas 2009, en porcentajes.

b. Estadísticas descriptivas del conocimiento de las propiedades del número racional

Tabla 4.25

Estadígrafos descriptivos de la Prueba sobre Significados del Número Racional, según grados de estudios escolares

Estadígrafos	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	Quinto
Promedio	1.718	2.449	2.797	3.260	3.616
Mediana	2	2	3	3	4
Moda	2	3	3	3	5
Desviación estándar	1.043	1.052	1.271	1.418	1.126
Coeficiente de variación	60.723	42.981	45.443	43.499	31.131
Curtosis	-0.568	0.519	-0.348	-0.574	-0.823
Coeficiente de asimetría	0.102	0.310	-0.100	0.093	-0.329

Fuente: Anexos A.4.1 a A.4.5.
Elaborado por el investigador.

El rendimiento promedio de los alumnos de primer grado es de 1,7 en una escala de 0 a 6 puntos. En tanto que la mitad de los estudiantes tienen como máximo un puntaje de 2 y la mayoría tiene un puntaje de 2.

La puntuación que alcanzan los estudiantes se dispersan respecto al valor central en aproximadamente 1.04 puntos. Como el coeficiente de variación es aproximadamente 61% muy superior que el 30%, entonces la media no es una medida representativa del conjunto de datos, es decir, las puntuaciones son dispersas.

Respecto a las medidas de forma, el coeficiente de asimetría $0.102 > 0$ indica que la distribución de los datos es positiva, como tiende a 0 se puede afirmar que la información es relativamente simétrica. Como el coeficiente de curtosis es -0.568 (negativa), entonces indica una distribución relativamente plana.

De la misma manera se puede proceder con la interpretación de los demás grados, sin embargo, abundaremos en la interpretación del quinto grado.

Las medidas de tendencia central revelan que el promedio de puntuación alcanzado por los estudiantes del quinto grado es de 3.6 puntos, la mitad tiene como máximo 4 puntos, y la mayoría alcanza una puntuación de 5.

Respecto a la medida de dispersión, las puntuaciones de los estudiantes del quinto grado se dispersan respecto al valor central en aproximadamente 1.13 puntos. El coeficiente de variación cv= 31.13 % es mayor que el 30%, entonces la media no es una medida representativa del conjunto de datos.

Dentro de las medidas de forma, tanto el coeficiente de asimetría ($-0.329<0$) como el coeficiente de curtosis (-0.823), ambas, indican que la distribución es relativamente plana.

c. Resultados globales por propiedades del número racional

En la Tabla 4.26 se muestra los resultados globales, de los cinco grados, de la evaluación sobre propiedades elementales de los números racionales en porcentajes.

Tabla 4.26

Tipos de respuestas en la Prueba de Propiedades Elementales de los Números Racionales, en porcentajes.

	Definición %	Opuesto aditivo %	Inverso multiplicativo %	Relación de equivalencia %	Relación de orden %	Densidad %
Correcta	26.8	35.0	55.0	67.4	72.1	19.2
Incorrecta	73.2	65.0	45.0	32.6	27.9	80.8
Total	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0

Fuente: Anexos A.3.1 a A.3.5.
Elaborado por el investigador.

El análisis de las respuestas a las seis cuestiones sobre las propiedades de los números racionales, permite afirmar que los estudiantes de los cinco grados tienen mayor conocimiento de las propiedades del *inverso multiplicativo, relación de orden y de equivalencia*, por ejemplo, el 72.1% de los estudiantes ordenan dos fracciones de mayor a menor; en tanto que, la comprensión de la *definición del conjunto de los números racionales* es deficiente, apenas el 26.8% de los estudiantes responden correctamente. Lo más relevante de las deficiencias se presenta en la interpretación de la propiedad de la *densidad de los números racionales,* así 9 de cada diez estudiantes no pueden encontrar una fracción intermedia entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$.

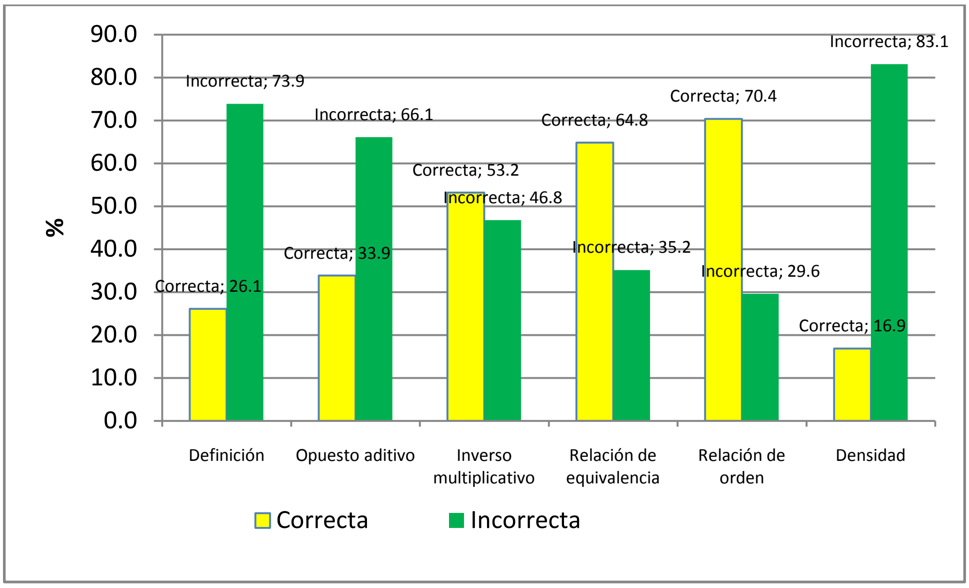


Figura 4.29. Distribución porcentual de las respuestas correctas e incorrectas de la prueba sobre propiedades elementales de los números racionales.

4.3.3.2 Valoración de la Comprensión de la Definición del Número Racional

Ante la cuestión:

1) Identifique y marque la definición correcta del conjunto de los números racionales:

☐ a) Es el conjunto de los números enteros y fracciones, por ejemplo $\frac{\sqrt{3}}{5}$.

☐ b) Un número racional es el cociente de dos **números**, tal que el divisor es diferente de cero.

☐ c) $Q = \left\{(a,b) / a \in Z; b \in Z \;\wedge\; b \neq 0\right\}$

☐ d) $Q = \left\{\frac{a}{b} / a \in Z \;\wedge\; b \in Z\right\}$

Los resultados relativos a este aspecto son los siguientes:

Tabla 4.27

Tipos de respuestas al ítem que evalúa la definición del conjunto de los números racionales, según grados de estudio escolar.

	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	Quinto	Global	% Global
Alternativa A	25	15	14	16	15	85	22.4
Alternativa B	16	38	28	14	25	121	31.8
Alternativa C	10	21	16	31	24	102	26.8
Alternativa D	27	4	16	16	9	72	18.9
TOTAL	78	78	74	77	73	380	100

Fuente: Anexos A.3.1 a A.3.5.
Elaborado por el investigador.

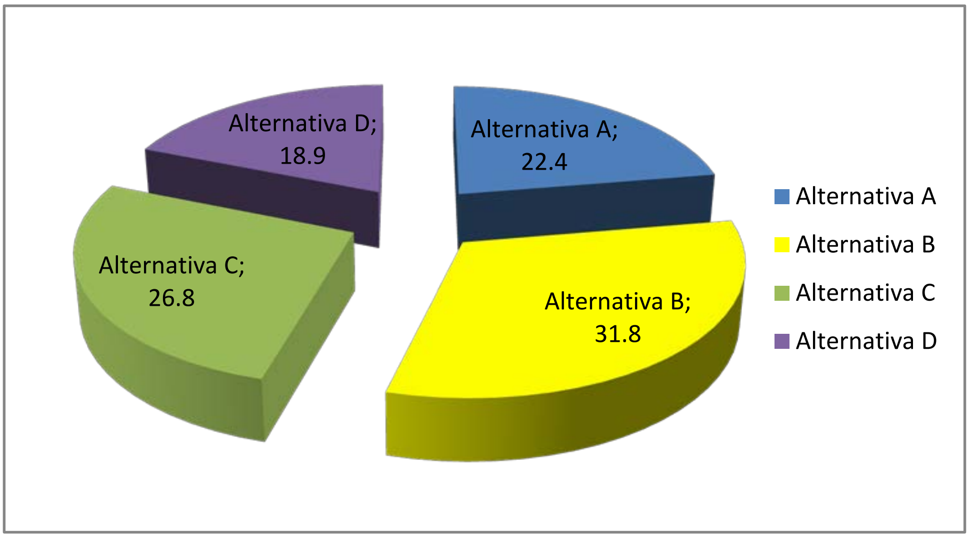


Figura 4.30. Distribución porcentual de la evaluación de la definición del conjunto de los números racionales, según alternativa de respuesta.

En los cinco grados de estudio se observa que el 26.8% (alternativa C) comprenden la definición del conjunto de los números racionales, así como el conjunto de pares ordenados de números enteros, además, tienen el cuidado de identificar la condición que la segunda componente es un número entero diferente de cero. En tanto que, un 18.9 % (alternativa D) no distinguen esta restricción. Además, según la alternativa B, el 31.8 % considera que un número racional es el cociente de dos **números** sin distinción alguna, es decir, dos números cualesquiera, no necesariamente enteros. Esta última observación es confirmada con el 22.4 % de las respuestas a la alternativa A, estos últimos estudiantes consideran que el conjunto de los números racionales está conformado por los números enteros y las fracciones; y aceptan que $\frac{\sqrt{3}}{5}$ es un número racional.

4.3.3.3 Tendencia de la Comprensión de las Propiedades Elementales de los Números Racionales

El diseño transversal posibilita percibir que el conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales evoluciona, conforme el estudiante salta de un grado a otro inmediato superior. Una descripción de esta tendencia evolutiva se puede observar en la Tabla 4.28 y en la Figura 4.31.

Tabla 4.28

Respuestas correctas de la Prueba sobre Propiedades Elementales del Número Racional, según grados de estudio escolar, en porcentajes, 2009.

Propiedades elementales	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	Quinto
Definición	12.8	**26.9**	21.6	**40.3**	32.9
Opuesto aditivo	5.1	38.5	45.9	41.6	45.2
Inverso multiplicativo	39.7	44.9	51.4	70.1	69.9
Relación de equivalencia	47.4	53.8	74.3	74.0	89.0
Relación de orden	55.1	73.1	70.3	76.6	86.3
Densidad	11.5	**7.7**	16.2	23.4	38.4

Fuente: Anexos A.3.1 a A.3.5.
Elaborado por el investigador.

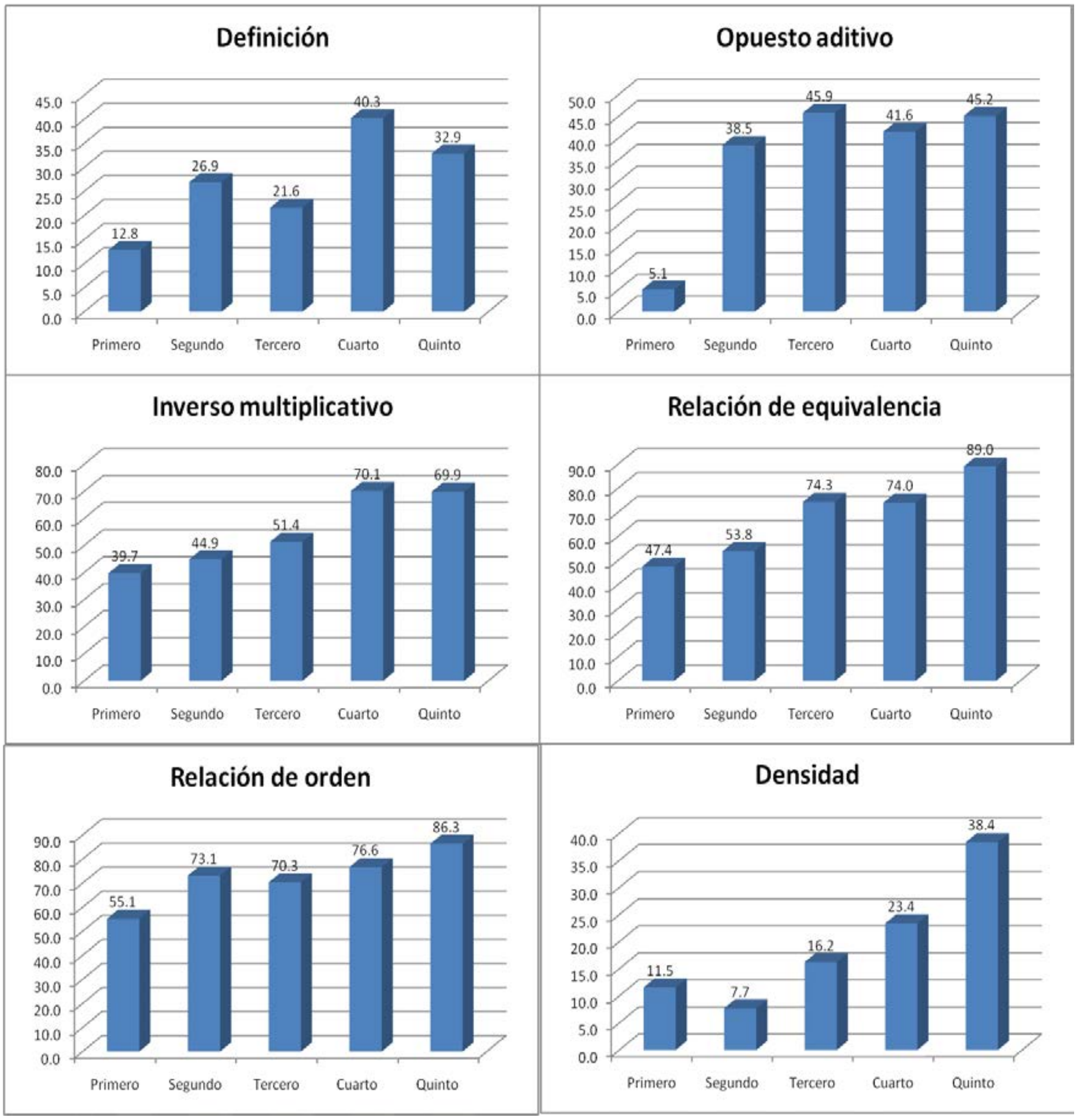


Figura 4.31. Evolución porcentual de las respuestas correctas de la prueba sobre propiedades elementales del número racional por grados de estudio escolar.

Es evidente que existe una evolución a pesar de algunas irregularidades, es el caso de la primera cuestión sobre la *Definición del número racional,* que en el segundo y cuarto grado rompen con la regularidad, con porcentajes mayores a sus sucesores, alcanzando un 26.9 % y un 40.3% respectivamente. Así mismo, la depresión en la sexta cuestión sobre *Densidad de los números* racionales en segundo grado es menor al de primer grado (7.7% $<$ 11.5%). Sin embargo, a pesar de las irregularidades anteriores, podemos afirmar que, en términos generales la tendencia de la comprensión de las propiedades de los números racionales mejora conforme el estudiante transita al grado de estudio inmediato superior.

4.3.3.4 Inferencia de la Evolución Respecto a la Diferencia de Medias

La evolución de conocimiento de las propiedades elementales que manifiestan los estudiantes se realiza utilizando la prueba de diferencia de medias. Para tal prueba, se consideran independientes los estratos de muestra por grados de estudio de tamaño n_i y n_{i+1}. Como se desconoce la varianza de la población, y queremos realizar una inferencia acerca de la media, será necesario reemplazar las varianzas poblacionales con las estimaciones disponibles, es decir, las varianzas muestrales; además, supondremos que las medias poblacionales son iguales.

En el siguiente diagrama se exhiben los estratos muestras independientes, así como las estadísticas por grados para comparar las medias de los grados de estudio. Se va a concluir al nivel de significancia del α=0.05, así mismo la media del grado superior es mayor que la del grado inferior.

Las hipótesis son:

H₀: $\boldsymbol{\mu_{i+1} - \mu_i = 0}$

No hay diferencia entre los puntajes medios de conocimiento de propiedades del número racional de los grados $\boldsymbol{\mu_{i+1}}$ y $\boldsymbol{\mu_i}$**.**

H₁: $\boldsymbol{\mu_{i+1} - \mu_i} > 0$

El puntaje medio del conocimiento de las propiedades del grado superior $\boldsymbol{\mu_{i+1}}$ es mayor que la del grado inferior $\boldsymbol{\mu_i}$**.**

Nivel de la probabilidad de significancia α = 0.05

En cada caso la regla de decisión es si la Z_c calculada es mayor que la $Z_{(0.05)}$ tabulada, se rechaza la hipótesis nula H_0.

Caso IV

Grado	n	$\bar{X}$	s
Quinto	73	3.616	1.126
Cuarto	77	3.260	1.418

$Z_c =$ 1.711>1.65

Caso III

Grado	n	$\bar{X}$	s
Cuarto	77	3.260	1.418
Tercero	74	2.797	1.271

$Z_c =$ 2.112>1.65

Caso II

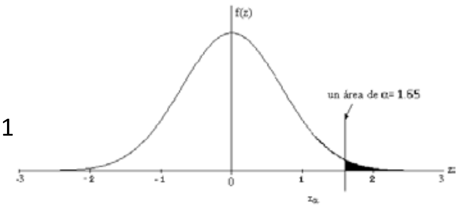
Grado	n	$\bar{X}$	s
Tercero	74	2.797	1.271
Segundo	78	2.449	1.052

$Z_c =$ 1.836>1.65

Caso I

Grado	n	$\bar{X}$	s
Segundo	78	2.449	1.052
Primero	78	1.718	1.043

$Z_c =$ 4.355>1



En todos los cuatro casos la Z_c es mayor que $Z_{(0.05)}$ =1.65

Decisión estadística: como en todos los casos Z_c es mayor que $Z_{(0.05)}$ = 1.65, entonces se rechaza la hipótesis nula H_0.

Conclusión: se afirma que el conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales, en los grados superiores es mayor que en los grados inferiores. Esto permite concluir que el progreso es notable conforme se sube o salta de un grado al inmediato superior.

4.3.4 EVALUACIÓN DE LA RELACIÓN MÚLTIPLE

La manera de efectuar predicciones más certeras sobre la comprensión de los significados del número racional positivo implica adoptar una concepción multicausal del fenómeno; y plantearse cuestiones más complejas, por ejemplo, preguntar si la predicción de la comprensión de los significados del número racional positivo, por medio de una prueba, es más exacto cuando se considera la capacidad de resolver situaciones problemáticas que involucran operaciones básicas y el conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales. Por esta exigencia de la cuestión, es necesario utilizar un diseño de investigación que evalúe la relación entre tres variables de regresión lineal múltiple.

Las tablas desde la A.5.1 al A.5.5 del Anexo, presentan datos sobre la observación del grado de exactitud que se logra en la predicción de la comprensión de los significados del número racional, la capacidad de resolver operaciones básicas y el conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales. En las tablas se observan que a cada estudiante le corresponde una triada de valores que se denota por: (X_1, X_2, Y)

X_1: Resolución de operaciones básicas con fracciones.

X_2: Conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales.

Y: Comprensión de los significados del número racional positivo.

4.3.4.1 Estimación de los Parámetros por Ecuaciones Normales

El procedimiento para encontrar los estimadores de los parámetros del modelo de regresión múltiple consistió en resolver el sistema de ecuaciones normales. Los cálculos de los parámetros fueron realizados con el Software Excel con la herramienta Análisis de datos.

El modelo de regresión múltiple que describe la relación entre las variables independientes X_1 y X_2, sobre la variable dependiente Y, adquiere la forma:

Primer grado: $\hat{Y} = 0.718192619 + 0.511956803X_1 + 0.255487183X_2$

Segundo grado: $\hat{Y} = 0.689077045 + 0.204549828X_1 + 0.627564766X_2$

Tercer grado: $\hat{Y} = 1.922253408 + 0.474603989X_1 + 0.000256492X_2$

Cuarto grado: $\hat{Y} = 1.578828616 + 0.605625X_1 + 0.078765723X_2$

Quinto grado: $\hat{Y} = 2.362666852 + 0.352782444X_1 + 0.30895113X_2$

4.3.4.2 Evaluación General del Modelo de Regresión Múltiple

Se realizó midiendo la magnitud en que los valores estimados o predichos por el modelo de regresión múltiple se desvían de los valores observados en la muestra.

Los valores estimados por el modelo de regresión, conjuntamente con los valores observados de la comprensión de los significados del número racional positivo, se muestran en las tablas A.7.1 al A.7.5 del anexo.

Coeficiente de determinación múltiple

El modelo de regresión múltiple supone que la variación total de la variable dependiente está formada por una variación explicada, la cual mide la magnitud de la variable total, que es explicada por el modelo de regresión estimado; y por una variación inexplicada que mide la magnitud de la variación total, que no queda comprendida dentro del modelo de regresión ajustado. Esta suposición se expresa en la siguiente ecuación:

$$\mathbf{SC_{total} = SC_{explicada} + SC_{inexplicada}}$$

Queda enunciado matemáticamente en la siguiente fórmula:

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

Suma de cuadrado por grados

Tabla 4. 29

Suma de cuadrados según los grados de estudio escolar.

	$\mathbf{SC_{total} = SC_{explicada} + SC_{inexplicada}}$
Primer grado	161.9615385 = 44.73496085 + 117.2265776
Segundo grado	144.9871795 = 49.99263375 + 94.99454574
Tercer grado	206.6486486 = 23.95621893 + 182.6924297
Cuarto grado	154.5194805 = 46.20994436 + 108.3095362
Quinto grado	135.0136986 = 25.61957461 + 109.394124

Fuente: Anexos A.6.1 a A.6.5.
Elaborado por el investigador.

La magnitud de la proporción de la variación total que aplica el modelo de regresión múltiple se conoce como *coeficiente múltiple,* cuya fórmula es:

$$R^2_{y,1,2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}$$

En efecto la razón se establece entre la suma de cuadrados explicada y la suma de cuadrados totales.

Los *coeficientes múltiples* por cada grado de estudio escolar son:

Coeficiente de determinación múltiple del primer grado es:

$$R^2_{y,1,2} = \frac{44.73496085}{161.9615385} = 0.27620731$$

Su interpretación es que aproximadamente el 27.62% de la variable (Y) ‘comprensión de los significados del número racional’ es explicada por la regresión de la variable (X_1) ‘resolución de operaciones básicas con fracciones’ y la variable (X_2) ‘conocimiento de las propiedades elementales del número racional’.

Coeficiente de determinación múltiple del segundo grado es:

$$R^2_{y,1,2} = \frac{49.99263375}{144.9871795} = 0.344807271$$

Su interpretación es que aproximadamente el 34.48% de la variable ‘comprensión de los significados del número racional’ es explicada por la regresión de la variable resolución de operaciones básicas con fracciones’ y la variable ‘conocimiento de las propiedades elementales del número racional’.

Coeficiente de determinación múltiple del tercer grado es:

$$R^2_{y,1,2} = \frac{23.95621893}{206.6486486} = 0.115927295$$

Su interpretación es que aproximadamente el 11.59% de la variable de ‘comprensión de los significados del número racional’ es explicada por la regresión de las variables ‘resolución de operaciones básicas con fracciones’ y ‘conocimiento de las propiedades elementales del número racional’.

.***Coeficiente de determinación múltiple del cuarto grado*** es:

$$R^2_{y,1,2} = \frac{46.20994436}{154.5194805} = 0.299055784$$

Su interpretación es que aproximadamente el 29.91% de la variable de ‘comprensión de los significados del número racional’ es explicada por la regresión de la variables ‘resolución de operaciones básicas con fracciones’ y la variable ‘conocimiento de las propiedades elementales del número racional’.

Coeficiente de determinación múltiple del quinto grado es:

$$R^2_{y,1,2} = \frac{25.61957461}{135.0136986} = 0.189755372$$

De forma análoga, la interpretación correspondiente al quinto grado es que aproximadamente el 18.97% de la variable (Y) es explicada por la regresión de las variables (X_1) y (X_2).

4.3.4.3 Análisis de Varianza

Este análisis de varianza sirve para probar la hipótesis nula:

$$\beta_1 = \beta_2 = 0$$

Lo que significa que, todas las variables independientes no tienen ningún valor explicativo de la variación de Y. Es decir, que la capacidad de efectuar las operaciones básicas con fracciones y el conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales, no tienen ningún valor explicativo en la comprensión de los significados del número racional.

Las hipótesis para cada grado son las siguientes:

Análisis de varianza del primer grado:

H_o: $\beta_1 = \beta_2 = 0$

H_1: $\beta_1 \neq \beta_2 \neq 0$

El nivel de la probabilidad de significancia es $\alpha = 0.05$

Tabla 4.30

Estadísticas del análisis de varianza para la regresión múltiple del primer grado.

Fuentes de variación	***SC***	***gl***	***MC***	***Razón F***	***P***
Regresión lineal	44.73496085	2	22.36748042	14.31041549	P < 0.05
Residual (error)	117.2265776	75	1.563021035		P=5.43916E-06
Total	161.9615385	77			
${}_{0.95}F_{2,75}$ = 3.15	Como $F_t = 3.15 < F_c = 14.31$, entonces se rechaza la hipótesis nula.				

Fuente: Anexos A.6.1.
Elaborado por el investigador.

En el <u>primer grado,</u> se concluye que el modelo de regresión múltiple explica una proporción significativamente alta de la variación de la comprensión de los significados del número racional; es decir, la comprensión de los significados del número racional está linealmente relacionado con la capacidad de efectuar las operaciones básicas con fracciones y el conocimientos de las propiedades elementales del número racional positivo.

Análisis de varianza del segundo grado:

H_o: $\beta_1 = \beta_2 = 0$

H_1: $\beta_1 \neq \beta_2 \neq 0$

El nivel de la probabilidad de significancia es $\alpha = 0.05$

Tabla 4. 31

Estadísticas del análisis de varianza para la regresión múltiple del segundo grado.

Fuentes de variación	***SC***	***gl***	***MC***	***Razón F***	***P***
Regresión lineal	49.99263375	2	24.99631687	19.73506743	$P < 0.05$
Residual (error)	94.99454574	75	1.266593943		P=1.29969E-07
Total	144.9871795	77			
$_{0.95}F_{2,75}$ = 3.15	Como F_t = 3.15 < F_c = 19.74, entonces se rechaza la hipótesis nula.				

Fuente: Anexos A.6.2.
Elaborado por el investigador.

En el segundo grado, el modelo de regresión múltiple explica una proporción significativamente alta de la variación de la comprensión de los significados del número racional; es decir, la comprensión de los significados del número racional está linealmente relacionada con la capacidad de efectuar las operaciones básicas con fracciones y el conocimiento de las propiedades elementales del número racional positivo.

Análisis de varianza del tercer grado:

H_o: $\beta_1 = \beta_2 = 0$

H_1: $\beta_1 \neq \beta_2 \neq 0$

El nivel de la probabilidad de significancia es $\alpha = 0.05$

Tabla 4.32

Estadísticas del análisis de varianza para la regresión múltiple del tercer grado.

Fuentes de variación	***SC***	***gl***	***MC***	***Razón F***	***P***
Regresión lineal	23.95621893	2	11.97810947	4.655068485	$P < 0.05$
Residual (error)	182.6924297	71	2.573132813		P=0.012598631
Total	206.6486486	73			
${}_{0.95}F_{2,71} = 3.15$	Como $F_t = 3.15 < F_c = 4.66$, entonces se rechaza la hipótesis nula.				

Fuente: Anexos A.6.3.
Elaborado por el investigador.

En el tercer grado, el modelo de regresión múltiple explica una proporción significativamente alta de la variación de la comprensión de los significados del número racional; es decir, la comprensión de los significados del número racional está linealmente relacionada con la capacidad de efectuar las operaciones básicas con fracciones y el conocimiento de las propiedades elementales del número racional positivo.

Análisis de varianza del cuarto grado:

H_o: $\beta_1 = \beta_2 = 0$

H_1: $\beta_1 \neq \beta_2 \neq 0$

El nivel de la probabilidad de significancia es $\alpha = 0.05$

Tabla 4.33

Estadísticas del análisis de varianza para la regresión múltiple del cuarto grado.

Fuentes de variación	***SC***	***gl***	***MC***	***Razón F***	***P***
Regresión lineal	46.20994436	2	23.10497218	15.78594094	$P < 0.05$
Residual (error)	108.3095362	74	1.463642381		P=1.95114E-06
Total	154.5194805	76			
${}_{0.95}F_{2,74} = 3.15$	Como $F_t = 3.15 < F_c = 15.79$, entonces se rechaza la hipótesis nula.				

Fuente: Anexos A.6.4.
Elaborado por el investigador.

En cuarto grado, el modelo de regresión múltiple explica una proporción significativamente alta la variación de la comprensión de los significados del número racional; es decir, la comprensión de los significados del número racional está linealmente relacionada con la capacidad de efectuar las operaciones básicas con fracciones y el conocimiento de las propiedades elementales del número racional positivo.

Análisis de varianza del quinto grado:

H_o: $\beta_1 = \beta_2 = 0$

H_1: $\beta_1 \neq \beta_2 \neq 0$

El nivel de la probabilidad de significancia es $\alpha = 0.05$

Tabla 4.34

Estadísticas del análisis de varianza para la regresión múltiple del quinto grado.

Fuentes de variación	***SC***	***gl***	***MC***	***Razón F***	***P***
Regresión lineal	25.61957461	2	12.80978731	8.196830674	$P < 0.05$
Residual (error)	109.394124	70	1.5627732		P=0.000633236
Total	135.0136986	72			
${}_{0.95}F_{2,70}$ = 3.15	Como F_t = 3.15 < F_c = 8.120, entonces se rechaza la hipótesis nula.				

Fuente: Anexos A.6.5.
Elaborado por el investigador.

En quinto grado, el modelo de regresión múltiple explica una proporción significativamente alta la variación de la comprensión de los significados del número racional; es decir, la comprensión de los significados del número racional está linealmente relacionada con la capacidad de efectuar las operaciones básicas con fracciones y el conocimiento de las propiedades elementales del número racional positivo.

4.3.4.4 Evaluación Particular del Modelo de Regresión Múltiple

En este apartado determinamos la importancia relativa de cada variable independiente, en particular, en la descripción de la variable dependiente.

Para los cálculos de los estadísticos se ha utilizado la herramienta de Análisis de Datos de Software Microsoft Excel.

a. Evaluación de los parámetros del modelo

Es necesario determinar la importancia que tiene cada variable independiente: conocimiento del algoritmo de las operaciones básicas con fracciones y conocimiento de las propiedades elementales. En la explicación de la variable dependiente: comprensión de los significados del número racional positivo es necesario computar el estadístico t_{bj}, que se distribuye como el valor de la distribución *t de Student* con *n-k-1* grados de libertad, el cual se define por la ecuación:

$$t_{bj} = \frac{b_j}{S_{bj}} = \frac{b_j}{s\sqrt{C_{jj}}} = \frac{b_j}{\sqrt{MC_{in\exp licada}}\sqrt{C_{jj}}}$$

A continuación se expone la explicación del cálculo del estadístico t_{bj} del primer grado y en la Tabla 4.35 se presenta los estadísticos de los cinco grados.

Primer grado:

Dada las matrices:

$$\left(X^T X\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.05917 & -0.0118 & -0.01415777 \\ -0.01177 & 0.01244 & -0.00670952 \\ -0.01416 & -0.0067 & 0.01555146 \end{bmatrix} \qquad (X^T Y) = \begin{bmatrix} 165 \\ 374 \\ 328 \end{bmatrix}$$

$$b = \left(X^T X\right)^{-1}\left(X^T Y\right) = \begin{bmatrix} 0.71819 \\ 0.51196 \\ 0.25549 \end{bmatrix}$$

$$t_{b0} = \frac{0.71819}{\sqrt{1.563021035} \times \sqrt{0.05917}} = \frac{0.71819}{1.250208397 \times 0.2432488438} = \frac{0.71819}{0.3041117471} = 2.361599007$$

Prueba de hipótesis para β_0:

H_0: β_0 = 0   El modelo de regresión parte del origen (0, 0, 0).
H_1: $\beta_0 \neq 0$ El modelo de regresión no parte del origen (0, 0, 0).
gl = 78-2-1=75
El nivel de la probabilidad de significancia es α = 0.05

$$t_{(\alpha=0,05)} = 2.00 < t_{b0} = 2.361599007$$

Dado que el estadístico t_{bj} observado $t_{b0} = 2.361599007$ es mayor que la *t* tabulada $t_{(\alpha=0,05)}$ = 2.00. En consecuencia, se rechaza la hipótesis nula. Se concluye que existen evidencias a nivel probabilístico de que el origen del modelo de regresión múltiple es diferente de cero.

Prueba de hipótesis para β_1:

Las siguientes pruebas de hipótesis b_1 y b_2 son más importantes porque proporcionan información acerca de la magnitud de la contribución de cada variable independiente, en la explicación de la variable dependiente.
Para las hipótesis:
H_0: β_1 = 0

La r*esolución de operaciones básicas con fracciones* no contribuye significativamente a la explicación de la *comprensión de los significados del número racional positivo.*

H_1: $\beta_1 \neq 0$

La r*esolución de operaciones básicas con fracciones* contribuye significativamente a la explicación de la *comprensión de los significados del número racional positivo.*

gl = 78-2-1=75
El nivel de la probabilidad de significancia es α = 0.05

$$t_{(\alpha=0,05)} = 2.00 < t_{b1} = 3.67085$$

El estadístico t_{bj} observado es: $t_{b1} = 3.67085$, en tanto la *t* tabulada es 2.00; con el valor crítico de *t* para una prueba bilateral cuando α = 0.05 y los grados de libertad son 75. En consecuencia, se rechaza la hipótesis nula. Se concluye que existe una relación lineal significativa entre la variable *Y*:

comprensión de los significados del número racional y la variable independiente X_1: cálculo de las operaciones básicas con fracciones, mientras X_2 se mantiene constante. Significa que los datos tomados del primer grado proporcionan evidencias suficientes para afirmar que la puntuación obtenida en la "*Prueba sobre operaciones básicas con fracciones"* es una variable útil para explicar la *comprensión de los significados del número racional positivo*, cuando se considera constante la puntuación de la *Prueba sobre propiedades elementales de los números racionales".*

Prueba de hipótesis para β_2:

En relación al segundo coeficiente de regresión β_2 se tiene:

Las hipótesis:

$H_0: \beta_2 = 0$

El *conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales* no contribuye significativamente a la explicación de la *comprensión de los significados del número racional positivo.*

$H_1: \beta_2 \neq 0$

El *conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales* contribuye significativamente a la explicación de la *comprensión de los significados del número racional positivo.*

Grados de libertad: gl = 78-2-1=75

El nivel de la probabilidad de significancia es α = 0.05

$$t_{(\alpha=0,05)} = 2.00 < t_{b2} = 1.63871$$

La $t_{b2} = 1.63871$ observada es menor que la *t=2.00* tabulada, en consecuencia, no se puede rechazar la hipótesis nula. Es decir, el *conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales* no tiene una correlación lineal con la *comprensión de los significados del número racional positivo.*

Luego de la explicación del proceso de cálculo de t_{bj} y la toma de decisión, en la prueba de hipótesis, presentamos los resultados de los cinco grados de estudio escolar para su discusión:

Tabla 4. 35

Estadísticos b_{bj} para la evaluación de los parámetros del modelo, según los grados de estudio escolar.

Estadístico	**Primer Grado**	**Segundo Grado**	**Tercer Grado**	**Cuarto Grado**	**Quinto Grado**
t_{b0}	2.36166477	2.008421845	3.903152597	3.848428536	4.081750181
t_{b1}	3.670854466	1.573866745	2.477596875	4.65543678	2.193379184
t_{b2}	1.638706297	4.430932393	0.001410609	0.718987233	2.132361508
gl	75	75	71	74	73

Elaborado por el investigador.

Dada que la prueba de hipótesis es bilateral, cuando α = 0.05 con los grados de libertad (*gl*= 75, 75, 71, 74 y 73 de los cinco grados de estudio); por lo tanto, para la toma de decisión es necesario considerar que el valor crítico de *t* es 2.00 (*t* = 2.00), según la Tabla de Valores críticos de la distribución de *t* de *Student.*

4.3.4.5 Correlación Parcial

En esta sección se mide la intensidad de la relación entre dos variables, sin considerar el efecto de las demás variables. Para este efecto obtenemos la matriz simétrica ***R*** de correlación simple de la forma:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{y1} & r_{y2} \\ r_{1y} & 1 & r_{12} \\ r_{2y} & r_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

Se tiene dos variables independientes y una dependiente, por lo que existen tres coeficientes de correlación simple, son:

$r_{1y} = r_{y1}$, la correlación simple entre Y y X_1,

$r_{2y} = r_{y2}$, la correlación simple entre Y y X_2,

$r_{21} = r_{12}$, la correlación simple entre X_1 y X_2,

Para obtener la matriz simétrica ***R***, el primer paso es estandarizar las puntuaciones de cada variable. La fórmula para las calificaciones estándar es:

$$Z = \frac{X_i - \bar{X}}{s}$$

En los Anexos A.8.1 a A.8.5 se presentan las tablas de *Puntuaciones tipificadas para las variables Y_1, X_1, X_2,* de los cinco grados.

A las columnas Z_y, Z_{x1} y Z_{x2} de las tablas A.8.1 al A.8.5 del anexo se llaman matriz de calificaciones estándar *M*. Con esta matriz se calcula *R*, por medio de la fórmula $R = \frac{1}{n} M^T M$, donde *n* es el número de sujetos en el grado o estrato muestral. Los cálculos matriciales se realizan con ayuda del software Microsoft Excel.

Correlaciones parciales del primer grado

A continuación se describe el proceso de cálculo de la matriz *M, R* los coeficientes de correlación r_{1y}, r_{2y} y r_{21} y los coeficientes parciales del primer grado.

$$R = \begin{bmatrix} 0.987179488 & 0.493877987 & 0.377412837 \\ 0.493877987 & 0.987179488 & 0.476121876 \\ 0.377412837 & 0.476121876 & 0.987179488 \end{bmatrix}$$

Como se observa, la correlación de cada variable consigo misma es igual a 1 aproximadamente (diagonal principal). De la matriz simétrica se tiene los coeficientes de correlación entre variables. En consecuencia:

$r_{1y} = r_{y1} = 0.493877987$ correlación simple entre Y y X_1,

$r_{2y} = r_{y2} = 0.377412837$ correlación simple entre Y y X_2,

$r_{21} = r_{12} = 0.476121876$ correlación simple entre X_1 y X_2,

Con los datos de la matriz *R* se puede calcular los coeficientes de correlación parcial.

a) La correlación parcial entre Y y X_1, cuando X_2 se mantiene constante:

$$r_{y1.2} = \frac{r_{y1} - (r_{y2})(r_{12})}{\sqrt{(1 - r_{y2}^2)(1 - r_{12}^2)}}$$

$$r_{y1.2} = \frac{0.493877987 \ - (0.377412837\ )(0.476121876)}{\sqrt{[1 - (0.377412837\ )^2][1 - (0.476121876\ )^2]}} = 0.3858$$

b) La correlación parcial entre Y y X_2, cuando X_1 se mantiene constante:

$$r_{y2.1} = \frac{r_{y2} - (r_{y1})(r_{12})}{\sqrt{(1 - r_{y1}^2)(1 - r_{12}^2)}}$$

$$r_{y2.1} = \frac{0.377412837 \ - (0.493877987\ )(0.476121876)}{\sqrt{[1 - (0.493877987\ )^2][1 - (0.476121876)^2]}} = 0.186$$

c) La correlación parcial entre X_1 y X_2, cuando Y se mantiene constante:

$$r_{12.y} = \frac{r_{12} - (r_{y1})(r_{y2})}{\sqrt{(1 - r_{y1}^2)(1 - r_{y2}^2)}}$$

$$r_{12.y} = \frac{0.476121876 \ - (0.493877987)(0.377412837\ )}{\sqrt{[1 - (0.493877987)^2][1 - (0.377412837\ \ )^2]}} = 0.3598$$

A continuación presentamos la tabla resumen de los coeficientes de correlación parcial en el caso de tres variables de los cinco grados.

Tabla 4.36

Estadísticos r, coeficiente de correlación parcial, según los grados de estudio escolar.

Coeficiente de correlación parcial	Primer Grado	Segundo Grado	Tercer Grado	Cuarto Grado	Quinto Grado
r_{1y}	0.386	0.180	0.278	0.470	0.251
r_{2y}	0.186	0.450	0.004	0.086	0.245
r_{21}	0.360	0.361	0.552	0.350	0.336

Elaborado por el investigador.

Contraste de los coeficientes de correlación parcial

Se prueba la hipótesis nula de que el valor correspondiente en la población de cualquier coeficiente de correlación parcial es cero, por medio de la fórmula:

$$t = r\left[\frac{n-k-1}{1-r^2}\right]^{1/2}$$

La cual se distribuye como la *t de Student*, con *n-k-1* grados de libertad.

A continuación se explica el contraste de los coeficientes de correlación parcial del primer grado:

a) Para Y y X_1, cuando X_2 se mantiene constante:

H_0: $r_{y1.2} = 0$

H_1: $r_{y1.2} \neq 0$

El nivel de la probabilidad de significancia es α = 0.05

$$t = 0.38581132\left[\frac{78-2-1}{1-0.385811320^2}\right]^{1/2} = 3.62161796$$

Como t = 3.62161796 es mayor que la $t_{(\alpha\, =\, 0.05)}$= 1.990, entonces se puede rechazar la hipótesis nula.

Se afirma que existe una correlación significativa entre las puntuaciones de la *Prueba sobre comprensión de los significados del número racional* y las puntuaciones de la *Prueba sobre operaciones básicas con fracciones,* cuando se mantiene constante las puntuaciones de la *Prueba sobre propiedades elementales de los números racionales.*

b) Para Y y X_2, cuando X_1 se mantiene constante:

H_0: $r_{y2.1}$ = 0

H_1: $r_{y2.1} \neq 0$

El nivel de la probabilidad de significancia es α = 0.05

$$t = 0.18605524 \left[\frac{78-2-1}{1-0.18605524^2}\right]^{1/2} = 1.63991984$$

Como t = 1.63991984 es menor que la $t_{(\alpha\ =\ 0.05)}$= 1.990, entonces no se rechaza la hipótesis nula.

Cuando se mantiene constante las puntuaciones de la *Prueba sobre operaciones básicas con fracciones*, no se verifica una correlación significativa entre las puntuaciones de la *Prueba sobre comprensión de los significados del número racional* y las puntuaciones de la *Prueba sobre propiedades elementales de los números racionales.*

c) Para X_1 y X_2, cuando Y se mantiene constante:

H_0: $r_{12.y}$= 0

H_1: $r_{12.y} \neq 0$

El nivel de la probabilidad de significancia es α = 0.05

$$t = 0.35980743 \left[\frac{78-2-1}{1-0.35980743^2}\right]^{1/2} = 3.33969446$$

Como t = 3.33969446 es mayor que la $t_{(\alpha = 0.05)}$= 1.990, entonces se rechaza la hipótesis nula.

En este tercer caso, se encuentra que existe una correlación directa y significativa entre las puntuaciones de la *Prueba sobre operaciones básicas con fracciones* y la *Prueba sobre propiedades elementales de los números racionales*, cuando se mantienen constantes las puntuaciones de la *Prueba sobre comprensión de los significados del número racional.*

Luego de esta explicación del proceso de prueba, en la Tabla 4.37 se presenta los resultados del cálculo de los valores de *t* estimadas de los cinco grados, para su discusión posterior.

Tabla 4.37

Valores del estadístico t para el contraste de los coeficientes de correlación parcial, según los grados de estudio escolar.

Estadístico *t*	**Primer Grado**	**Segundo Grado**	**Tercer Grado**	**Cuarto Grado**	**Quinto Grado**
t (para Y y X_1)	3.622	1.583	2.440	4.577	2.173
Cuando X_2 se mantiene constante.					
t (para Y y X_2)	1.640	4.362	0.030	0.739	2.113
Cuando X_1 se mantiene constante.					
t (para X_1 y X_2)	3.340	3.354	5.574	3.213	2.982
Cuando Y se mantiene constante.					
gl	75	75	71	74	73

Para $t_{(\alpha=0.05)} = 2.00$.
Elaborado por el investigador.

4.4 DISCUSIÓN DE RESULTADOS

La investigación, objeto del presente informe, se ha centrado en la determinación de aspectos de la comprensión de los significados, los algoritmos de operaciones básicas y propiedades elementales de los números racionales positivos, en su representación fraccional. Luego de la presentación de resultados, se está en posición de evaluar e interpretar las implicancias, respecto a la hipótesis.

Dada la hipótesis general: "**A mayor capacidad de resolución de operaciones básicas con fracciones y su conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales corresponde mayor comprensión de los significados del número racional positivo"**. Es necesario discutir cada una de las hipótesis específicas, enfatizando las consecuencias teóricas de los resultados y la validez de las conclusiones.

Discusión de resultados sobre la comprensión de los significados

La comprensión de los significados del número racional positivo, en su representación fraccional, es de naturaleza intuitiva y parcial, sustentado esencialmente en el significado parte-todo. El 83.0% de los sujetos observados interpretan correctamente solo dos significados y 47 estudiantes de cada cien logran interpretar los seis significados. El significado que comprenden con más éxito es el *de parte-todo continuo* que alcanzó el 76.8% y *parte-todo discreto* con 62.6%. En tanto, que el significado de medida apenas alcanza el 25.5% de empleo propio correcto en la interpretación de la cuestión. Además, el nivel de comprensión evoluciona de forma positiva conforme se sube de grado escolar, tal como fue demostrado con la prueba de diferencias de medias de la muestra estratificada.

Estos resultados confirman lo sostenido por Escolano, R. (2004) quien sostiene que el significado parte-todo de las fracciones no tiene su origen en las necesidades humanas, sino es el resultado de las necesidades didácticas, que permite eludir las actividades de medida con objetos tangibles que generan dificultades en la gestión de materiales; además, el significado parte-todo permite abreviar procesos de enseñanza. En consecuencia, se coincide con lo afirmado por Escolano, quien sostiene que, la enseñanza de los números racionales positivos en su representación fraccional se sustenta casi exclusivamente en el significado parte-todo.

En contraposición a lo anterior, la revisión histórica de la génesis del número racional revela que sus orígenes se localizan en los significados de medida; así, los babilonios y egipcios por su necesidad de realizar mediciones cada vez más precisas, tuvieron la necesidad de fraccionar la unidad de medida en subunidades o fracciones. Paradójicamente, el sistema didáctico renuncia a la génesis histórica de las fracciones para promover aprendizaje de los números racionales. De esta manera, en el sistema escolar el significado de medida se ha convertido en un objeto matemático marginal al momento de estudiar las fracciones, y consecuentemente, su comprensión es deficiente e intuitiva, basado esencialmente en el significado parte-todo, como se ha constatado en los resultados empíricos.

Es evidente la interferencia del significado parte-todo, esencialmente en su naturaleza continua, en la interpretación de los significados de medida, razón, cociente y operador. La comprensión de los significados del número racional se caracteriza por la marcada interferencia del significado parte-todo en la interpretación de los significados de medida, razón, cociente y operador, los cuales son secundarios en la comprensión.

Se constituye como una regularidad la interferencia del significado parte-todo en los significados de cociente 30.8%, medida 22.9%, razón 4.5% y operador de 12.1%; esta constante confirma la aseveración de la discusión anterior, sin embargo, es revelador que el significado de razón interfiera en la interpretación de los significados de parte-todo continuo 9.5%, parte-todo discreto 17.4% y medida 18.7%. Además, el significado de cociente tiene su presencia como interferente en los significados de razón con 6.3% y operador con 4.7%. Diferentes antecedentes de investigación como: Rodríguez (2005), León (1998), Escolano y Gairín (2005), Escolano (2001), Dos Santos (2005), Amorin, Flores y Moretti (2005), Llinares y Sánchez (1997), Gairín (1999), Ferreira (2005); todos ellos coinciden en afirmar que el aprendizaje de las fracciones, como representante del número racional, es complejo y está íntimamente relacionado con sus significados. Estos investigadores proponen para su abordaje en la enseñanza desde algún significado en particular como medida, o puntualizando que la interpretación parte-todo se ha posicionado como significado principal, para la introducción del número racional en el sistema didáctico. Sostienen que, este posicionamiento está perjudicando la comprensión de los significados del número racional, fenómeno que nosotros denominamos **interferencias del significado parte-todo.**

Discusión de resultados sobre la realización de operaciones básicas

Veintinueve de cada cien estudiantes logran resolver las cuatro operaciones con fracciones y el 63.8% realiza correctamente las operaciones en general. Respecto a la adición el 24.0% comete algún tipo de error; en la realización de la sustracción el 49.0% comete errores de cálculo; en la multiplicación el 26.0%; y en la división el 46.0% realiza cálculos erróneos. Aproximadamente, una tercera parte de los estudiantes tiene dificultad para realizar correctamente las operaciones básicas con fracciones, debido a que desconocen u olvidan el algoritmo, puesto que existe un fenómeno constante denominado obstáculo epistemológico que es la persistencia de los algoritmos de operaciones básicas del conjunto de los números enteros; en efecto, esta anomalía tiene una variedad que se manifiesta como una superposición de algoritmos propios de las operaciones con fracciones.

La prueba de diferencias entre medias permite rechazar la hipótesis nula de que la diferencia entre los promedios de logro en la realización de operaciones básicas con fracciones es cero. Lo cual, permite afirmar al nivel de significancia del $\alpha = 0.05$ que el promedio de logro en la realización de cálculo de operaciones básicas con fracciones de los estudiantes en los grados superiores es mayor que el promedio de logro de los grados inferiores. Lo que posibilita sostener que la comprensión de los algoritmos de adición, sustracción, multiplicación y división, mejora conforme los estudiantes pasan a grados superiores.

En la observación de los errores típicos en la realización la adición y sustracción de fracciones se identifica plenamente el fenómeno denominado obstáculo epistemológico postulado por Brousseau. Se entiende que, el aprendizaje satisfactorio del algoritmo de la adición de números enteros, que se fija en la mente de los estudiantes, resulta siendo un obstáculo al momento de aprender nuevos algoritmos de adición, como es la adición de fracciones. Este fenómeno se produce porque el algoritmo de adición de enteros resulta un escollo para comprender nuevos algoritmos y demanda mayor práctica y reflexión para su adaptación a nuevos algoritmos.

Relativo a la dinámica de los algoritmos previos y nuevos en la cognición del sujeto, se evidencia un nuevo fenómeno que denominamos **superposición de algoritmos**, el cual pasamos a definir de acuerdo a los tipos de errores identificados y de mayor frecuencia.

El 15.3% de los errores de adición del Tipo A son una confirmación empírica del fenómeno **Obstáculo Epistemológico**. Con la adición directa e independiente de los numeradores y denominadores queda evidente la presencia del algoritmo de adición de números enteros que no se adapta aun en el aprendizaje del nuevo algoritmo de adición de fracciones heterogéneas. De la misma manera, el 12.9% de los errores en la sustracción del Tipo A corroboran la afirmación anterior. Este tipo de error se caracteriza por efectuar sustracciones de los numeradores y denominadores respectivamente, como si se tratara de números enteros.

En la comprensión del algoritmo de la multiplicación de fracciones se encontró un fenómeno que denominamos **superposición de algoritmos**. El error de Tipo A que alcanza el 10% se caracteriza por presentar un rasgo propio del algoritmo de la división, la multiplicación en cruz, o puede ser la superposición del algoritmo de la adición en cruz, en ambos casos el estudiante efectúa la multiplicación de los denominadores que es correcto, seguido de las multiplicaciones en cruz, tal como se muestra en la Figura 4.26. El error del Tipo C, que alcanza el 13.4%, reconfirma la aseveración anterior, en este caso la superposición del algoritmo de la división es irrefutable.

El 10.3% de los errores en la división de fracciones del Tipo A corroboran la teoría de la superposición de algoritmos. Este tipo de error presenta una analogía con la adición de fracciones. Mientras que, el error del Tipo E muestra la superposición del algoritmo de multiplicación de fracciones en la división. Más revelador es aun el error del Tipo B, donde se verifica la intromisión del algoritmo de la división de número enteros, un 7.4% de los estudiantes dividen fracciones como si se tratara de números enteros; es decir, dividen numeradores entre sí y denominadores entre sí.

Discusión de resultados sobre el conocimiento de las propiedades elementales del conjunto de los números racionales.

El Diseño Curricular Nacional (2008), propone el descubrimiento de propiedades de los sistemas numéricos como capacidad y propone el estudio de las diversas representaciones, relación de orden y operaciones con números racionales como contenido, por otro lado, los libros de texto también desarrollan el estudio de las propiedades elementales de los números racionales.

La evaluación del conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales consideró: el número racional como un par ordenado de números enteros, donde el denominador es diferente de cero; opuesto aditivo; inverso multiplicativo; relación de equivalencia; relación de orden; y densidad de los números racionales. Esta evaluación, muestra que el 28.4% de los estudiantes conocen tres propiedades, el 72.1% conoce entre 0 y 3 propiedades y solo el 1.6% conoce las seis propiedades propuestas en la evaluación.

La definición que se estudia en el nivel de educación secundaria, materia de valuación, es $Q = \{(a,b) / a \in Z \wedge b \in Z^{*}\}$ donde Z^{*} es el conjunto de los enteros no nulos. Esta definición es una transposición didáctica (Chevallard, 1991), de la definición presentado por Birkhoff y MacLane (1954), quien explica que el conjunto de los números racionales es un campo donde se soluciona todas las ecuaciones de la forma *bx*=*a* con coeficiente entero *a* y $b \neq 0$. Este conjunto, que satisface estas necesidades, se consigue introduciendo "*ciertos símbolos*" nuevos *r*=(*a, b*), a los que se llamará *pares ordenados*, estos pares se pueden sumar, multiplicar e igualar exactamente como los cocientes *a/b* en un campo.

En discordancia con la definición de número racional, los resultados presentados en la Tabla 4.27 muestran que solo el 26.8% identifica la definición correcta expresada en la alternativa C. El 18.9% de estudiantes que marcan la alternativa D, revelan que no ven necesaria la restricción $b \neq 0$ en el par ordenado de la definición de número racional. Mientras que, el 22.4% cree que una fracción con términos irracionales pertenece al conjunto de los números racionales. En tanto que, el 31.8% cree que "Un número racional es el cociente de dos **números,** tal que el divisor es diferente de cero". Esta alternativa resultaría correcta siempre que tenga el cuidado de aclarar que el cociente es de dos **números enteros,** mientras no sea así, revela imprecisión en la definición.

A diferencia de las demás propiedades, la relación de orden es de mayor comprensión, alcanzando el orden del 72.1% de respuestas correctas. En tanto que, la densidad de los números racionales es la menos lograda, donde solo 19 de cada 100 estudiantes logra encontrar una fracción intermedia entre otras dos fracciones.

Se percibe una evolución permanente en el conocimiento de las propiedades elementales del número racional, tal como sugieren los índices porcentuales de la Figura 4.31, sin embargo, esto requiere de una prueba exhaustiva, para tal efecto se ha recurrido a la prueba de diferencia de medias. Luego de los cálculos y estimaciones necesarias se rechaza la hipótesis nula al nivel de significancia del $\alpha = 0.05$. En los cuatro casos: la diferencia de medias de los grados primero y segundo; segundo y tercero; tercero y cuarto; y finalmente, cuarto y quinto; permite afirmar que el conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales de los grados superiores siempre son mayores al de los grados inferiores en la educación secundaria.

Discusión de resultados sobre la relación entre las variables

Respecto a la hipótesis "La capacidad de resolución de operaciones básicas con fracciones y el conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales se relacionan directamente con la comprensión de los significados del número racional positivo”, se encontró que los coeficientes de determinación múltiple de los cinco grados de estudios establecen lo siguiente:

$R^2_{y,1,2}$ de primer grado = 27.620731

$R^2_{y,1,2}$ de segundo grado = 34.4807271

$R^2_{y,1,2}$ de tercer grado = 11.5927295

$R^2_{y,1,2}$ de cuarto grado = 29.9055784

$R^2_{y,1,2}$ de quinto grado = 18.9755372

De ellos se puede calcular que el coeficiente total que involucra a los cinco grados es:

$R^2_{y,1,2}$total de los cinco grados = 24.5150607

Cuya interpretación es: aproximadamente solo el 24.5% de la variable “Comprensión de los significados del número racional” es explicada por la regresión de las variables “Resolución de operaciones básicas con fracciones” y “Conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales”.

El análisis de varianza posibilitó rechazar la hipótesis nula “las dos variables independientes no tienen ningún valor explicativo en la variable comprensión de los significados del número racional”. Los resultados empíricos permiten afirmar con una seguridad del 95% que en todos los casos, primero a quinto grado escolar, el modelo de regresión múltiple explica en una proporción significativamente alta la variación de la ***comprensión de los significados del número racional***; es decir, la comprensión de los significados está linealmente relacionado con la ***capacidad de efectuar o resolver operaciones básicas con fracciones*** y el ***conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales***.

Para la evaluación particular del modelo de regresión múltiple, fue necesario establecer la importancia relativa de cada variable independiente en la descripción de la variable dependiente. Para la evaluación de los parámetros del modelo β_0, β_1, β_2, de los cinco grados de estudio se organizó la Tabla 4.38.

Se explicitan los tres tipos de prueba de hipótesis:

El origen del modelo de regresión es diferente de cero

H_0: $\beta_0 = 0$ *El modelo de regresión parte de cero.*

H_1: $\beta_0 \neq 0$ *El modelo de regresión no parte de cero*

Nivel de la probabilidad de significancia es $\alpha = 0.05$.

Discusión: En todos los grados se ha encontrado que el modelo de regresión no parte de cero, sino existe evidencia de que el origen del modelo de regresión múltiple es diferente de cero.

Existe relación lineal entre X_1 y Y, cuando X_2 se mantiene constante.

H_0: $\beta_1 = 0$ *La **capacidad de resolver operaciones básicas con fracciones** no contribuye significativamente a la explicación de la **comprensión de los significados del número racional positivo**.*

H_1: $\beta_1 \neq 0$ *Existe una relación lineal significativa entre las variables **capacidad de resolver operaciones básicas con fracciones** y **comprensión de los significados del número racional positivo**.*

Nivel de la probabilidad de significancia es $\alpha = 0.05$.

Discusión: Casi en todos los grados, a excepción de segundo, se rechaza la hipótesis nula y se afirma que existe una relación lineal significativa entre las variables ***capacidad de resolver operaciones básicas con fracciones*** *y* ***comprensión de los significados del número racional***.

Existe relación lineal entre X_2 y Y, cuando X_1 se mantiene constante.

H_0: $\beta_2 = 0$ *El **conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales** no contribuye a la explicación de la **comprensión de los significados del número racional positivo.***

H_1: $\beta_2 \neq 0$ *Existe una relación lineal significativa entre las variables **conocimiento de las propiedades elementales del conjunto de los números racionales** y la **comprensión de los significados del número racional positivo.***

Nivel de la probabilidad de significancia es $\alpha = 0.05$.

Discusión: En los grados primero, tercero y cuarto no se puede rechazar la hipótesis nula, es decir, el ***conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales*** no contribuye a la explicación de la ***comprensión de los significados del número racional***. Sin embargo, en los grados segundo y quinto sí se rechaza. Como es natural, se debe considerar que el DCN (2008 p. 324) tiene programado, en primero y segundo grados, el estudio de las propiedades del sistema numérico de los racionales, esto puede ser una explicación de este hecho particular.

Discusión de las correlaciones parciales

Respecto a las hipótesis de investigación que proponen correlaciones parciales, se encontró los siguientes resultados:

Dadas las hipótesis.

- A mayor capacidad de resolución de operaciones básicas con fracciones, existe mayor comprensión de los significados del número racional, y
- A mayor conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales, corresponde mayor comprensión de los significados del número racional positivo.

Primeramente, se explica el uso del estadístico *t* que se distribuye como la *t de Student*, con *n-k-1* grados de libertad. Se establecen tres casos

Considerando las variables:

X_1: Resolución de operaciones básicas con fracciones.

X_2: Conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales.

Y: Comprensión de los significados del número racional positivo.

Caso a) Para X_1 y Y, cuando X_2 se mantiene constante:

H_0: $r_{y1.2} = 0$

El coeficiente de correlación parcial entre X_1 y Y *es cero.*

H_1: $r_{y1.2} \neq 0$

El coeficiente de correlación parcial entre X_1 y Y *es diferente de cero.*

Nivel de la probabilidad de significancia es $\alpha = 0.05$.

Caso b) Para X_2 y Y, cuando X_1 se mantiene constante:

H_0: $r_{y2.1}$ = 0

El coeficiente de correlación parcial entre X_2 y Y *es cero.*

H_1: $r_{y2.1} \neq 0$

El coeficiente de correlación parcial entre X_2 y Y *es diferente de cero.*

Nivel de la probabilidad de significancia es α = 0.05.

Caso c) Para X_1 y X_2, cuando Y se mantiene constante:

H_0: $r_{12.y}$= 0

El coeficiente de correlación parcial entre X_1 y X_2 *es cero.*

H_1: $r_{12.y} \neq 0$

El coeficiente de correlación parcial entre X_1 y X_2 *es diferente de cero.*

Nivel de la probabilidad de significancia es α = 0.05.

La regla de decisión es la siguiente: cuando el valor de la *t* calculada es mayor que la $t_{(\alpha = 0.05)}$= 1.99 tabulada, entonces se puede rechazar la hipótesis nula.

Discusión: Respecto a la correlación parcial entre X_1 y Y, cuando X_2 se mantiene constante, de la Tabla 4.37 se decide que en todos los grados de estudio a excepción de segundo, se rechaza la hipótesis nula; y se puede afirmar, al nivel de significancia del α = 0.05, que existe una correlación significativa entre las puntuaciones de la ***Prueba sobre operaciones básicas con fracciones*** y las puntuaciones de la ***Prueba sobre comprensión de los significados del número racional***, cuando se mantiene constante las puntuaciones de la ***Prueba sobre propiedades elementales de los números racionales***.

Así mismo, respecto a la correlación parcial entre X_2 y Y, cuando X_1 se mantiene constante*, no se ha podido rechazar categóricamente en todos los grados la hipótesis nula "***El coeficiente de correlación parcial entre*** **X_2 y Y,** ***es cero***"*. Solo en segundo y quinto grados se rechaza la hipótesis nula, por lo cual podemos afirmar que existe una correlación significativa entre las puntuaciones de la ***Prueba sobre propiedades elementales de los números racionales*** y las puntuaciones de la ***Prueba sobre comprensión de los significados del número racional***, cuando se mantiene constante las puntuaciones de la ***Prueba sobre operaciones básicas con fracciones.***

Respecto a la correlación parcial entre X_1 y X_2, cuando Y se mantiene constante; como era de esperarse, las dos nociones matemáticas: operaciones básicas con fracciones y propiedades elementales del conjuntos de los números racionales presentes y programados explícitamente en el DCN (2008), tiene una relación mutua altamente significativa, porque se verifica que en todos los grados sin excepción se ha podido rechazar la hipótesis nula "*El valor correspondiente en la población del coeficiente de correlación parcial entre* X_1 y X_2, *es cero".* Consecuentemente, se puede afirmar que existe correlación significativa entre las puntuaciones de la ***Prueba sobre operaciones básicas con fracciones*** y las puntuaciones de la ***Prueba sobre propiedades elementales de los números racionales***, cuando se mantiene constante las puntuaciones de la ***Prueba sobre comprensión de los significados del número racional.***

CONCLUSIONES

La revisión teórica y los resultados empíricos considerados en la investigación permiten arribar a las siguientes conclusiones:

Primera: Conclusión referente a las características de la comprensión del número racional

La comprensión de los significados del número racional positivo se sustenta esencialmente en el significado parte-todo continuo y parte-todo discreto; así, estos alcanzaron el 76.8% y 62.6% de éxito en la interpretación del empleo propio correcto de las fracciones. En tanto que, el significado de medida desvinculado de su génesis histórica apenas alcanza el 25.5%.

La muestra estratificada de los cinco grados revela que la comprensión de los significados del número racional es progresiva, es decir, la prueba de diferencias de medias permite probar que los estudiantes del nivel de educación secundaria logran superar su comprensión conforme suben de grado escolar.

Segunda: Conclusión relativa a las interferencias en la comprensión de los significados del número racional

La comprensión de los significados del número racional se caracteriza, por una acentuada interferencia del significado parte-todo en la interpretación de los significados de cociente, medida, razón y operador. Además, el significado de razón interfiere en los significados de parte-todo discreto, parte-todo continuo y en el significado de medida. Asimismo, el significado cociente se manifiesta como interferente, de forma incidental, en los significados de razón y operador.

Tercera: Conclusiones relativas a la realización de operaciones básicas con fracciones

Las dificultades en la aplicación de algoritmos en la realización de operaciones básicas con fracciones se superan conforme se sube de grado escolar. El promedio de logro en el cálculo de operaciones básicas de los estudiantes de grado escolar superior es mayor que el promedio de logro de los estudiantes del grado inferior, en todo el nivel de educación secundaria de forma transitiva.

Los algoritmos de la adición y sustracción de números enteros aprendidos previa y satisfactoriamente, se constituyen en un obstáculo epistemológico en el aprendizaje de los nuevos algoritmos de la adición y sustracción de fracciones heterogéneas.

En la comprensión del algoritmo de la multiplicación de fracciones se presenta errores típicos, la superposición de algoritmos. Así, los errores del Tipo A y C evidencian que rasgos propios del algoritmo de adición en cruz, o rasgos propios del algoritmo de la división se superponen sobre el algoritmo de la multiplicación de fracciones.

En la división de fracciones se corrobora la teoría de la superposición de algoritmos. En los errores de la división de fracciones se encontró la superposición del algoritmo de la suma de fracciones en cruz y rasgos de la multiplicación de fracciones. Además, se verificó la intromisión del algoritmo de la división de números enteros, donde los estudiantes dividen fracciones como si se tratara de números enteros, tanto en el numerador como en el denominador.

Cuarta: Conclusiones relativas al conocimiento de propiedades elementales de los números racionales

Los estudiantes del nivel de educación secundaria muestran un escaso conocimiento de las propiedades elementales del conjunto de los números racionales, apenas logran un 45.9% de éxito en la resolución de la prueba de propiedades. Sin embargo, esta evoluciona favorablemente conforme asciende en los grados escolares, tal como se ha probado con la inferencia de medias.

La comprensión que poseen los estudiantes, del nivel de educación secundaria, de la definición del conjunto de los números racionales es imprecisa; asumen que, es el conjunto de cocientes o pares ordenados a/b de números, mas no precisan que deben ser números enteros y menos comprenden que el segundo componente, divisor o denominador, sea diferente de cero.

Quinta: Conclusiones concernientes a las relaciones entre las variables de estudio

Frente a la hipótesis "La capacidad de resolución de operaciones básicas con fracciones y el conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales se relacionan directamente con la comprensión de los significados del número racional positivo", podemos concluir que lamentablemente no podemos confirmar categóricamente esta vinculación relacional; sin embargo, podemos afirmar que **aproximadamente solo el 24.5% de la variable "Comprensión de los significados del número racional" es explicada por la regresión de la variable "Resolución de operaciones básicas con fracciones"** y la variable **"Conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales".**

Sexta: Conclusión concerniente a la correlación parcial

El contraste de los coeficientes de correlación parcial posibilitó concluir lo siguiente, respeto a las relaciones parciales entre las variables de estudio:

En todos los grados escolares, a excepción del segundo grado, existe una correlación significativa entre las puntuaciones de la ***Prueba sobre operaciones básicas con fracciones*** y las puntuaciones de la ***Prueba sobre comprensión de los significados del número racional***, cuando se mantiene constante las puntuaciones de la *Prueba sobre propiedades elementales de los números racionales*.

Solo en segundo y quinto grados existe una correlación significativa entre las puntuaciones de la ***Prueba sobre propiedades elementales de los números racionales*** y las puntuaciones de la ***Prueba sobre comprensión de los significados del número racional***, cuando se mantiene constante las puntuaciones de la ***Prueba sobre operaciones básicas con fracciones.*** En tanto que, en primero, tercero y cuarto grados no se puede rechazar la hipótesis nula, puesto que se encontró que el coeficiente de correlación parcial entre la ***Prueba sobre propiedades elementales de los números racionales*** y las puntuaciones de la ***Prueba sobre comprensión de los significados del número racional*** es cero.

De primero a quinto grado existe una correlación significativa entre las puntuaciones de la ***Prueba sobre operaciones básicas con fracciones*** y las puntuaciones de la ***Prueba sobre propiedades elementales de los números racionales***, cuando se mantiene constante las puntuaciones de la ***Prueba sobre comprensión de los significados del número racional.***

RECOMENDACIONES

Considerando las repercusiones que suponen los resultados y conclusiones de la investigación, se hace las siguientes recomendaciones a los maestros del nivel de educación secundaria de la ciudad de Puno:

- En la enseñanza de los números racionales se debe plantear actividades didácticas, situaciones didácticas que permitan comprender interpretaciones del significado medida, razón, cociente, operador; y, en medio de todos ellos, el significado de parte-todo.
- Para la enseñanza y evaluación de los algoritmos de las operaciones básicas con fracciones, se recomienda analizar los tipos de errores que comenten los educandos e identificar los **obstáculos epistemológicos** y las **superposiciones entre algoritmos**, para tomar decisiones y diseñar estrategias que permitan superar las dificultades de aprendizaje.
- Tanto en el estudio de los significados del número racional como en la realización de operaciones básicas con fracciones, es necesario que las situaciones didácticas propuestas por el profesor deban estar fundamentadas en el atento estudio de las propiedades de los números racionales. Eso implica, por ejemplo, que si se estudia el algoritmo de la adición de fracciones heterogéneas, se debe comprender que por una relación de fracciones equivalente se homogenizan las fracciones heterogéneas.
- En vista que las correlaciones multilineal entre las variables: ***comprensión de los significados del número racional, manejo de algoritmo de operaciones básicas con fracciones y conocimiento de las propiedades elementales de los números racionales***, son débiles y poco significativas, se sugiere que, en el diseño de las

actividades didácticas se proponga situaciones de aprendizaje que relacionen los significados de los números racionales con la realización de operaciones básicas con fracciones y, simultáneamente, se analice las propiedades de los números racionales. De tal manera que, estas nociones matemáticas no estén desconectadas, sino sean integradas en un cuerpo de conocimientos relacionados entre sí.

BIBLIOGRAFÍA

1. American Psichological Association. (2002). Publication Manual of the American Psychological Association. Fifth Edition. Washington, D. C.: American Psychological Association.
2. Arcavi, A. (1995). ...y en matemática, los que instruimos ¿qué construimos? *Substratum. Vol. II,* N° 6. pp. 77-94.
3. Bachelard, G. (1972). *La formación del Espíritu Científico.* Buenos Aires: Argos.
4. Behr, M., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. *Handbook of Research on Mathematics teaching and Learning.* NJ: MacMillan Library Reference USA.
5. Bender, P. (1996). Basic Imagery and Understandings for Mathematical Concepts. En C. Alsina, J. M. Álvarez, B. Hodgson, C. Laborde, y A. Pérez (Eds.). *8º Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME). Selección de Conferencias* (pp. 57-74). Sevilla, Spain: SAEM Thales.
6. Birkhoff, G. y MacLane S. (1960). *Álgebra moderna*. Barcelona: TEIDE.
7. Bishop, A. (1999). *Enculturación Matemática: La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidos.
8. Boyer, C. (1996). *Historia de la Matemática.* Madrid. Edit. Alianza.
9. Brousseau G. (1989) Les obstacles épistémologiques et la didactiques des mathématiques. In: N. Bednarz and C. Garnier (eds): *Construction des savoirs –Obstacles et conflits* (41-63)– Montréal: *Centre interdisciplinaire de recherché sur l'apprentissage et le développement en Education* (CIRADE)
10. Brousseau, G. (2004). *Théorie des situations didactiques.* Textes rassembléset prepares par N. Balacheff. M. Cooper, R. Sutherland y V. Warfield. Grenoble: La Pensée Sauvage, Éditions.
11. Brown, T. (2001). *Mathematics Education and Language. Interpreting Hermeneutics and Post-Structuralism*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

12. Bruner, J. (1984). Desarrollo cognitivo y educación. (J. M. Igor, R. Arenales, G. Solana, F. Colina, Trad.). Madrid: Morata. (Trabajo original publicado en 1966).
13. Burton, J. (1969). *Teoría de los números*. México: Trillas.
14. Byers, V. y Erlwanger, S. (1985). Memory in Mathematical Understanding. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 259-281.
15. Carpenter, T. y Lehrer, R. (1999). Teaching and learning mathematics with understanding. En E. Fennema y T.A. Romberg (Eds.) *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 19-32). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.
16. Castro, E. y Torralbo, M. (2001). Fracciones en el currículo de la Educación Primaria. *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (Editor Castro, E.) Madrid: Síntesis.
17. Castro, E., Rico, Luis. y Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización.* Bogota. Iberoamericana.
18. Castro, E., Rico, Luis., Castro, E. (1988). *Números y operaciones*. Madrid: Síntesis.
19. Castro, Enrique. (Eds.) (2001). *Didáctica de la matemática en la educación primaria*. Madrid: Síntesis.
20. Cavey, L. O. y Berenson, S. B. (2005). Learning to teach high school mathematics: Patterns of growth in understanding right triangle trigonometry during lesson plan study. *Journal of Mathematical Behavior*, 24, 171-190.
21. Chevallard, Y (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: AIQUE.
22. Cockcroft, W. H. Y otros (1985). *"Las matemáticas si cuentan"*. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid: Edición en castellano.
23. Davis, R. B. (1992). Understanding "Understanding". *Journal of Mathematical Behavior*, 11, 225-241.
24. De León, H. (1998). Procedimientos de niños de primaria en la solución de problemas de reparto. *Relime,* Vol. 1 (2), 5-28.

25. Dos Santos, A. (2005). *O conceito de fração em seus diferentes significados: Um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no encino fundamental*. Tesis de Maestría en Educación Matemática. PUC. São Paulo.
26. Duffin, J. y Simpson, A. (1997). Towards a new theory of understanding. En E. Pehkonen (Ed.) *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4 (*pp.166-173). Lhati, Finland: PME.
27. Duffin, J. y Simpson, A. (2000). A search for understanding. *Journal of Mathematical Behavior*, 18, 4, 415-427.
28. Duval, R. (1991). Interaction des miveaux de représentation dans la comprensión des textes. *Annales de Didactique et de sciences cognitives, IREM de Strasbourg,* n. 4, 163-196.
29. Duval, R. (1988). Graphiques et equations: l'Articulation de deux registres. In *Anales de Didáctica y de Ciencias Cognitivas, IREM de Strasbourg,* n. 1, 235-253.
30. Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivos del pensamiento. *Anales de Didáctica y de Ciencias Cognitivas, IREM de Strasbourg,* n. 5, 37-65.
31. Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive funtions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt, & M Santos (Edors.) *Psychology of Mathematics Education PME-NA XXI Vol,* 1 (pp. 3-26). Cuernava.
32. Duval, R. (2004. *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* (M. Vega, Trad.). Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía. (Trabajo original publicado en 1995).
33. Encinas, J. A. (1932). *Un ensayo de escuela nueva en el Perú*. Lima: CIDE.
34. English, L.D. & Halford, G. S. (1995). *Mathematics education: Models and processes*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

35. Escolano, R. (2001). *Enseñanza del número racional positivo en educación primaria: Un estudio desde el modelo cociente.* Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Almeria.

36. Escolano, R. (2004). Presencia histórica de la fracción en los libros de texto del sistema educativo español. *VIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. La Coruña.

37. Escolano, R. y Gairín, J. (2005). Modelos de medida para la enseñanza de números racionales en educación primaria. *Unión, Revista Latinoamericana de Educación Matemática,* (1), 17-35.

38. Factori, R. (2006). *Crença, concepção e competência dos profesores do 1º e 2º ciclos do encino fundamental com relação.* Tesis de Maestría en Educación Matemática. PUC. São Paulo.

39. Ferreira M. J. (1997). *Sobre a introducão do conceito de número fracionário.* Tesis Maestría. Pontificia Universidad Católica de São Paulo. Brasil.

40. Flores, R. (2010). Significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria. Tesis de Maestría en Matemática Educativa. Instituto Politécnico Nacional. México.

41. Freudenthal, H. (2001). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas* (L. Puig, Trad.). México: CINVESTAV: Departamento de Matemática Educativa. (Trabajo original publicado en 1983).

42. Gairín, J. (1999). *Sistemas de representación de números racionales positivos, Un estudio con maestros en formación*. Tesis Doctoral. Universidad de Zaragoza. España.

43. Gairín, J. (2001). Sistemas de Representación de Números Racionales Positivos, Un estudio con maestros en formación. *En Contexto Educativo,* N° 4 pp. 137-159. Resumen de la memoria de Tesis Doctoral.

44. Gairín, J. y Sancho, J. (2002). *Números y algoritmos.* Madrid: Síntesis.

45. Gallardo, J. y González, J. L. (2006). Assessing understanding in mathematics: steps towards an operative model. *For the Learning of Mathematics,* 26, 2, 10-15.
46. Godino, J. D. (2000). Significado y comprensión de los conceptos matemáticos. *Uno*, 25, 77-87.
47. Godino, J. D. (2002a). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22, 2/3, 237-284.
48. Godino, J. D. (2002b). Prospettiva semiotica della competenza e della comprensione matemática. *La matematica e la sua didattica*, 4, 434-450.
49. Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathematiques,* 14(3), 325-355.
50. Goldin, G. (2002). Representation in Mathematical Learning and Problem Solving. En L. D. English (Ed.) *Handbook of International Research in Mathematicss Education* (pp. 197-218). Mahwah, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates.
51. Gonzáles, J. y Arrieche, M. (2005). Significados institucionales y personales de las fracciones en educación Básica. *En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. México. CLAME,* V. (18) 357 – 362.
52. Hernández S., R., Fernández C.,C. y Baptista L.,P. (2006). *Metodología de la Investigación.* México: Mc. Graw Hill.
53. Hiebert, J. (1988). A theory of Developing Conpetence with Griten Mathematics' Symbols. *Educational Studies in Mathematics,* 19, pp. 333-355.
54. Hiebert, J. y Carpenter, T. P. (1992). Learning and Teaching with understanding. En D. A. Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-97). New York: MacMillan Publishing Company.

55. Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates.
56. Janvier, C. (ed.) (1987). Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
57. Johnson, R. (1988). Estadística elemental. México: Iberoamericana.
58. Kaput, J. (1999). On the development of human representational competence from an evolutionary point of view: From episodic to virtual culture. In F. Hitt, & M Santos (Eds.) *Psychology of Mathematics Education (PME-NA XXI)* Vol 1 (pp. 27-48), Cuernava.
59. Kaput, J. y Moreno L. (2004). Aspectos semióticos de la evolución histórica de la aritmética y del álgebra. En J. Lemoine (Dir.). *Matemática educativa: fundamentos de la matemática universitaria* II (pp. 3-23). Bogotá: Escuela Colombiana de Ingeniería.
60. Kieren, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra a broademing of sources of meaning. In A. Gutierrez & P. Boero (eds), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 11-49). Rotterdam Taipei: Sense Publishers.
61. Kieren, T. (1999). Languageuse in embodied action and interaction in knowing fractions. In F. Hitt, & M Santos (Eds.) *Psychology of Mathematics Education (PME)* Vol 1, Cuernava.
62. Kieren, T., Pirie, S. y Calvert, L. G. (1999). Growing Minds, growing mathematical understanding: mathematical understanding, abstraction and interaction. En L. Burton (Ed.) *Learning Mathematics: from Hierarchies to Networks* (pp. 209-231). London, GBR: Routledge.
63. Koyama, M. (1993). Building a two axes process model of understanding mathematics. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 1, 63-73.

64. Koyama, M. (2000). A research on the validity and effectiveness of "two-axes process model" of understanding mathematics at elementary school level. En T. Nakahara y M. Koyama (Eds.) *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *Vol. 3* (pp. 159-166). Hiroshima, Japan: PME.
65. Lage, L. (2006). Enquadramento de número racionais em intervalos de racionais: uma investigação com alunos do Ensino Fundamental. Tesis de Maestría en Educación Matemática. PUC. São Paulo.
66. Llinares, S. y Sánchez V. (1988). *Fracciones, La relación parte-todo*. Madrid: Síntesis.
67. Llinares, S. y Sánchez, V. (1997). Aprender a enseñar. Modos de representación y números racionales. *Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM),* Zamora.
68. Lucia, V. (2005). O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental. Tesis de Maestría en Educación Matemática. PUC. São Paulo.
69. Ministerio de Educación. (2009). Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular. Lima: MED.
70. Ministerio de Educación, Unidad de Medición de la Calidad Educativa. (2001). *El Perú en el primer estudio internacional comparativo de la UNESCO sobre lenguaje, matemática y factores asociados en tercer y cuarto grado.* Boletín UMC Nº 9
71. Ministerio de Educación, Unidad de Medición de la Calidad Educativa. (2004). *Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil 2004. Informe pedagógico de resultados. Formación matemática: Tercer grado de Secundaria y Quinto grado de Secundaria.*
72. Ministerio de Educación, Unidad de Medición de la Calidad Educativa, (2001). *Como Rinden los Estudiantes Peruanos en Comunicación y Matemática, Resultados de la Evaluación Nacional 2001, Sexto Grado de Primaria Informe Pedagógico.*

73. Monteiro, C., Pinto, H. y Figueiredo, N. (2005). As fraccoes e o desenvolvimiento do sentido do número racional. *Educacão e Matemática,* (84), 47-51.
74. Nakahara, T. (1994). Study of the representational system in mathematics education. *Hiroshima Journal of Mathematics Education,* 2: 59-67.
75. National Council Of Teachers Of Matematics. (1989). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática.* Sevilla: SAEM Thales-NCTM.
76. National Council Of Teachers Of Matematics. (2004). Principios y estándares para la educación matemática. Sevilla: SAEM Thales-NCTM.
77. Neuman, D. (1996). ¿Existen problemas específicos en los primeros cursos de la escuela? *Uno,* (9), 49-62.
78. Niemi, D. (1996a). Assessing conceptual understanding in mathematics: Representations, problem solutions, justifications, and explanations. *The Journal of Educational Research,* 89 (6), 351-363.
79. Niemi, D. (1996b). *Instructional Influences on Content Area Explanations and Representational Knowledge: Evidence for the Construct Validity of Measures of Principled Understanding.* Los Ángeles, CA: CRESST/University of California, Los Angeles.
80. Núnes, T., Bryant, P., Pretzlik, U., Bell, D., Evans, D. & Wade, J. (2004). Children's understanding of fractions. *Ardeco Symposium,* Paris (paper).
81. Ozejo, T. et. al. (2004). Matemática 2. Para aprender a pensar.Lima: Quipu.
82. Palomares, L.(2008). Matemática. Primer grado de Educación Secundaria. Lima: Bruño.
83. Peña, P. (2011). Resignificación del algoritmo para operar aditivamente con fracciones en un contexto escolar. Tesis de Maestría en Matemática Educativa. Instituto Politécnico Nacional. México.

84. Pirie, S. y Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: how can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, 26, 165-190.
85. Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (coord..). *La educación matemática en la enseñanza secundaria,* (pp. 61-94). Barcelona: ICE/Horsori.
86. Radford, L. (1999). Las representaciones volviendo a pensar. *Los procedimientos de la 21 Conferencia Internacional para la Psicología de Educación Matemática,* el Capítulo norteamericano, Universidad Autónoma del Estado de Morelos, México.
87. Rodrigues, W. R. (2005). *Números racionais: Um estudo das concepções de alunos após o estudo formal.* Tesis de Maestría en Educación Matemática. PUC. São Paulo. Brasil.
88. Rojo, A. (1995). *Álgebra I.* Buenos Aires: El Ateneo.
89. Romero, I. (2000). Representación y comprensión en pensamiento numérico. En L. C. Contreras, J. Carrillo, N. Climent y M. Sierra (Eds.) *Actas del IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 35-46). Huelva: Universidad de Huelva.
90. Santibáñez, J. (2001). Manual para la evaluación del aprendizaje estudiantil: conceptos, procedimientos, análisis e interpretación para el proceso evaluativo. México: Trillas.
91. Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London: The Falmer Press.
92. Sierpinska, A. (2000). Mathematics classrooms that promote understanding. In Fennema, E. & Romberg, T. A. (Eds.), *The studies in mathematical thinking and learning series.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
93. Sierra, R. (1994). *Técnicas de investigación social. Teoría y ejercicios.* Madrid: Paraninfo.
94. Silva, A. (1992). Métodos cuantitativos en psicología. México: Trillas.

95. Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas.* Madrid: Morata.
96. Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico (Coord.) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.
97. Valpereiro, L. (2005). *Fração e seus diferentes significados um estudo com alunos das 4ta e 8va séries deo Encino Fundamental*. Tesis de maestría en Educación Matemática. PUC. São Paulo.
98. Vera, C. (2004). Matemática. Primero de Secundaria. Lima:Nocedal.
99. Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didáctiques des Mathématiques.* 10(2,3). 133-170.
100. Warner, L. B., Alcock, L. J., Coppolo, J. y Davis, G. E. (2003). How does flexible mathematical thinking contribute to the growth of understanding? En N. A. Paterman, B. J. Dougherty y J. Zilliox (Eds.) *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *Vol. 4* (pp. 371-378). Honolulu, USA: PME.
101. Whitehead, A. N. (1944). *Introducción a las matemáticas.* Buenos Aires: EMECE.
102. Woerle, C. (2010). Representações dos números racionais e a medição de segmentos: Possibilidades com tecnologias informáticas. Tesis de Maestría en Matemática Educativa. UNESP. Río Claro de São Paulo.