Blanco-Álvarez, H. (2009). *Del número a los sistemas de numeración*. Trabajo de investigación de maestría no publicado. Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Del número a los sistemas de numeración

Hilbert Blanco Álvarez

Código. 0303344

Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Santiago de Cali, Octubre de 2009

Del número a los sistemas de numeración

Hilbert Blanco Álvarez

Código. 0303344

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para
optar al título de Magíster en Educación: énfasis en Educación Matemática

Director

Luis Carlos Arboleda Aparicio

Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Santiago de Cali, Octubre de 2009

Nota de aceptación

Jurado 1: Diana Jaramillo

Jurado 2: Ubiratan D’Ambrosio

Director: Luis Carlos Arboleda

Santiago de Cali, Octubre de 2009

Agradecimientos

A Dios, por todos los favores recibidos. A mi papá Hilbert que me brindó el apoyo económico para iniciar la maestría y a mi mamá Patricia y mi abuela Esther que siempre estuvieron tan pendientes y preocupadas por mis avances en la tesis.

A mi profesor y amigo Luis Carlos Arboleda por su incondicional apoyo, confianza y generosidad al compartir su conocimiento conmigo. Mil gracias.

A mi amigo Andrés Chaves por sus palabras de ánimo, las discusiones que hacíamos a altas horas de la noche y sus útiles consejos a la hora de organizar el documento final.

A mi amigo Edinsson Fernández por sus acertadas traducciones.

Tabla de Contenido

Índice de tablas 7
Índice de ilustraciones 8
Resumen 9
Abstract 9
Introducción General 10
Capítulo 1. Preliminares 14
Introducción 14
1.1 Presupuestos conceptuales y metodológicos 14
1.2 Presentación histórica y sociocultural de las comunidades tradicionales 22
Capítulo 2. Los números naturales y el camino a la abstracción 32
Introducción 32
2.1 Construcción del número natural 38
2.2 El número natural y su representación auditiva 47
2.3 El número natural y su representación visual 52
2.4 Las operaciones y la base 55
Capítulo 3. Una referencia empírica del orden 60
Introducción 60
3.1 Origen fenomenológico de la noción de orden 60
3.2 Del orden de sucesiones no numéricas al orden de sucesiones numéricas 69
Capítulo 4. Conclusiones generales 75
Introducción 75
4.1 Conclusiones de la investigación 75
4.2 Limitaciones metodológicas 80
4.3 Problemas abiertos 80

Bibliografía 82

Anexos 86

1. La etnomatemática en Colombia. Un programa en construcción 86
2. Entrevista al profesor Ubiratan D'Ambrosio 86
3. La Educación Matemática desde un punto de vista sociocultural y la formación de licenciados en matemáticas y etnoeducadores con énfasis en matemáticas 86
4. El papel de la Red Latinoamericana de Etnomatemática en la conformación de una comunidad académica... 86

Índice de tablas

Tabla 2-1. Los morfemas numéricos de los Incas, Mayas y Yorubas 49
Tabla 2-2. Potencias ciclícas 50
Tabla 2-3. Operaciones aritméticas en la composición de números.................................. 50

Índice de ilustraciones

Figura i. Ubicación geográfica de la comunidad Inca 23
Figura ii. Nudos del Quipu 24
Figura iii. Ubicación geográfica de la comunidad Yoruba 25
Figura iv. Ubicación geográfica de la comunidad Maya 27
Figura v. Numerales Mayas...28
Figura vi. Representaciones antropomorfas de los números Mayas 6, 10 y 16 29
Figura 3.1. El “orden de nacimiento” y el nombramiento de las mazorrcas de maíz (Urton, 1997, pág. 86)..62
Figura 3.2. Jerarquización de las cuerdas del Quipu (Ascher & Ascher, 1997, pág. 31) 67
Figura 3.3. Comparación de las colecciones C_α y C_τ 72

Resumen

Esta investigación expone el análisis de la constitución de los sistemas de numeración en comunidades tradicionales como los Mayas, Incas, Yorubas y Tule, desde al menos tres dimensiones: Histórica-epistemológica, Representacional y Sociocultural, en la búsqueda de invariantes transculturales. Se hizo uso de una metodología descriptiva y comparativa a la luz de la axiomática de Dedekind y Peano, la teoría empírica de los números enteros de Marco Panza, la filosofía de la existencia de los objetos matemáticos de Jean-Louis Gardies, La fenomenología de Husserl y la teoría antropológica de la aritmética de Gary Urton. El camino seguido para el análisis fue la construcción del número natural, la dotación de un orden y sus operaciones, todo esto relacionado con la cosmovisión y el lenguaje.

Palabras claves: Etnomatemática; Orden; Lenguaje

Abstract

This research presents the analysis of the constitution of the numbering systems in traditional communities such as the Mayas, Incas, Yorubas and Tule, at least three dimensions: historical-epistemological, representational and Sociocultural, in seeking cross-cultural invariants. It made use of a descriptive and comparative methodology in the light of Dedekind and Peano axioms, the empirical theory of the integers from Marco Panza, the philosophy of existence of mathematical objects of Jean-Louis Gardies, Husserl's phenomenology and anthropological theory of Arithmetic by Gary Urton. The path taken for analysis was the construction of natural numbers, the strength of an order and its operations, all related to the worldview and language.

Keywords: Ethnomathematics; Order; Language

Introducción General

A lo largo de los cuatro capítulos que comprenden este trabajo se analiza en detalle la existencia de invariantes culturales, la importancia y el papel del lenguaje y la cosmovisión en el proceso de construcción del número y todo el proceso de razonamiento complejo que conllevó a la conformación del sistema de numeración en tanto teoría empírica en comunidades tradicionales[1] y su respectiva formalización en el siglo XIX.

De esta manera, en el primer capítulo: *Preliminares*, la atención se centra, por un lado, en aclarar el marco institucional donde se inserta esta investigación, la postura epistemológica del autor frente a la etnomatemática y a las matemáticas, el planteamiento y la justificación del problema, las dimensiones de análisis, los referentes teóricos, el enfoque metodológico asumido y algunas reflexiones sobre las implicaciones didácticas de los resultados de este trabajo para la Educación Matemática. Por el otro, en presentar de manera breve las comunidades de estudio y los criterios para su escogencia.

El segundo capítulo: *los números naturales y el camino a la abstracción*, inicia haciendo una presentación de los métodos constructivo, logicista y formal de las matemáticas, inmediatamente se prosigue construyendo la noción de número y luego se procede a identificar encadenamientos lógicos de algunos hechos históricos que pueden interpretarse como condiciones de posibilidad para dicha construcción. Estos

[1] Entiéndase *comunidad tradicional* como aquel grupo social, principalmente iletrado, no-industrializado, rural agrícola. En contraposición a la sociedad moderna, cuya característica principal es el uso y desarrollo de la ciencia.

encadenamientos han de conducir de manera lógica a esa fase pre-formal de la aritmética de los números enteros positivos.

Pero el paso del nivel de lo físico al nivel de lo matemático demanda un ejercicio intelectual con características muy especiales: la abstracción. Este concepto permitiría explicar la manera cómo el hombre concibe el tránsito de una noción de carácter originalmente físico al nivel matemático. Los objetos matemáticos para el hombre antiguo son seres intermedios entre lo físico y lo abstracto, ellos son producto de la abstracción de lo material sensible mediados por el lenguaje. El simbolismo estaba enraizado en los fenómenos naturales (Crump, 1993). Por ejemplo, los Mayas representaban el cero en su sistema de numeración utilizando la imagen de una concha, así como representaciones de cabezas antropomorfas para los números del 1 al 13. Ver figuras v y vi.

Posteriormente, se presentan las diferentes representaciones auditivas del número en las comunidades de estudio, que fueron elementos indispensables para la creación de un sistema de denominación de los números, además de una pre-aritmética al interior de expresiones lingüísticas; luego se expone una discusión sobre el estatus de escritura de las representaciones visuales del número de los Incas y Mayas[2]. Finalmente, se analizan las operaciones adición y multiplicación a la luz de la operación de conteo alterno, y la importancia de la base como elemento determinante en la conformación de un sistema de numeración.

El tercer capítulo: *una referencia empírica del orden*, estudia desde un enfoque fenomenológico la estructura[3] de orden subyacente a los fenómenos naturales y de organización social. Dicha discusión se sustenta en estudios antropológicos. Luego, se expone la propiedad transitiva como una característica invariante y transcultural de la estructura de orden presente en los fenómenos mencionados anteriormente, y que el

---

[2] No se incluyen en este análisis los Yoruba puesto que estos carecían de escritura y sobre los Tule hay muy poca información.

[3] Para el antropólogo Lévi-Strauss (1984), una estructura presenta un carácter de sistema: una modificación en un elemento implica que se modifican los otros. Esta tesis comparte esta definición, que es compatible con pensar la estructura como el mundo posible donde habitan objetos, relaciones y operaciones.

hombre en relación a procesos de razonamiento complejo extrapola a sucesiones no naturalistas, como el Quipu y finalmente a sucesiones numéricas, a donde llega en un momento donde el sujeto no percibe, únicamente, el orden en función del tiempo. Posteriormente, se estudia si en algún momento en las comunidades tradicionales fue posible generar la relación inductiva de dado un n natural, si una propiedad P se cumple para n, entonces se cumple para $n+1$, y se argumenta en la hipótesis de que dicha relación se vio limitada por el método constructivo.

El cuarto y último capítulo, *Conclusiones generales* reúne las ideas más importantes desarrolladas en el trabajo, en relación al problema de investigación, el resultado alcanzado con respecto a cada dimensión de análisis, las limitaciones metodológicas, y algunas preguntas que quedan abiertas para nuevas investigaciones.

Para concluir, se presentan *los anexos* que ofrecen una serie de artículos y entrevistas realizadas durante la preparación y desarrollo de esta investigación. El primero de ellos: *la etnomatemática en Colombia. Un programa en construcción*, recoge la historia de la etnomatemática colombiana, caracteriza las diferentes maneras de abordar estos estudios en el país y presenta las distintas universidades, grupos de investigación y redes que realizan estudios e investigaciones en este campo. Dicho artículo surgió al levantar el estado del arte de la etnomatemática colombiana, y sirvió para delimitar el campo de trabajo.

El segundo, *Entrevista al profesor Ubiratan D'Ambrosio*, presenta las ideas del profesor Ubiratan sobre la Etnomatemática, sus objetivos, su metodología, la relación entre Etnomatemática y Educación Matemática, la enseñanza de las matemáticas en aulas multiculturales, y sus comentarios sobre la caracterización de las investigaciones en Etnomatemática realizadas en Colombia, que fueron muy útiles para validar dichas categorías.

El tercero, *La Educación Matemática desde un punto de vista sociocultural y la formación de licenciados en matemáticas y etnoeducadores con énfasis en matemáticas* presenta las implicaciones de asumir las matemáticas desde un punto de vista cultural en la etnoeducación y la preparación académica de licenciados en matemáticas en ejercicio y en formación.

Por último, *El papel de la Red Latinoamericana de Etnomatemática en la conformación de una comunidad académica*, da a conocer a los educadores matemáticos y a los etnomatemáticos la existencia y la labor que ha desempeñado, en sus primeros cinco años, la Red Latinoamericana de Etnomatemática (RELAET) en América Latina, en la conformación y consolidación de una comunidad académica interesada en los aspectos sociales y culturales de la Educación Matemática.

Capítulo 1. Preliminares

Introducción

El presente capítulo expone, en su primera parte, los presupuestos conceptuales del autor, el problema de investigación, las dimensiones de análisis, la metodología utilizada en esta investigación, los aportes a la educación matemática; y, en su segunda parte, hace una presentación breve de las comunidades tradicionales que fueron analizadas en este estudio desde el punto de vista de su pensamiento pre-aritmético[4]

1.1 Presupuestos conceptuales y metodológicos

Contextualización institucional

Esta investigación se enmarca en la línea: *Historia y Educación Matemática* de la Maestría en Educación, énfasis en Educación Matemática. Línea que es asesorada por el Grupo de Historia de las Matemáticas del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle. Al interior de este grupo se adelantan trabajos de grado, trabajos de investigación de maestría y tesis doctorales en diferentes líneas. Una de ellas es *Historia Social de las Matemáticas*, que es donde se ubica este trabajo de investigación. El objetivo de esta línea es estudiar los procesos de formación de cultura matemática en el marco de instituciones educativas en Colombia. Así como analizar comparativamente los procesos

[4] Es importante tener en cuenta que al hablar de pre-aritmética en ningún momento el autor toma una postura peyorativa de dicho pensamiento, la cual se entiende como el campo no formalizado de enunciados, técnicas y representaciones que se movilizan en una comunidad, en actividades que utilizan de manera empírica las operaciones lógicas de adición, sustracción, multiplicación y división del sistema de numeración. Solo se hace para efectos de diferenciarla de la aritmética actual, la cual se entiende como una teoría con una estructura axiomática.

de producción y enseñanza de teorías en contextos socioculturales diversos, como también las actividades de razonamiento asociadas con tales procesos. En últimas, se pretende identificar y caracterizar los diversos aspectos que han contribuido a la formación de una cultura matemática en una comunidad específica. (Arboleda, citado en Anacona, 2003)

Contextualización en la Etnomatemática

Esta clase de estudios hacen parte de una nueva disciplina que en las últimas tres décadas ha tomado fuerza a escala internacional y que se conoce como Etnomatemática. El matemático, historiador y educador matemático brasilero Ubiratan D'Ambrosio (1997, pág. 16) define la etnomatemática como "la matemática que se practica entre grupos culturales identificables, tales como sociedades de tribus nacionales, grupos laborales, niños de cierto rango de edades, clases profesionales, entre otros". En esta definición se deja entre ver una amplia relación con la antropología cultural, pero en la actualidad, la etnomatemática ha desbordado esta relación y se han generado fuertes conexiones con la sociología, el currículo y la historia de las matemáticas. (Blanco, 2008d).

En su relación estrecha con la Educación Matemática, la etnomatemática se interesa, entre otros aspectos, en estudiar los factores sociales y culturales que afectan la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en contextos escolares y extraescolares en diversos ambientes sociales, económicos, políticos y multiculturales. Este trabajo de investigación de maestría es un ejemplo de esto y se enmarca en la quinta categoría definida por el autor en su artículo *La etnomatemática en Colombia: un programa en construcción* (Blanco, 2006): Estudios históricos, epistemológicos, filosóficos, educativos, sobre formación de culturas matemáticas y científicas. Hacen parte de esta categoría los trabajos interesados en la difusión, recepción, apropiación, transposición, etc., de conocimientos y teorías en diversos contextos socioculturales. De esta manera:

> "Este nuevo enfoque de la Educación Matemática desde una perspectiva social y cultural se legitima en la producción amplia que la comunidad de educadores matemáticos le consagra al tema a escala mundial y que se puede corroborar en el *Handbook of Mathematics Education* del año 1996 (Gerdes, 1996). Por ende, los

> problemas de la Etnomatemática son problemas de la Educación Matemática". (Blanco, 2006, pág. 50)

Se trata, en este trabajo, de hacer un estudio epistemológico, histórico y antropológico de actividades empíricas de razonamiento con objetos matemáticos elementales en comunidades no-occidentales, y de esta manera reconocer, respetar y valorar el pensamiento matemático ancestral vinculado a tales objetos. En relación a este tipo de estudios, Ferreira cita a "Taylor que critica que la etnomatemática tiene un discurso político y pedagógico, mas no uno epistémico. Dice que cuando ella intenta discutir epistemológicamente, su discurso se centra solamente en la relación político-pedagógica – o sea, la etnomatemática no se preocupa del acto de conocer, olvida la cognición y privilegia tan solamente el acto de enseñar, y no el de aprender." (Ferreira, 1997, pág. 25). Este trabajo procura ser un contraejemplo de esta crítica que el autor comparte.

Postura filosófica frente a las matemáticas

Por otra parte, se hace necesario plantear aquí una postura clara frente a las matemáticas las cuales, desde la perspectiva más amplia de la etnomatemática, se entienden como un constructo social y humano para interpretar el mundo, que responde a las necesidades particulares de una sociedad en espacios y tiempos diferentes. Es comúnmente aceptado que una comunidad desarrolla prácticas y reglas matemáticas con su propia lógica para entender, lidiar y manejar la naturaleza. Es decir, la relación del hombre con la naturaleza es la que impulsa el desarrollo matemático, y es el hombre mismo, quien en esa relación construye las nociones matemáticas que le van a ser de utilidad a él y a su sociedad. Estos saberes matemáticos son transmitidos de generación en generación, ya sea por medio escrito o vía oral y pasan a ser parte de la tradición cultural de un pueblo que es el mundo donde habitan las matemáticas, un mundo externo al hombre pero dependiente de él, a diferencia de la postura platónica, donde las matemáticas pre-existen al hombre y no dependen de la existencia de éste.

Desde este punto de vista, no se habla de la matemática, la académica, de tradición occidental practicada por los matemáticos profesionales, sino de las distintas y diversas prácticas matemáticas que se generan al interior de las comunidades indígenas, comunidades afrodescendientes, grupos laborales, niños de la calle, entre otros. De acuerdo a esto, en principio puede hablarse de las matemáticas de los palenqueros, los guambianos, los arhuacos, los carpinteros, los albañiles, los matemáticos, los campesinos u otros grupos culturales. (Blanco, 2008b)

Justificación y planteamiento del problema de investigación

Como se dijo antes, una de las razones que motiva la realización de este trabajo es la creencia en que la etnomatemática debe investigar los delicados problemas de la lógica interna del pensamiento matemático de las comunidades tradicionales, no simplemente limitarse a afirmar su existencia peculiar con respecto al saber matemático occidental. Los libros de historia de las matemáticas hablan, *grosso modo*, de la escritura de los numerales y su aritmética; y aunque los trabajos etnomatemáticos existentes reconocen la conexión del hombre con la naturaleza y la cosmovisión en la producción de pensamiento matemático, no se analiza la lógica interna de éste. Razón esta que motiva la investigación sobre el paso del número a los sistemas de numeración con un renovado propósito: ir más allá de los numerales y sus operaciones, e indagar por los momentos lógicos de pensamiento numérico que se ponen en juego al intentar definir, constructivamente, el objeto matemático sistema de numeración. En otras palabras, se busca tomar conciencia de los procesos que condujeron a la conformación de los sistemas de numeración. Esta es la inspiración que se deja ver a lo largo del trabajo, intentando dar una respuesta plausible a la pregunta: *¿Cómo se constituye un sistema de numeración en objeto matemático en una comunidad no-occidental?* Se omitirán, en este trabajo, muchos detalles históricos para centrarse en aspectos o momentos constitutivos de los sistemas de numeración, dicho de otra manera, concentrarse en su proceso constructivo, que es explicado en la introducción del capítulo 2.

Esta pregunta se aborda a partir de tres dimensiones de análisis, en cada una de las cuales hay una pregunta subsidiaria que orienta la investigación:

a. Dimensión Representacional

¿Qué papel jugaron las distintas representaciones del número en la constitución de los sistemas de numeración?

b. Dimensión Sociocultural

¿Qué papel jugó la cosmovisión en la constitución de los sistemas de numeración?

c. Dimensión Histórica-epistemológica

¿Cómo se constituye la pre-aritmética de tales sistemas en tanto teoría empírica?

El propósito de este trabajo no es estudiar cómo se originó el número en occidente hasta alcanzar el nivel de presentación axiomático formal que usualmente reproduce el sistema escolar. Se trata, más bien, de contribuir a explicar cómo al interior de comunidades tradicionales como los Tule en Suramérica, los Mayas en Centroamérica, los Yoruba en África, e Incas en Suramérica, alejadas geográfica y culturalmente de esta tradición de pensamiento axiomático, se desarrolló la idea de número y fue posible que emergiera cierta estructura de orden y un concepto de operaciones entre los elementos del dominio numérico, hasta que finalmente se decantó un sistema de numeración permeado necesariamente por un mundo de creencias y en estrecha relación con los fenómenos naturales. Para ello, este estudio no se puede limitar a seguir repitiendo las generalidades de los estudios "externalistas" sobre el sentido de números ligados con los factores determinantes de las cosmovisiones. Véase (Crump, 1993); (Zaslavsky, 1999); (Krickeberg, 1985); (Ochoa & Peláez, 1995). Más bien, se pretende identificar y explicar procesos lógicos de pensamiento que aún dentro de una cosmovisión, son portadores de una forma particular de "matematización". Entonces el autor se dota de ciertos instrumentos para reconocer la expresión lingüística de procesos mentales que participan de esta forma, o bien de manejos operativos en los cuales se revelan expresiones lógicas de cómo procede un cierto pensamiento aritmético.

Sin forzar la interpretación histórica, a lo que se aspira es a explicitar, en el contexto de ese pensamiento antiguo, el "lenguaje" que estos individuos utilizaron para designar objetos, y unos principios básicos a partir de los cuales fueron capaces de “inferir” enunciados sobre tales objetos. Es decir, ese lenguaje conjuntista que va a utilizarse a partir del parágrafo 2.1

Marco teórico

Los referentes teóricos para el análisis de los sistemas de numeración de las comunidades tradicionales son la aritmética de Dedekind-Peano (1998) dominante en occidente, la teoría empírica de los números enteros de Marco Panza (2007), la filosofía de la existencia de los objetos matemáticos de Jean-Louis Gardies (2004), la fenomenología de Husserl (1969) y la teoría antropológica de la aritmética de Gary Urton (1997). En donde referente significa el enfoque que va a utilizarse para estudiar el objeto Sistema de Numeración, entendido éste como una triada: (conjunto numérico, relaciones y operaciones). Debe tenerse en cuenta que para un antropólogo puro, culturalmente relativista, puede resultar discutible que se utilicen referentes lógicos occidentales en este tipo de estudios. Abajo se dan elementos para justificar el punto de vista de la tesis.

El enfoque metodológico

Esta investigación expone otra manera de acercarse al pensamiento matemático de comunidades tradicionales, apoyada en una metodología interpretativa y comparativa, con el fin de hacer una presentación de lo que podría ser otro enfoque del pensamiento matemático ancestral de éstas. Este enfoque centra especial atención en la hipótesis de que existen elementos matemáticos que se pueden considerar como invariantes culturales en la conformación del pensamiento de estas comunidades sobre los sistemas de numeración.

En cada capítulo se trata de demostrar que el análisis que se hace de la pre-aritmética de las comunidades tradicionales de estudio no es arbitrario, ya que se parte de una indagación de tipo antropológico sobre los rastros que las comunidades han dejado: documentos, gráficos, representaciones iconográficas, etc., y se intenta ver en los estudios antropológicos sobre esas comunidades las relaciones entre el pensamiento pre-aritmético de éstas y las nociones aritméticas modernas. Debe quedar claro al lector que el autor no tuvo contacto directo con las comunidades de estudio. Éste se limitó a hacer un estudio basado en información secundaria.

Así pues, se analizan situaciones pre-aritméticas distantes en el tiempo de comunidades tradicionales que son leídas a la luz de la cultura matemática del autor, pero en ningún momento se impone un punto de vista moderno al pensamiento matemático de las comunidades; al contrario, el análisis antropológico está dando las razones de ser, la validez del sistema moderno de axiomas y de su correspondiente lógica.

Pero algún lector podría argumentar que aunque se indica que se está haciendo un estudio antropológico de las comunidades basado en las huellas y en su pensamiento, lo que en última instancia se está utilizando es una rejilla analítica actual, entonces se caería en el error de estar transfiriendo una visión moderna de la aritmética al pasado. Esta misma crítica la hace Milroy en (Ferreira, 1997, pág. 24): "¿cómo puede alguien que fue escolarizado dentro de la matemática occidental convencional 'ver' cualquier otra forma de matemática que no se parezca a la matemática convencional, que le es familiar?"

Al interrogante anterior el autor responde que no hay una realidad independiente del punto de vista del observador, este es un problema al cual el investigador está forzosamente condenado, puesto que no existe una realidad pura, independiente del punto de vista de nadie, toda observación depende de las condiciones del observador, es inevitable. Pero, para mitigar esta postura, el autor se dota de unos elementos antropológicos y no simplemente aritméticos, sin desconocer que los trabajos antropológicos a la vez están permeados por la cultura del observador.

Adicional a los estudios antropológicos, se apela a la historia y a la filosofía de las matemáticas en el sentido de que lo que hoy se conoce como aritmética formal, por ejemplo la axiomatización de Dedekind, no es más que la constitución de objeto en tanto síntesis de una realidad transcultural de contar. Entonces aquello que se conoce como aritmética viene de una experiencia del género humano en la actividad de contar. Y es aquí donde se sustenta este enfoque, porque se está señalando que las categorías aritméticas modernas han sido construidas desde un enfoque fenomenológico, es decir constructivista. Entonces, cuando se interpreta una realidad lejana como la de las comunidades tradicionales en estudio, lo que se hace es restituirle al pensamiento abstracto moderno el hecho de que tiene sus raíces en procesos de razonamiento complejo de estas comunidades y que la axiomática es axiomática porque ella interpreta bien lo que ha sido la actividad de contar y no porque alguien se la inventó *a priori*.

En conclusión, la aritmética se encuentra muy familiar con esa pre-aritmética, porque tiene sus raíces en procesos de razonamiento complejo que vienen de la interacción del hombre con la naturaleza y entre ellos mismos.

Aporte a la Educación Matemática y a la Etnoeducación

El mayor aporte de esta investigación está encaminado a la formación de maestros, puesto que contribuye a una mejor comprensión de las condiciones lógicas que intervienen en el proceso de constitución del objeto matemático sistema de numeración.

En los capítulos 2 y 3 se exhiben elementos históricos, filosóficos y lingüísticos que pueden ser de utilidad para los educadores matemáticos y los etnoeducadores, tales como los distintos niveles de existencia lógica de los objetos matemáticos y la complejidad cognitiva inherente al proceso de pasar de un nivel lógico a otro nivel lógico; la importancia de la clasificación como herramienta conceptual para la construcción de conjuntos y la operación de conteo alterno como la herramienta central para comprender la actividad de contar, a la hora de orientar la enseñanza de los números naturales, la relación de orden, las operaciones y la representación de estos.

Finalmente, se espera que el lector reconozca el camino que tuvo que recorrer el sistema de numeración para ganar su objetividad, así sea al interior de una teoría pre-aritmética basada en procesos empíricos, que siglos más adelante alcanzará su estatus de objeto matemático al interior de teorías axiomáticas como la de Dedekind y Peano.

1.2 Presentación histórica y sociocultural de las comunidades tradicionales

Antes de iniciar con la presentación de cada una de las comunidades de estudio, se hace necesario exponer los criterios en que se basó el autor para la selección de estas cuatro culturas. El primero fue la existencia de una, relativamente amplia, literatura sobre la antropología y la aritmética de sistemas de numeración en dichas comunidades[5]. El segundo criterio, es de tipo histórico, multicultural y geográfico. Se ha querido hacer una selección globalizante, en el sentido que, al menos, dos continentes se vean representados en las comunidades seleccionadas. Los Mayas y los Incas son las culturas con avances matemáticos más representativos en América y los Yoruba en África han sido objeto de importantes estudios etnomatemáticos. En el desarrollo de la investigación se incluyó la comunidad Tule, ubicada en el golfo de Urabá- Colombia, pese a la escaza información bibliográfica acerca de ésta. De esta manera se dejan por fuera otras comunidades de gran valor matemático y cultural, pero que por efectos prácticos era necesario, lo cual abre caminos posteriores a continuar adelantando esta indagación etnomatemática.

Comunidad Inca

A pesar de toda su grandeza, el Imperio Incaico escasamente existió algo más de un siglo, con anterioridad al año 1430 D.C., conquistó e incorporó la mayoría de las culturas en el área que se extendía desde el sur de Colombia hasta el centro de Chile. Los Incas impusieron su modo de vida sobre las gentes que conquistaron. Para el tiempo que los españoles arribaron, la mayoría del área de los Andes había sido totalmente controlada bajo las leyes imperiales. Ver figura i.

[5] Una crítica a la bibliografía existente es presentada en el parágrafo 4.2. Limitaciones metodológicas

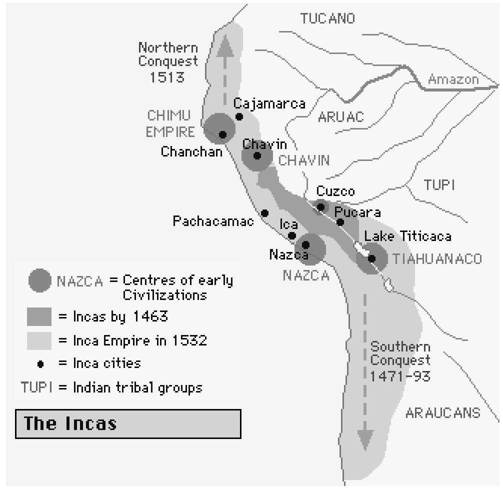

Figura i. Ubicación geográfica de la comunidad Inca

La comunidad Inca fue el resultado de la fusión de tres culturas anteriores: Tiahuanasco, la cultura Nazca y Mochica-michu. Vivían principalmente de su producción agrícola, utilizando técnicas avanzadas que se adecuaban a las dificultades de los terrenos andinos.

En la sociedad Inca, las clases sociales estaban bien diferenciadas. El clan Incaico nutrió la aristocracia, de la que procedían el alto clero y el alto mando militar y político. La unidad social fue la gran familia, llamada ayllu, compuesta por los descendientes de un mismo antepasado común y constituía una unidad endogámica en los aspectos económicos, militares y religiosos.

Éstos desarrollaron un sistema de registro de información llamado *Quipu*, que está compuesto por una cuerda principal, más gruesa que las otras, de la cual cuelgan otras cuerdecitas. La longitud de éstas varía de 20 a 50 cm y un *Quipu* puede estar formado por un mínimo de 3 hasta 2000 cuerdecitas. Una cuerdecita puede estar hecha por numerosos hilos de un determinado color, o bien por una combinación de hilos de colores diferentes. Los constructores de *Quipus*, llamados *Quipucamayos* eran los responsables de la codificación y decodificación de las informaciones al interior de la compleja burocracia Inca. Los colores de las cuerdecitas, el modo en el cual se había atado, la colocación relativa de cada una de las ellas respecto al conjunto, los espacios entre ellas, los tipos de nudos practicados en cada una de las cuerdecitas, las posiciones de cada uno de los nudos o grupos de nudos, el sentido "S" ó "Z" de la retorcedura y de la anudadura eran todas variables con una función bien precisa en el interior de este sistema de registro de datos lógico-numéricos.

En cada cuerdecita, fijada a la cuerda principal, hay grupos de nudos. Cada nudo o grupo de nudos es la representación simbólica de un número. Cada grupo contiene de 0 a 9 nudos y están separados por espacios bien precisos que distinguen la posición de uno respecto a otro. Además, el tipo de nudo practicado requiere una posición particular. Se trata de un verdadero sistema posicional sobre una base decimal: nudos largos o grupos de nudos largos (L) construidos en la parte inferior de la cuerdecita representan las unidades, mientras que los nudos individuales o grupos de nudos simples (S) colocados en sucesión a lo largo de la cuerdecita hacia la cuerda principal representan las decenas, las centenas y los miles. Estos nudos, es decir los nudos largos (L), nudos simples (S) y los nudos en forma de ocho (E) se forman como se representa en la figura ii. (Ascher & Ascher, 1997)[6]

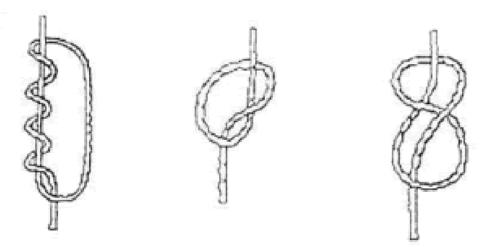

Figura ii. Nudos del Quipu

Puesto que un nudo largo no se puede realizar con menos de 2 vueltas, el número 1 en la posición de unidad está representado por un nudo en ocho (E). El cero se representaba por la ausencia de nudos en una determinada posición a lo largo de la cuerdecita o bien por una cuerda sin nudos, aunque no era considerado un número. Esto se trata en mayor detalle en el parágrafo 2.3

[6] Esta investigación de las matemáticas Incas, una de las más reconocidas internacionalmente, aporta elementos para el análisis del Quipu, su construcción, la lógica interna de su sistema de numeración y las operaciones aritméticas, así como las funciones sociales cualitativas y cuantitativas que jugaba éste en el gran imperio Inca.

Finalmente, para los Incas las relaciones familiares y los roles de parentesco representan los principales tipos de relaciones, en términos de que los números son conceptualizados, organizados y hablados. Cualquier secuencia de números naturales o números ordinales es motivada, y encuentra su racionalidad, en las relaciones biológicas y sociales, especialmente familiares y de parentesco. (Urton, 1997)[7]

Comunidad Yoruba

En la región forestal de la franja costera que se extiende entre el Volta y Camerún se asentaron alrededor del siglo V de nuestra era comunidades rurales que dominaban la técnica del hierro y organizaron una economía agrícola y formas de vida avanzadas y estables. Entre las más importantes estaban las comunidades Yoruba, cuyo grupo central, localizado en las regiones de Ifé, Ilesha y Ekiti. Figura iii.

Un movimiento de dispersión protagonizado por los grupos que impusieron su supremacía económica, política y cultural sobre los territorios ocupados por comunidades más débiles condujo, probablemente, en el siglo XIII (d.C.) a la formación de los reinos Yorubas.

Figura iii. Ubicación geográfica de la comunidad Yoruba

7 Urton estudia la función social y cultural que juegan los números entre los habitantes de Perú y Bolivia; además, presenta una nueva posición frente a la etnomatemática: la lógica interna de las operaciones matemáticas no son determinadas por la cultura, pero sí la naturaleza y significado de los objetos matemáticos. Ésta posición representa un cambio en la concepción de la etnomatemática.

Los Yorubas son uno de las comunidades tradicionales más importantes de áfrica cuyo patrimonio cultural e identidad son reconocidos en América, pese a la esclavitud. El culto y las diferentes formas de representación de la religión Orisa, a menudo llamada "Sangó", son muy populares en Latinoamérica, específicamente en Haití, Brasil, Cuba y Puerto Rico; y todas tienen sus raíces en la música Yoruba. Sus creencias religiosas son complejas, y reconocen una amplia variedad de deidades.

La cosmogonía Yoruba se construye a partir de la concepción de una entidad superior, integrada por tres divinidades, Olofi, Oloddumare y Olorun. La primera de ellas creó el mundo, que inicialmente sólo estaba poblado por santos (*orixás*). Posteriormente repartió su poder (*aché*) entre los orixás, que en adelante son los encargados de intervenir en los asuntos humanos y de abogar por los hombres ante Olofi gracias a la mediación del juez supremo o mensajero principal, Obbatalá. La unidad entre naturaleza y ética constituye en esta cultura una determinación cósmica y por ende un principio para el ejercicio del poder, condición para su aplicación.

En cuanto a las matemáticas, los Yoruba crearon y desarrollaron un sistema de numeración de base 20, al igual que muchas comunidades de América y África. Lo característico de este sistema numérico es que no solamente hace uso de la adición sino también de la sustracción y la multiplicación. De uno a diez utiliza términos independientes, también para 20, 30, 200 y 400. El resto son numerales compuestos. Como lo muestra la tabla 2-3 en el capítulo 2.

Robert G. Armstrong realizó un análisis de los números Yoruba, donde declara:

> "Este es el testimonio de la capacidad Yoruba del razonamiento abstracto que ellos pudieron desarrollar y aprender como un sistema" (Armstrong, Citado en Zaslavsky, 1999, pág. 206) Traducción libre.

En la comunidad Yoruba el significado de los números juega un rol importante, algunos son considerados sagrados, y el número cuatro ocupa la posición principal entre ellos, por ejemplo: Los nombres de las cuatro mayores deidades fueron dados a los días de la semana, y relacionados con los puntos cardinales.

Los Yoruba crearon un calendario donde la semana solo tenía cuatro días. Éste estaba en conexión con la agricultura, los ciclos lunares y las estaciones. Este mecanismo de medición del tiempo, puede parecer primitivo a las personas de la cultura occidental y poco científico, pero éste es el resultado de muchos años de cuidadosa observación.

La aritmética estaba presente en los procesos de intercambio o de mercadeo. Éste se hacía con conchas como moneda que eran agujereadas y enlazadas, generalmente, en cadenas de 40 conchas, llamadas *galinhas*. Después su nombre fue aplicado a un manojo de cinco cadenas, o 200 conchas. Éste cambio se debió a la devaluación de las conchas en términos de su poder de compra. (Zaslavsky, 1999)[8]

Comunidad Maya

La civilización Maya se extendió por el sur de Yucatán, parte de Guatemala y Honduras entre los siglos III y XV, ver Figura iv. Los Mayas no constituían un estado unificado, sino que se organizaban en varias ciudades-estado independientes entre sí que controlaban un territorio más o menos amplio. Tampoco hablaban una única lengua.

Figura iv. Ubicación geográfica de la comunidad Maya

[8] Este estudio del pensamiento matemático de las personas africanas abarca la designación de palabras en la lengua local y gestos para los números, los sistemas de numeración, magia y tabúes del número, su uso en la medición, en la música, el arte, la arquitectura y los juegos africanos tales como el mankala.

Los Mayas concebían al cosmos compuesto por 13 cielos, uno sobre otro, siendo la tierra la instancia más baja. Sobre cada cielo presidían trece dioses, llamados los Oxlahuntikú. Bajo la tierra había otros nueve cielos, sobre los que regían los Bolontikú. El último de estos cielos era el Mitnal, el infierno Maya, reino de Ah Puch, señor de la muerte.

Por otra parte, la comunidad Maya estaba organizada sobre la base de una marcada estratificación social, a la cabeza de la cual se encontraba la nobleza, los *almenehoob* ("los que tienen padres y madres"). Este grupo privilegiado monopolizaba el poder y la autoridad al ostentar los puestos políticos y religiosos.

La comunidad Maya utilizaba un sistema de numeración vigesimal posicional. Ver Figura v. También tenían un signo para representar el cero, y así poder realizar operaciones matemáticas complejas.

El punto tiene un valor numérico de 1 y la raya de 5. Así podían contar hasta 19. Para representar números mayores tenían que colocar esos signos en determinadas posiciones. Al ser un sistema vigesimal cada espacio que se avanza en el número representa 20 veces más que el espacio anterior. Este sistema de representación de los números naturales y sus operaciones constituyen la pre-aritmética Maya.

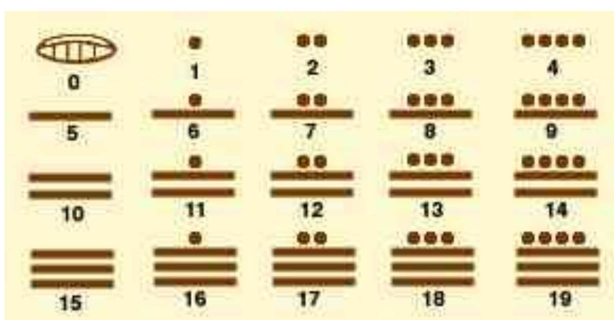

Figura ii. Numerales Mayas

Los grandes temas que inquietaban a los sacerdotes Mayas fueron la astronomía y la medición del tiempo. Para esto utilizaron todos sus conocimientos pre-aritméticos y religiosos. (Ifrah, 1981)[9]

Los Mayas, a diferencia de los Incas y Yorubas, crearon un sistema de escritura que consistía de glifos que realizaban en la piedra o en los códices. Particularmente llamativa es la creación de diferentes representaciones antropomorfas para los números. Figura vi.

Figura iiii. Representaciones antropomorfas de los números Mayas 6, 10 y 16

Comunidad Tule.

La comunidad Tule se encuentra ubicada en el golfo de Urabá y en la región del Darién, entre los departamentos de Chocó y Antioquia. La mayor parte de la población, actualmente se encuentra en las Islas de San Blas en Panamá.

A lo largo de la historia, la comunidad Tule, se ha visto sometido a diversos desplazamientos y migraciones a otras regiones, la primera de ellas fue provocada por la comunidad Emberá, por lo cual los Tule se desplazaron a la costa, provenientes del rio Atrato, este acontecimiento ocurrió en la época de la colonia y la conquista.

Esta comunidad se caracteriza por tener una estructura sociopolítica, matrilocal[10]. Ésta se convierte en la unidad social básica de los Tule, compuesta por los padres, los hijos

[9] Este texto, es considerado un clásico sobre la historia y representación de los números y los sistemas de numeración. Ilustrado con decenas de signos de los números de comunidades de todo el mundo. Ha sido traducido a más de 35 idiomas.

[10] Según este sistema, la mujer permanece en la casa de su madre mientras que su marido deja a su familia para instalarse con ella. Cuando nacen los hijos, éstos se añaden a la unidad maternal. El resultado es una familia extendida en la que tres o más generaciones de mujeres relacionadas entre sí viven en una misma casa.

solteros y casados. De la misma manera, la organización política de esta comunidad, se estructura sobre la comunidad en sí, y las familias extensas.

La cultura Tule define la matemática como la visión temporo-espacial basada en las relaciones reciprocas hombre-naturaleza, donde los Dioses crearon el cosmos y dentro de él a la Madre tierra con sus seis capas y doce sub capas, considerando de igual valor a los seres macho y hembra que en ellas existe. En este sentido:

> "La matemática Tule tiene sus fundamentos en la estructura de clasificación, la cual se asume desde lo cosmológico, siendo la base de los saberes históricos, botánicos, teológicos, agrícolas y artísticos. Los clasificadores, acompañan los discursos, bien sean lingüísticos, o matemáticos dando precisión y fundamento a lo que se quiere comunicar" (Ochoa & Peláez, 1995, pág. 10)[11]

> "En la historia la matemática aparece como la capacidad de "ver" la realidad social, política, económica dentro de la cosmologia Tule. Desde este mismo punto el número expresa el tiempo y el espacio con sentido y coherencia, da cuenta de las formas de vida de la sociedad y comporta la normatividad desde el saber moral. En este sentido el número hace referencia a la construcción de la unidad familiar, a la unidad política, a la unidad personal, a la sabiduria, a la musica, a la historia, y en especial al diálogo intercultural, donde la concepción de número ocidental es complementado por la riqueza teórica y conceptual, al incluir una rigurosa observación de la naturaleza, de los fenomenos sociales y políticos" (Ibid, pág. 58)

Regularidades y diferencias entre las comunidades de estudio

La presentación anterior de las comunidades tradicionales, no pretende ser completa, pero en cada una de ellas se deja ver la fuerte relación de éstas con fenómenos naturales, en todos los espacios de su vida religiosa, social y económica. Por el contrario, en relación al pensamiento matemático, tienen algunas contrastes, por ejemplo: los Mayas, Yorubas y

[11] Este trabajo fue realizado por la comunidad Tule de Ipkikuntiwala con el auspicio de la Asociación de Cabildos Indígenas de Antioquia. Este libro presenta características muy particulares. En una primera parte expone una descripción del conocimiento matemático Tule, la idea de número desde su cosmovisión, sus formas de operar, de clasificar, de medir, su pensamiento geométrico y lógico, siempre en español y en idioma Tule. En una segunda parte, se expone la matemática occidental básica: unidades de medida, estructuras de seriación, las cuatro operaciones básicas de la aritmética, sistema decimal y posicional, proporcionalidad, números fraccionarios, sus operaciones y números decimales. (Blanco, 2006)

Tule crearon sistemas de numeración de base veinte, al contario de los Incas que era decimal; los Yoruba a diferencia de las demás comunidades utilizaron la operación substracción para la creación de números compuestos; los Mayas e Incas crearon una forma de escritura, este tema se amplía en el parágrafo 2.3, mientras los Yoruba solo designaban los números de forma auditiva.

A pesar de las diferencias presentadas arriba, estas comunidades llegaron a pre-figurar cierta estructura de orden y sus operaciones hasta que finalmente se decantó un sistema de numeración. Este proceso de conformación de los sistemas de numeración en las comunidades tradicionales es, como se dijo en 1.1, el objeto de estudio de esta investigación.

Capítulo 2. Los números naturales y el camino a la abstracción

Introducción

Este capítulo trata la construcción del número natural como punto de partida en el camino hacia la conformación de los sistemas de numeración, apoyándose en ejemplos concretos de diferentes comunidades tradicionales. Esta forma de construir el número natural, generalmente, no se hace explícita en los tratados de historia de las matemáticas, donde solo se apela a la axiomática de Dedekind- Peano para dicho fin.

Para iniciar se hace necesario alertar al lector de la presencia primigenia de nociones y procedimientos matemáticos que siglos más adelante se conocerían como función proposicional, biyección, clases, clases de equivalencia y representante de una clase. Con estas nociones cuyo significado se explicará luego, se intentará caracterizar las formas primigenias de pensamiento de las comunidades tradicionales, que aunque no era un conocimiento formal a la manera moderna de axiomas y teoremas, sí contaba con una alta complejidad lógica que evolucionó en la mente del hombre a través de muchos años. Para esto se apela, a lo largo de este capítulo, al método constructivo en matemáticas, que consiste en construir los objetos a partir de un objeto matemático primitivo, propio o no a la teoría de la cual participan los objetos que serán enseguida construidos por abstracción, o lo que es lo mismo, por medio de clases de equivalencia de otros objetos en un proceso finito. De otro lado, un objeto es definido por el método correlativo, si es construido con la ayuda de un conjunto de condiciones iniciales, establecidas corrientemente por un sistema de axiomas o las extensiones de la teoría correspondiente, que se deben respetar, sea singularmente o sea en tanto que elemento de un cierto conjunto.

Con el fin de exponer el proceso constructivo de los números naturales se hace necesario exhibir los pasos lógicos de pensamiento que el hombre antiguo recorrió. Se inicia con la clasificación de objetos concretos o abstractos del dominio U: que es el conjunto de todas las cosas concretas y abstractas, apoyado en palabras de la lengua local y la operación lógica: función proposicional[12], se prosigue con la realización de comparaciones o biyecciones entre colecciones, con la ayuda de la operación de conteo alterno[13]. Obsérvese que los objetos que se han estado manipulando gozan de un primer orden de existencia, en el sentido de que sus propiedades constitutivas se expresan en predicados de variables individuales del dominio U[14]. Inmediatamente, se prosigue a construir clases de equivalencia y, finalmente se elige un representante abstracto de cada clase, quienes en últimas van a ser los números naturales. Este objeto, número, goza de una existencia lógica de segundo nivel, en tanto que es un objeto construido por medio de abstracción, por medio de pasos lógicos desprovistos e independientes de la realidad natural. Ya que en este punto no se predica sobre los objetos del dominio U, sino sobre los predicados que se habían hecho sobre dichos objetos, es decir: predicados de predicados[15].

---

[12] En la teoría de Cantor, es posible formar un conjunto a partir de una propiedad determinada que deben cumplir sus elementos. En otras palabras, dada cualquier propiedad *P*, existe un conjunto *a* cuyos elementos son precisamente los objetos que verifican $P(x)$. Este conjunto se representa por $\{x/P(x)\}$. Esta manera lógica de construir conjuntos a partir de una propiedad fue llamada por Frege: Axioma de comprensión. En este punto se deja de lado por un momento que en el fondo la existencia de este conjunto universal U conlleva a la paradoja de Russell sobre el conjunto de todos los conjuntos que se contienen a sí mismos. Problema que se le planteó a Dedekind **(1998)** cuando tuvo que "demostrar" la existencia de su sistema simplemente infinito (ver las definiciones 44 y 71). La lógica salda este problema utilizando el axioma del conjunto potencia: *Para cualquier conjunto x existe otro conjunto, representado por P(x), que contiene todos los subconjuntos de x*, de la axiomática de Zermelo-Fraenkel, que es hoy día generalmente aceptada como el contexto minimal al interior del cual es posible hablar de conjuntos de manera correcta y precisa.

[13] Ver definición en la página 40.

[14] Por ejemplo al considerar la propiedad de los objetos concretos o abstractos: ser rojo, entonces se escribiría en lógica de primer orden como $\forall x\ Z(x) \rightarrow x \in a$. Donde *a* es el conjunto de todos los objetos con la propiedad rojo. En este caso se predica sobre sustancias primeras.

[15] En este punto ya no se predica sobre las sustancias primeras sino sobre los predicados de primer orden. Por ejemplo, el conjunto *a*, fue construido por medio de predicados de primer orden sobre variables individuales. (ver la nota anterior). Ahora, en lógica de segundo orden se predica sobre conjuntos de individuos: $\forall a \forall x\ (x \in a \vee x \notin a)$ dice que para todo conjunto *a* de individuos y para todo individuo *x*, o bien *x* está en *a*, o bien no lo está (principio del tercero excluso).

Así pues, el método constructivo se hace necesario en tanto que permite rastrear o visualizar los momentos lógicos de pensamiento complejo que las comunidades tradicionales desarrollaron, para en un proceso de tematización[16] llegar a la constitución de los sistemas de numeración como objeto matemático, además este enfoque permite abstraer un patrón de pensamiento transcultural de los actos secuenciales básicos en que se descompone el razonamiento sobre el número y los sistemas numéricos.

Aunque se habla de procesos lógicos, no se trata del enfoque logicista, puesto que éste trata de reducir la explicación de los objetos a una propiedad lógica, independientemente de cuál haya sido el método de construcción.

Al enfoque logicista le interesa insertar el objeto en una teoría y sobre todo una teoría deductiva, por medio de cadenas de deducción lógica, dependiendo de unos principios lógicos iniciales y unas definiciones y por medio de deducciones sacar todas las consecuencias de allí, esa es su teoría lógica, que debe tener ciertas categorías lógicas, por ejemplo, una de ellas es que sea consistente. Este enfoque se asocia a Frege, donde su principal tarea en los fundamentos de la aritmética fue "mostrar el carácter analítico (que dependen únicamente de principios lógicos) de las verdades aritméticas (a ello dedica la totalidad del capítulo I[17]). Esta búsqueda por la naturaleza analítica de las proposiciones aritméticas, al lado de los fundamentos de sus primeros principios libres de toda intuición sensible, son en esencia la base del programa logicista fregeano, el cual, en cierta forma es abandonado al final de su vida… De esta manera, para Frege, una proposición es analítica si al rastrear todos los principios de los cuales depende, en ellos solo se encuentran definiciones y leyes generales lógicas. Es sintética, si, por el contrario, en la prueba es necesario recurrir a principios que no sean de carácter lógico general (por ejemplo, una intuición sobre experiencias empíricas)" (Obando, 2008, pág. 12)

Lo anterior, no niega que el logicista pueda ser constructivista, en el sentido de que puede dar cuenta en ciertos momentos de que los objetos de su teoría vienen de otros

[16] Entiéndase *tematización* como el proceso abstracto y complejo de pasar de un nivel de complejidad a un nivel superior apoyado en relaciones de equivalencia. Ver (Gardies, 2004)
[17] Ver (Frege, 1996)

niveles teóricos. Puesto que un constructivista está interesado en ver cómo las teorías se han dado por extensión de otros campos teóricos, pasar de un campo teórico de un nivel a otro campo teórico extendido de un nivel superior, a través de unas propiedades lógicas que tiene sobre el campo previo y después ver que todo eso está relacionado con una serie de principios de abstracción envolvente, que se podría llamar un efecto cascada de tematización. Pero, incluso cuando se es constructivista se piensa en que el campo numérico extendido debe preservar las características de fondo de la estructura que tenía el campo anterior restringido, hay que preservar la estructura. Y cuando se remite el objeto a una teoría que pone características determinadas de estructura, el sujeto está siendo lógico, está expresando objetos por propiedades lógicas.

Finalmente, este constructivismo puede ser tomado como un logicismo también, por la vía de que construir es preservar estructura. Por ejemplo, cuando se llega a los racionales, se conoce que éstos son un campo ordenado[18], cuando se pasa de allí por construcciones de Cantor o Dedekind a los reales se llega a un campo en el cual esos objetos preservan la estructura anterior de cuerpo ordenado, pero aparte de ello más "rica" (en términos lógicos) la estructura. La construcción de los reales a partir de los racionales por cortaduras ha preservado la estructura, entonces el objeto real es de una estructura ya, está definido por propiedades lógicas de la estructura, las propiedades que tienen que ver con lo que es cuerpo. Es una superestructura con unas estructuras por dentro. En conclusión, el constructivismo y el logicismo están relacionadas pero como dos cosas de naturaleza distinta.

Otro enfoque es el método axiomático o correlativo, del cual no se hace uso explícito, porque éste es un método de trabajo en matemáticas posterior a la construcción de la noción del número, además porque este método oculta la actividad matemática compleja que la produjo. No obstante, se toma como referente la axiomática de Dedekind-Peano.

---

[18] Un *Campo* o *Cuerpo* es una estructura algebraica en la cual las operaciones de adición y multiplicación se pueden realizar y cumplen las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva, además de la existencia de un inverso aditivo y de un inverso multiplicativo, los cuales permiten efectuar la operaciones de substracción y división (excepto la división por cero), y un *Cuerpo ordenado* cumple con la definición anterior y adicional se define en él una relación de orden.

En la definición 71 de su trabajo, Dedekind (1998) caracterizó a N como un conjunto[19] cuyos elementos son llamados números, con un número particular 1, llamado el número base o número inicial, equipado con una función, llamada función sucesor, definida de N $\rightarrow$ N enviando un número n a su sucesor n', tal que:

i. 1 no es el sucesor de ningún número
ii. La función sucesor es una función uno a uno, esto es, si n $\neq$ m, entonces n' $\neq$ m'.
iii. Si un subconjunto S de N contiene al 1 y es cerrado bajo la función sucesor, n $\in$ S implica que n' $\in$ S, entonces el subconjunto S es igual a N.

Estas son pues, las condiciones iníciales que se deben respetar, en tanto que elemento de un cierto conjunto. Nótese la diferencia del método correlativo que define al número directamente como individuo, desprovisto de cualquier relación con los objetos concretos o abstractos iniciales, se dice por tanto, que la existencia objetiva del número natural se ubica en un segundo orden lógico.

Lo que en el fondo se quiere decir es que la axiomática de Dedekind-Peano fue introducida históricamente para un conjunto infinito N de naturaleza cualquiera, del cual los números naturales habituales son solamente un modelo. Bien podría existir otro conjunto que satisficiera el grupo de propiedades de N o la estructura de N, entonces entre esos dos conjuntos se podría crear un isomorfismo[20], es decir, una correspondencia biunívoca que deje invariantes esas propiedades.

---

[19] La teoría de conjuntos de Dedekind no estaba formalizada en su inicio. Dedekind (1998) tuvo que "demostrar", antes de fijar la estructura de N por los axiomas, que existía un conjunto o sistema simplemente infinito *S*, que por la definición 71 consiste en la existencia de una representación ϕ de *S* y un elemento 1 que satisfacen las siguientes condiciones: i. $\phi(S)\subseteq S$; ii. $1\notin\phi(S)$; iii. $S=\phi_0(\{1\})$; iv. ϕ es una aplicación biyectiva. Entonces esta noción no estaba "dada" previamente a la constitución de N como objeto, a diferencia de la introducción empírica de la "clase universal" en la pre-aritmética. Los avatares históricos de esta existencia se condensarán luego en el axioma del infinito con la formulación de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel.

[20] Dedekind definió que dos sistemas son **isomorfos** de la siguiente manera: Definición 32: Los sistemas *R*, *S* se llaman *similares* cuando existe una representación $\phi(S)= R$, y por tanto también $\bar{\phi}(R)= S$. Y presenta en la nota (134) la relación de la serie numérica N con cualquier otro sistema isomorfo a ella, que fungirá el papel de **modelo** de N. "… Igualmente resulta evidente, considerando (71) y (73), que todo teorema sobre los números, es decir sobre los elementos *n* del sistema simplemente infinito *N* ordenado por la representación ϕ, a saber, aquellos teoremas en los que se prescinde completamente de las características particulares de los elementos *n* y sólo se trata de aquellas nociones que se basan en la ordenación ϕ, poseen validez general

Mientras que por medio del método constructivo, aunque se llega a la misma conclusión sobre la existencia lógica de N, éste deja al descubierto los pasos lógicos que inician en el mundo natural y abstracto de las cosmovisiones de los grupos culturales, elementos que pertenecen al dominio U. En términos lógicos, se predica sobre ellos pasando así a un nivel de existencia de primer orden. Posteriormente, por medio de relaciones de equivalencia y mediante el empleo de predicados, ya no sobre variables individuales sino sobre conjuntos, se llega a un nivel donde los objetos, en particular los números enteros positivos o naturales, gozan de una existencia lógica de segundo orden.

En los parágrafos 2.2 y 2.3 se analiza la objetivación de los números en tanto el lenguaje es su medio de existencia predicativa o lingüística. Asumiendo que la designación de objeto no es existencia de objeto. El lenguaje a lo sumo "da" el objeto, lo hace ostensible, pero el objeto no se constituye en el lenguaje, su existencia se da en la estructura[21]. En

---

también para cualquier otro sistema simplemente infinito Ω ordenado por una representación θ y por sus elementos *v, y* que la transferencia de *N* a Ω (por ejemplo, también la traducción de un teorema aritmético de una lengua a otra) sucede gracias a la representación ψ considerada en 132, 133, que transforma cada elemento *n* de *N* en un elemento *v* de Ω, a saber $\psi(n)$. A este elemento se le puede llamar el *n*-ésimo elemento de Ω, y por eso el propio número *n* es el *n*-ésimo número de la serie numérica *N*. la misma significación que tiene la representación ϕ para las leyes del dominio *N*, en tanto que a cada elemento *n* le sigue un determinado $\phi(n)=n'$, corresponde para las mismas leyes en el dominio Ω, de acuerdo con la transformación operada por ψ, a la representación θ, en tanto que al elemento $v=\psi(n)$ formado por transformación de *n* le sigue el elemento $\theta(v)=\psi(n')$ formado por transformación de *n'*; por eso tenemos derecho a decir que ϕ es transformada por ψ en θ, lo que representa simbólicamente $\theta= \psi\ \theta\ \bar{\psi}$, $\phi= \bar{\psi}\ \phi\ \psi$" (Dedekind, 1998)

[21] Es posible hablar, al menos, de dos niveles de existencia de los objetos matemáticos: i. *Existencia estructural* cuya naturaleza responde a las propiedades o axiomas que lo definen. Dedekind habla de una clase de números abstractos C, que cumplen con las propiedades de que hay un primer elemento; que cada número tiene un sucesor y que existe el principio de inducción, esta es la estructura del sistema simplemente infinito. Aquí la existencia es una existencia estructural de los naturales en tanto ordinales. De otro lado, ii. *La existencia predicativa o lingüística* se refiere a una forma de designar los objetos, una forma de interpretarlos, por ejemplo, el modelo conjuntista de Von Neumann de los naturales, donde 1 = {ø}, 2= {ø, {ø}}, 3= {ø, {ø}, {ø, {ø}}},… tiene la misma estructura del conjunto simplemente infinito de Dedekind. De igual forma, el modelo de Zermelo: 1={ø}, 2={{ø}}, 3={{{ø}}}, …

En conclusión, la existencia en la estructura es diferente a la existencia en el modelo, en la estructura no es necesario decir quién es 2 por una predicación, en la estructura se dice que 2 está en tal posición a partir de la estructura que define la función ordenadora, en cambio en el modelo hay que decir qué es 2, 2 es el conjunto que tiene dos elementos, esta es existencia con predicación, en la estructura es existencia sin predicación es estructural, acá no hay que dar una propiedad característica del ente 2, porque 2 es una posición, en el modelo hay que dar una característica especifica del 2, y decir 2 es tal conjunto, cuando se dice 2 es tal conjunto se está predicando, en la estructura N es independiente de cualquier interpretación, por eso se dice que N es particular se analiza el caso del cero, que en la cultura Inca no era considerado un número, aunque éste gozaba de una designación escritural y una designación oral, además se le operaba en el sistema de numeración sin mayor dificultad.

2.1 Construcción del número natural

Inicialmente, al hablar del *acto constructivo del número*, se plantea de entrada, al igual que en la introducción general, una postura filosófica frente a "las matemáticas como una actividad de razonamiento, como un acumulado cultural, donde la humanidad es la legataria de ese patrimonio que los matemáticos han desarrollado a través de la historia. Ese legado no solo es un conjunto de teorías o resultados. Estas teorías fueron construcciones hechas por individuos, que respondían a actos intencionales en contexto, fines y propósitos que tenían su objetivo en su momento histórico" (Blanco, 2008b, pág. 4)

Acordada esta postura filosófica frente a las matemáticas, es posible reconocer en la construcción del número, a los menos, tres momentos lógicos o niveles de razonamiento complejo distintos (Panza, 2007):

1. La capacidad cognitiva de reconocer y clasificar los objetos concretos o abstractos en colecciones
2. La capacidad de comparar dos colecciones de objetos concretos o abstractos
3. La capacidad de reconocer colecciones Universales

A continuación se explica cada uno de ellos:

El primero tiene que ver *con la capacidad cognitiva de reconocer y clasificar los objetos concretos o abstractos (dioses, días y noches, etc.) en colecciones*. El hombre en esta etapa es capaz de identificar y clasificar o agrupar objetos abstractos de su cosmovisión o concretos de su entorno, tomando parámetros característicos de los objetos: el color, el tamaño, la forma, el uso, el peso, etc. Pero, aún, no tiene conciencia de que una

universal, es categórica porque es independiente de cómo se interprete lo que es 2 o 3 o 4 independiente de la actividad lingüística o de un modelo. Shapiro en (Arboleda, 2006) agrupación de cuatro hombres, cuatro caballos, cuatro canoas, cuatro cocos presentan una característica común que es precisamente la de ser cuatro.

Un ejemplo de esta capacidad de clasificar se encuentra en la matemática Tule[22] que "tiene sus fundamentos en la estructura de clasificación, la cual se asume desde lo cosmológico, siendo la base de los saberes históricos, botánicos, teológicos, agrícolas y artísticos. Los clasificadores, acompañan los discursos, bien sean lingüísticos, o matemáticos dando precisión y fundamento a lo que se quiere comunicar" (Ochoa & Peláez, 1995, pág. 10). Para tal fin, emergen palabras en la lengua de la comunidad indígena Tule, para la que "*clasificar* es una manera de conocer el mundo. Cuando se pone junto lo que debe ir junto, estamos dando cuenta del saber sobre la naturaleza y los seres que la constituyen" (ibid, pág. 20).

Dicha comunidad utiliza clasificadores relacionados con ideas de lo humano, de forma (lo plano, lo redondo o alargado), de su entorno y actividades de su vida cotidiana. Estos son algunos de ellos:

- *Clasificadores de forma*

Kua: para lo redondo, lo circular

Wala: para lo alargado y se extiende a animales cuadrúpedos

Olo: para nombrar pedazos y partes de algo

- *Clasificadores de agrupación*

Kuku: para conjuntos de objetos alargados

Tuhhu: para manojos o puños

Tulahuen: que define a una persona o veinte unidades

- *Clasificadores de medida*

Tali: para la brazada

Mattaret: medida correspondiente a la palma de la mano.

Modernamente, si se toma como el Universo todas las cosas concretas y abstractas y se denota por U, al realizar una clasificación, bajo cualquier parámetro, de los objetos de U, se dice entonces que esa clasificación induce una partición sobre la colección U. Esto es

[22] En el parágrafo 1.2 se hace una presentación de esta comunidad.

una colección de subconjuntos de U, llamados *clases*, disyuntas dos a dos y cuya reunión es U.

$$U=\{a,b,c,d,e,f,g,h,\ldots\}$$

$$U=\cup\{[a,b],[c,d,e,f],[g],[h],...\}$$

Ahora, dada la clase A que pertenece a U, la operación lógica que al hombre le permite decidir si un objeto x pertenece a A es la *función proposicional*: una proposición con una variable. Supóngase que A sea la clase de los pájaros. Dada la función proposicional P(x): {x es un pájaro}, se evalúa el valor de x en P(x). La clase de los pájaros se define entonces como las cosas para las cuales x es un pájaro. Es claro que en este momento el hombre predica sobre sustancias primeras[23], por tanto las clases que pertenecen a U gozan de un primer nivel de existencia lógica, y dichas clases tienen referentes del mundo de la experiencia inmediata. En palabras de Frege, ésta es una proposición sintética, puesto que se refiere a una intuición sobre experiencias empíricas. Pero, lo que importa es que apoyado en los efectos del dominio de la experiencia perceptual, la cual a su vez estaba orientada por la intención de conocer los números naturales, el hombre logró reconocer gramaticalmente que determinados objetos poseían ciertas propiedades: *designación por comprensión* ó que tales objetos pertenecían a ciertos conjuntos: *designación por extensión*. (Arboleda, 2007) La primera relacionada con el reconocimiento primigenio de la estructura de dicho conjunto, la segunda referida a la posibilidad de exhibir los objetos de dicho conjunto. De aquí la importancia de la clasificación como actividad lingüística en la construcción del objeto matemático número natural.

Hasta aquí, se ha mostrado cómo el hombre sabe distinguir y clasificar cosas concretas o abstractas ayudado por la operación lógica y unaria: función proposicional y la lengua local, con la cual construye subconjuntos del universo U. Esto a condición de que el hombre prehispánico hubiera pensado en el lenguaje de la lógica proposicional actual[24].

---

[23] Sócrates, Platón, esta mesa, aquella silla, la planta que decora el salón, Dios..., son entidades individuales dotadas de existencia independiente; y son sustancias primeras porque en ellas descansan las otras determinaciones genéricas que les pueden sobrevenir como ser hombres, sillas, perros, plantas. (Martínez & Martínez, 1997).

[24] A lo largo del documento el análisis del origen de la constitución de los sistemas de numeración como objeto matemático se hace a la luz de las teorías aritméticas modernas de Peano-Dedekind y de teorías

Ya clasificados los objetos de U, el segundo nivel, de mayor complejidad cognitiva es la capacidad de comparar dos colecciones de objetos concretos o abstractos. Imagínese un hombre prehispánico que sabe reconocer y agrupar sus ovejas. Éste, por medio de la sensación numérica[25], al tener los animales encerrados en un corral no puede darse cuenta si le faltan o no. Él necesita saber si todas las ovejas que salieron en la mañana regresaron en la tarde. Para esto se apoya en la *operación lógica de conteo alterno* que consiste en tomar dos colecciones C_α y C_β de objetos. Se toma un objeto de C_α y se elimina, luego, toma un objeto de C_β y se elimina. Enseguida se elimina otro objeto de C_α y un objeto de C_β. Se continúa de esta forma hasta agotar los objetos de una colección u otra[26]. (Panza, 2007).

Haciendo uso de esta operación, el hombre prehispánico en una actividad pastoril milenaria, toma una colección de piedrecillas y su colección de ovejas, se sienta a la entrada del corral y elimina una piedrecilla al pasar una oveja frente a él, y así sucesivamente hasta agotar los animales. Guarda su colección de piedrecillas y al día siguiente repite la operación. Por cada oveja que pasa elimina una piedrecilla, o por cada

---

antropológicas. Y en ningún momento se intenta imponer la mirada actual como si fuera el origen. Simplemente éstas son las herramientas teóricas con las cuales el autor cuenta en su cultura. Esto, de alguna manera, se aclaró en el capítulo 1.

[25] La sensación numérica se refiere a lo que la percepción inmediata permite reconocer a un solo golpe de ojo. "Podemos distinguir sin equivocarnos y a primera vista *uno*, *dos*, *tres*, e incluso *cuatro* elementos. Pero aquí se acaba nuestro poder de identificación de los números. Más allá de cuatro, todo se confunde en nuestro espíritu y nuestra visión global ya no nos sirve de nada. ¿Hay veinte o quince platos en esta pila… *Es necesario contarlos para saberlo*. El ojo, por así decirlo, no es un "instrumento de medida" lo suficientemente preciso; ¡su poder de percepción directa de los números rebasa muy pocas veces (por no decir nunca) el número cuatro!" (Ifrah, 1987, pág. 22). De la definición anterior surge la pregunta: ¿La percepción da directamente el número cuatro como ordinal? Esto no es posible sino solo por el uso de la operación de conteo alterno, por medio de la cual el hombre no tiene problema en aceptar la existencia de series de ordinales finitos pequeños, pues está acostumbrado a asociarlas con series de referentes cuya existencia material le es familiar. Husserl (1969) en su teoría fenomenológica del conocimiento hace alusión a las limitaciones de la percepción para capturar un objeto completo, es decir el objeto y su estructura, a la que llega solo por medio de una sucesión más avanzada de actos mentales que pueden verificar la presencia del objeto o de propiedades suyas.

[26] Obsérvese que la biyección por descarte u operación de conteo alterno, en la medida que va dejando una serie ordenada de conjuntos finitos, es posible interpretarla en la axiomática de Dedekind por la función 1-1 ordenadora a partir de un primer elemento. El pensamiento numérico tradicional aparece entonces relacionado con una actividad de conteo, entendida como objetivación de procedimientos lógicos; no simplemente como una "abstracción" inmediata de una realidad natural.

piedrecilla eliminada hace pasar una oveja, y así hasta que pasa el último animal, al cual le corresponde la última piedrecilla de la colección. En últimas, lo que en el fondo se quiere decir es que al examinar el razonamiento de comparación de conjuntos finitos a través de la operación de conteo alterno, es encontrar las razones de ser del pensamiento de la biyección en prácticas pre-aritméticas antiquísimas[27].

Para esto, el hombre no sólo se ha valido de piedrecillas, sino también de otros objetos de su entorno, así como palillos, marcas sobre hueso, diferentes partes del cuerpo: los indígenas de las islas Murria relacionan un cierto número de partes del cuerpo, considerados en un orden convenido de avance; por medio de esta técnica, ellos están en capacidad de alcanzar una serie numérica hasta 29. La misma costumbre se encuentra en las Papous y los Elema de la isla de Nueva Guinea. El uso de las partes del cuerpo como herramienta para realizar comparaciones data de miles de años.

En la siguiente cita Lévy-Bruhl, critica el uso de las partes del cuerpo o de cualquier elemento concreto para realizar la correspondencia, argumentando que la mentalidad pre lógica del hombre primitivo interpreta la cosa concreta como el número y no realiza la separación entre lo concreto y lo abstracto. Es por la mentalidad prelógica del hombre que:

> "El número no se separa completamente de los objetos numerados. Eso que ella (la mentalidad prelógica) expresa por medio del lenguaje, no son los números propiamente dichos, esos son 'conjuntos números' de los que previamente no aisló las unidades. Para representarse la serie aritmética de los números enteros, en su sucesión regular, a partir de la unidad, haría falta que hubiera separado el número de lo que es el número. Eso es precisamente lo que ella no hace. Ella se representa al contrario de las colecciones de seres o de objetos que le son familiares a la vez por su naturaleza y por su número, éste era sentido y percibido, pero no abstractamente concebido" Lévy-Bruhl, citado en (Keller, 2000, pág. 22) Traducción libre.

En la cita anterior es necesario tener en cuenta que lo que se quiere es ir más allá del nominalismo e indagar por los actos de razonamiento complejo que se movilizan en la cabeza del sujeto cuando se enfrenta a la actividad del conteo. Y las herramientas lógicas de clasificación y conteo alterno permiten descifrar la naturaleza íntima del pensamiento

[27] No sobra recordar que la axiomatización de la estructura del conteo se basa en la abstracción de las nociones de conjunto y función 1-1

pre-aritmético, herramientas que más adelante son objetivadas en la teoría de conjuntos como conjuntos y función 1-1.

Esta misma crítica la hacen, hoy en día, los maestros de la educación básica primaria llamando la atención a los estudiantes cuando utilizan los dedos de sus manos para realizar conteos u operaciones porque piensan, al igual que Lévy-Bruhl, que de este modo los estudiantes confunden el número con los dedos y no abstraen la idea de número; pero no se dan cuenta que en la mentalidad prelógica del hombre o del niño empiezan a surgir conceptos constitutivos de un pensamiento pre-aritmético: v. gr., los ordinales como parte de una colección, la operación de conteo alterno como prefiguración de la función 1-1. Parecería que en la interpretación de Lévy-Bruhl, éste se pregunta por el pensamiento tradicional del número como entidad sustancial, ontológica; y no solo este autor sino muchos otros antropólogos o etnomatemáticos se preocupan por estudiar los números en una comunidad, cómo ese ente numérico surgió, por medio de qué actividades, cómo la comunidad se los representa, qué experiencias se tienen con ese número en el orden de las magnitudes, en el orden de la representación simbólica, etc. De lo que se puede suponer que se está asumiendo el número como ser, como una individualidad, pesa mucho en ellos el número como existencia: es el número el que se representa, es el número el que da una cantidad, es el número que operado con otro número da otro número, es el número el que se toma de una colección finita de números, hay entonces aquí desde el punto de vista filosófico, una consideración de número ontológica. Pesa mucho en la interpretación de estos números el hecho de que un número es una existencia. El número está muy amarrado al mundo perceptual sensible, pero cuando la aritmética avanza a un nivel que se decanta una estructura, entonces ésta se vuelve sobre determinante sobre la esencia del número, y el número ya no interesa tanto en su ontología sino en qué lugar ocupa en una operación, o en una relación de orden de la aritmética. Cuando ya la estructura define cuales son las propiedades, la naturaleza empírica del número es sustituida. Ocurre entonces una separación de lo aritmético del orden empírico y cosmológico que le dio origen, y lo que sustituye a la cosmovisión es la estructura. De aquí que el número ya no tenga una esencia sino que la estructura le establece una relación de naturaleza cualquiera, por ejemplo, cuando se suman dos números naturales 2 y 3, se está sumando algo que ocupa un lugar dos con algo que ocupa un lugar tres, y esa suma será cinco, pero no es la magnitud cinco, nuevamente es algo que ocupa un lugar cinco en la serie ordenada de los naturales.

Queda así establecido que en la interpretación de esta tesis prima un enfoque estructural del número[28], a diferencia del nominalismo de Lévy-Bruhl.

A la posición de Lévy-Bruhl, Keller responde:

> "El hecho que uno exprese el número por las cosas no significa que uno no le conoce como un número; expresar el número cinco con la ayuda de cinco dedos, de cinco marcas o de cinco objetos arbitrarios no significa que uno los confunda con ellos. Pues los primitivos lo comprendían perfectamente, su práctica lo prueba, que **los cinco dedos de la mano no dan más que para expresar alguna cosa puramente abstracta que es la biyección posible entre los objetos, los cinco dedos, con no importa qué tipo de objetos**; los cinco dedos no son más que una forma de hablar de esa correspondencia potencial e ideal, al mismo tiempo de que una forma de realizarla. No solamente su práctica lo muestra sino su mitología" [29] (Keller, 2000, pág. 22). Traducción libre.

Esto se puede ejemplificar con algunos datos de la comunidad Yoruba de África donde el cuatro ocupa la posición más sagrada. Así se encuentra que la semana entre las personas del sur de Nigeria tiene cuatro días y cada uno es dedicado a sus cuatro mayores deidades, Shango, Obatala, Orunmila y Oduduwa. Así mismo, para los Yoruba el mundo tiene cuatro esquinas que representan cuatro puertas y a cada punto cardinal le corresponde una deidad: Shango con el oriente; Obatala con el norte; Orunmila con el occidente, y Oduduwa con el

[28] La estructura de N es presentada en la nota 18. Véase también (Arboleda, 2006)

[29] Efectivamente, el acto nominal numérico es la objetivación de una serie de procedimientos mentales que quedan "encapsulados" en el razonamiento del conteo por descarte. El carácter "ideal" de la biyección consiste en ese pensamiento pre-aritmético de la función 1-1 como función ordenadora. La idea de esta función no es simplemente asociar números de dedos con números de cosas. Tampoco solamente permitirnos ir extendiendo la "numerosidad". Lo importante es que en el pensamiento pre-aritmético, hay una cierta conciencia del conteo basado en una función 1-1 ordenadora, que le permite al sujeto entender que el número es el resultado de organizar la colección de piedritas en una secuencia ordenada de conjuntos de conjuntos. Esta es la concepción más general de la estructura de N que, en la aritmética de Dedekind, representa nuestro conteo familiar de los naturales.

sur. De igual manera el cuatro juega un papel importante en la adivinación (Zaslavsky, 1999). Prueba esto que los Yoruba comprendían la idea abstracta del cuatro y no la confundían con las cosas contadas.

Esta manera de clasificar queda integrada a un talante particular de entender y observar al mundo: la cosmovisión, constituida por categorías de tiempo, espacio, género, número, sustancias y cosas (Durkheim, citado en Gutiérrez, 2002, pág. 75). Lo que muestra que las deidades no existen por separado en la cosmovisión. Entonces, existe un "sistema" en el cual se integran las funciones "especializadas" que cada una de ellas cumple según su espiritualidad y su influencia en las actividades sociales, económicas y culturales de la comunidad Yoruba. En este sentido se podría considerar, como hipótesis de trabajo, que el carácter universal y sistémico de esta cosmovisión refuerza el carácter ideal del número como sucesión ordenada de conjuntos de conjuntos.

Después de mucho tiempo el "matemático" primitivo a partir del uso razonado de su nueva operación lógica *conteo alterno*, extrae una propiedad que le garantiza hablar de la totalidad de los objetos de una clase. Un acto lógico que le permite saber que siempre que tenga conjuntos con un número igual de elementos, hay una relación que asegura esa igualdad. Cuando se remplaza oveja por piedra realiza un acto lógico complejo, en el sentido de que es compuesto por actos de razonamiento elementales, que se va separando poco a poco de lo concreto y resulta de hacerlo por mucho tiempo con objetos de naturaleza cualquiera. Esta operación de carácter empírico se le conoce como *biyección* entre dos conjuntos. La biyección es el acto de asociación, es la objetivación de procedimientos lógicos. Luego, para comparar el número de objetos de dos colecciones aplica el proceso.

> El primer ser humano que observó la analogía entre un grupo de siete pescados y un grupo de siete días hizo un avance notable en la historia del pensamiento. Fue el primer ser humano en albergar un concepto perteneciente a la ciencia de las matemáticas puras[30]. (Whitehead, citado en Recaman, 2002, pág. 15)

[30] En esta cita, Whitehead se refiere a un concepto perteneciente a la ciencia de las matemáticas puras, puesto que dicha analogía ya no se refería a los objetos concretos de la naturaleza, ni tampoco, a los predicados sobre dichos objetos. En este momento el hombre estaba razonando sobre predicados de predicados, es decir,

Finalmente, el hombre después de ordenar dos colecciones por medio de la operación de conteo alterno, está en condiciones de hablar de la totalidad de objetos de una colección[31].

> No puedo imaginarme *contando* cualquier conjunto de cosas sin *ordenarlas* primero, y tratarlas como sucesivas: por *arbitraria* y *mental* (o subjetiva) que pueda ser la sucesión asumida. (Hamilton, citado en la introducción de Ferreirós en Dedekind, 1998, pág. 52)

De aquí que, dos conjuntos tienen el mismo número de elementos si al ordenarlos por medio de la operación de conteo alterno, los objetos de las colecciones se agotan al mismo tiempo. Es decir, las dos colecciones comparadas son equipotentes puesto que tienen la misma cantidad de elementos o el mismo cardinal[32].

Después de haber clasificado los objetos y creado una operación lógica para comparar colecciones, el hombre puede ahora clasificarlas por el "*número de objetos*" que cada una contenga. Así podrá crear la colección $C\varphi$ de todas las colecciones que contengan un objeto. De igual manera, la colección $C\tau$ de todas las colecciones que tengan tres objetos, y así sucesivamente.

Actualmente, toda relación de equivalencia determina una partición del conjunto en clases, llamadas clases de equivalencia. La relación de equivalencia es una generalización

---

objetos de un segundo nivel de existencia lógica, donde los objetos son puramente abstractos y no interesa ninguna relación con las sustancias primeras. Pero un análisis más profundo conlleva a ver la abstracción de dicha analogía como objetivación de procedimientos mentales mediados por la operación de conteo alterno. Sería una idea trivial si se redujera simplemente a constatar la emergencia de la concepción de cardinal por biyección.

[31] A este respecto Piaget, citado en (Crump, 1993, pág. 41), argumenta que "un conjunto formado por elementos iguales solo son distinguibles por su posición, en cuyo caso los elementos pueden ser colocados en cualquier orden, con tal de que haya un orden y que permita que cada elemento sea contado una y sólo una vez. Este es […] 'un orden vicario', lo que significa que de dos elementos cualquiera puede ser el primero o el segundo, con tal de que siempre haya un primero y un segundo. En tal caso el orden puede dejarse a un lado y el significado de la correspondencia se hace ante todo cardinal, puesto que la equivalencia entre los conjuntos puede ser establecida independientemente del orden". Obsérvese siempre la necesidad y la importancia de la existencia de una función ordenadora en el conjunto, para luego llegar a la conceptualización del número como cardinal, es decir como una propiedad de un conjunto de tener *x* cantidad elementos.

[32] Dedekind en la definición 161, define *número cardinal* como el número *n* que determina *cuántos* elementos están contenidos en el conjunto.

de la idea de igualdad, es solo ver un aspecto en el que dos objetos o dos cosas cualesquiera son iguales. El conjunto de clases de equivalencia determinado sobre U por la relación ~ se llama conjunto cociente de U por ~ y se denota U/~.

$$U/\sim\ = \{[[a, b], [p, k], [m, n], \cdots], [[c, d, e], [r, t, i], \cdots], [[g], [h], \cdots], \cdots \}$$

De esta forma pasa al tercer nivel de abstracción. Donde *reconoce colecciones Universales* o, dicho modernamente, una relación de equivalencia que se establece sobre un dominio previo, permite obtener un objeto o entidad nueva en un nivel de existencia superior. Este objeto es la forma de la cual participan objetos del dominio anterior que pertenecen a la misma clase de equivalencia, y comúnmente se lo designa como *representante de la clase*, que finalmente serán los números naturales: representantes de clases de equivalencia de colecciones. La unicidad de este representante está garantizada por la existencia de una función biyectiva entre las colecciones y la clase de equivalencia.

Así, la colección $C\tau$ será el representante de todas las colecciones que tengan tres objetos, la colección $C\varphi$ el representante de todas las colecciones que contengan un objeto, y así en adelante.

$$U/\sim\ = \{[[g], [h], \cdots],\ [[a, b,], [p, k], [m, n], \cdots], [[c, d, e], [r, t, i], \cdots], , \cdots \}$$

$$C\varphi = [\vert] \qquad\qquad C\alpha = [\vert, \vert] \qquad\qquad C\tau = [\vert, \vert, \vert]$$

Finalmente, los números abstractos $C\alpha$, $C\tau$, $C\varphi$,... comparten una existencia lógica de segundo orden, a la manera de Gardies (2004).

2.2 El número natural y su representación auditiva

Según el enfoque ontológico logicista de Gardies (Arboleda, 2006), la existencia de objeto, en este caso del número natural, se reduce en última instancia a una existencia lógica. Tales o cuales objetos, por ejemplo de la aritmética, existen en tanto el matemático les asigne un nombre propio o argumente sobre ellos mediante predicados. En este caso el hombre hace uso del lenguaje de manera nominal y la existencia del objeto se reduce a una existencia lingüística. De aquí que "el número, como un concepto abstracto, no puede existir sin los numerales, en el sentido de palabras que representan diferentes cantidades numéricas. En otras palabras, un léxico numérico es esencial para cualquier conceptualización del número" (Crump, 1993, pág. 65). Investigaciones recientes en los indígenas Pirahã de la Amazonía brasilera muestran que se les dificulta contar más allá de tres por la falta de palabras para designar números mayores (Gordon, 2004).

Una forma de proceder en la creación de un léxico numérico es asignar nombres elementales e independientes a un pequeño grupo de números y construir todos los otros nombres de los números combinando esos nombres. Pero para que este sistema responda a las exigencias prácticas es necesario escoger la cantidad de nombres elementales en función de los usos de la vida cotidiana, donde cada número estaba cargado de significación cultural[33].

Otra característica de los sistemas de denominación es que hay que hacer que los morfemas primarios no sean muchos, para evitar esfuerzos de la memoria muy importantes, pero también que éstos no sean muy pocos, para no recurrir muy temprano a nombres demasiado compuestos y asegurar la economía máximal del sistema reduciendo el tamaño de su vocabulario y el número de sus reglas. Además de buscar la economía de la comunicación reduciendo la longitud de las expresiones numéricas (Cauty, 2000). Indudablemente, debió pasar mucho tiempo para que el hombre depurara la cantidad de nombres de números que definirían más adelante la base del sistema de denominación y de numeración. Tema sobre el que se volverá en el parágrafo 2,4. Finalmente, se asocia a cada nombre un símbolo; es decir, otro nombre sin contenido fonético particular, consistente en un signo (Panza, 2007).

En la historia de la humanidad, diferentes sistemas de denominación de los números fueron adoptados, respondiendo más o menos a estas exigencias y a estos principios, dando así existencia lingüística a los números naturales. Teniendo en cuenta, claro está, que esto

[33] Para literatura más completa sobre la relación número y cosmovisión, véase (Urton, 1997); (Zaslavsky, 1999); (Ochoa & Peláez, 1995); (Keller, 2000); (Crump, 1993).

no pudo realizarse de manera aislada de lo tratado en el parágrafo 2.1. Aquí se ha separado solo para efectos analíticos.

El procedimiento de creación de numerales mencionado anteriormente se puede rastrear en los sistemas de denominación de los Incas, Mayas y Yorubas siguiendo el método establecido por (Salzmann, 1950), que se basa en tres patrones estructurales generales.

El primero de éstos, el *patrón marco*, que se refiere al conjunto de morfemas numéricos independientes. Términos que constituyen la base lingüística de los *sistemas de denominación* creados por cada una de estas comunidades tradicionales, tomando palabras de su lengua local. Los morfemas primarios de los números cardinales de los Incas, Mayas y Yorubas están dados en la tabla 2-1

Cardinales Incas	Cardinales Mayas	Cardinales Yorubas
1. uj	0. xixim	1. okan
2. iskay	1. hun	2. eji
3. kinsa	2. caa	3. eta
4. tawa	3. ox	4. erin
5. phishqa	4. can	5. arun
6. suqta	5. hoo	6. efa
7. qanchis	6. uac	7. eje
8. pusaq	7. uuc	8. ejo
9. jisqon	8. uaxac	9. esan
10. chunka	9. bolon	10. ewa
100. pachaq	10. lahun	20. ogun
1000. waranqa	11. buluc	30. ogbon
	12. lahca	200. igba
	13. oxlahun	400. irinwo
	14. canlahun	
	15. hoolahun	
	16. uaclahun	
	17. uuclahun	
	18. uax	
	19. bolonlahun	

Tabla 2-1**.** Los morfemas numéricos de los Incas, Mayas **y** Yorubas

El segundo, el *patrón cíclico*, se refiere a las potencias sucesivas de una base numérica determinada que pueden ser expresadas en palabras. Obsérvese la tabla 2-2

Potencias de 10 Incas	Potencias de 20 Mayas	Potencias de 20 Yorubas
10 chunka 100 pachaq 1000 waranqa	20 hunkal 400 hunbak 8000 pic	20 ogun 400 irinwo

Tabla 2-2**.** Potencias cíclicas

El tercer patrón, *el patrón de morfemas operativos*, no es del mismo orden que los dos precedentes, es más un criterio de trabajo adicional que tiene que ver con la yuxtaposición de los morfemas en términos de las operaciones aritméticas básicas como la adición, sustracción, multiplicación, etc. La tabla 2-3 expone el patrón operativo de los morfemas básicos para la creación de números compuestos en las tres comunidades tradicionales anteriormente mencionadas.

Número	Operación aritmética Inca	Operación aritmética Maya	Operación aritmética Yoruba
11	10+1 chunka ujniyuq		10+1 ookan laa
13	10+3 chunka kinsayuq		10+3 eeta laa
15	10+5 chunka phishqayuq		20-5 eedogun
20	2x10 iskay chunka	20 hunkal	20 ogun
21	(2x10)+1 iskay chunka ujniyuq	1+20 huntukal	20+1 ookan le logun
105	100+5 pachaq chunkan	5+5x20	(20x6)-10-5 aarun din laadofa
315	(3x100)+10+8 kinsa pachaq chunka phishqayuq	15+15x20	400-(20x4)-5 orin din nirinwo odin marun
4000	4x1000 tawa waranqa	10x400	2x2000 egbaawaa

Tabla 2-3. Operaciones aritméticas en la composición de números

De acuerdo a lo anterior, se encuentra que el sistema de denominación Inca y Maya guardan cierta regularidad, mientras que el sistema de denominación Yoruba, de acuerdo a Armstrong (1963) puede describirse como “vigesimal con complicaciones”, donde la complejidad aumenta cuando se procede más allá de 200. Dicha complejidad y el resultado impredecible del sistema son el resultado de, entre varios factores, que los patrones de suma y substracción en los números más altos difieren de aquéllos encontrados en los más bajos del sistema. Como Armstrong señala, la complejidad del sistema fue probablemente el resultado de la expansión de un sistema más simple con el propósito de acomodarlo al conteo de conchas[34] en las operaciones comerciales. De manera similar sucedió en los Mayas donde las potencias de la base 20 fueron modificadas para satisfacer las necesidades del cálculo del tiempo y de las observaciones astronómicas[35].

El patrón de *morfemas operativos* señalado arriba deja ver una alta complejidad en el uso de operaciones pre-aritméticas, aún en lenguajes como el Yoruba que no tenía una representación escritural para los numerales, como sí lo tenían de alguna manera los Incas y Mayas; esto se tratará en el parágrafo siguiente. Cabe entonces preguntar: *¿detrás de un acto lingüístico hay una pre-aritmética?* La respuesta basada en los trabajos antropológicos y lingüísticos de (Armstrong, 1963), (Zaslavsky, 1999) y (Urton, 1997) señalan que sí y se consolidan como una prueba de la existencia de una pre-aritmética movilizada por medio de palabras de la lengua local con la que se designaban los números y se componían para formar numerales de números mayores. Y puesto que la aritmética tiene que ver con los números, más que con los numerales que denotan los números, es claro que la existencia objetiva de los números no tendría condiciones de posibilidad sin los numerales, en este caso auditivos, que emergen en el vocabulario de las comunidades

---

[34] La pre-aritmética Yoruba estaba presente en los procesos de intercambio o de mercadeo. Éste se hacía con conchas como moneda. Éstas eran agujereadas y enlazadas, generalmente, en cadenas de 40 conchas, llamadas *galinhas*. Después su nombre fue aplicado a un manojo de cinco cadenas, o 200 conchas. Éste cambio se debió a la devaluación de las conchas en términos de su poder de compra (Zaslavsky, 1999). La siguiente tabla muestra las equivalencias:

ogoji	cadena	40 conchas
ogwao	manojo (cinco cadenas)	200 conchas
egwegwa	cabeza (cien manojos)	2000 conchas

[35] Los sacerdotes Mayas modificaron las potencias sucesivas del sistema vigesimal: 20^0, 20^1, 20^2, etc, por 20^0, 20^1, 18^2 respondiendo a necesidades astronómicas (Ifrah, 1987)

tradicionales, movilizados por problemas ya sea económicos, astronómicos, o de organización social.

Y todo esto apunta a consolidar el sistema de denominación de los numerales como una tripleta que comprende un vocabulario terminal, un conjunto de reglas de composición sintáctica y un conjunto de reglas semánticas (Cauty, 2000), que más adelante hará parte de una estructura mayor llamada sistema de numeración, en la búsqueda de una existencia objetiva de este último, o dicho de otra manera, en la consolidación del sistema de numeración como objeto matemático.

2.3 El número natural y su representación visual

Continuando con el problema de la objetividad del número natural, ahora referido a las designaciones visuales del número, tales como representaciones pictográficas e icónicas creadas por las comunidades tradicionales -dejando de lado, pero sin desconocer su importancia, a aquellas que designan al número por medio de partes del cuerpo, guijarros, piedrecillas, trazos en huesos, etc.- que en occidente no son reconocidas como escritura por una tendencia eurocentrista que define la escritura como *el lenguaje hablado que es registrado o referenciado fonéticamente por marcas visibles*, donde los pictogramas e íconos se ubican en el surgimiento de ésta o simplemente quedan por fuera.

De acuerdo a la anterior definición de escritura, las comunidades tradicionales son calificadas con adjetivos peyorativos como: iletrados, término que implica que las culturas tradicionales carecían de escritura, y esto era la causa de que fueran culturalmente deficientes; o el término pre-letrado, lleva consigo una idea evolutiva, donde la humanidad está caracterizada por el hecho de que en algún momento de su desarrollo "escribirá". De donde se deduce que la meta cultural de la humanidad es llegar a la escritura, y que muchas comunidades tradicionales no alcanzaron dicha meta. (Boone, 1994)

Una visión más amplia de escritura, como la presentada por Sampson (1990) se basa sobre el uso estructurado de convenciones: "La escritura es como un lenguaje que es capaz de comunicar el significado por medio de estructuras de símbolos definidas por sus interconexiones” (1990, pág. 12). Y el significado de los símbolos o la escritura puede ser comprendido por aquellos quienes han aprendido las convenciones (o la gramática) para interpretarlos. De acuerdo a esta definición, Sampson presenta dos clases de escritura. La primera que él llama: sistema glotográfico que representa la escritura de la lengua hablada; en la cual se basa la definición tradicional eurocentrista de escritura. La segunda, sistema semasiográfico; el término combina la palabra griega *semasia*: que significa “significado” con un “gráfico”. Sistema gráfico de comunicación donde las marcas comunican significado directamente y con la estructura de su propio sistema. Este último se divide en dos categorías: a) convencional, donde el significado es indicado por las interrelaciones de los símbolos que son codificados arbitrariamente. La notación matemática es un ejemplo de tal sistema de convenciones. b) icónico, donde hay generalmente una relación natural entre la imagen y su referente.

Bajo esta clasificación es posible categorizar los jeroglíficos Mayas y los íconos Incas como una mezcla entre sistemas semasiográficos y glotográficos. Los Mayas empleaban un sistema jeroglífico mezclado: una combinación entre logogramas representando palabras enteras, signos fonéticos y calificadores semánticos, que en conjunto reproducen un texto verbal, y los glifos individuales organizados para ser leídos en un orden. De otra parte, en los Incas, no es conocido ningún componente fonético en el Quipu, y por esto ha sido excluido de la familia de sistemas de escritura. Pero, la inhabilidad de descifrar este instrumento mnemotécnico no invalida verlo como un sistema de escritura semasiográficamente. La información abstracta del Quipu a través de colores, textura, forma y tamaño de las cuerdas y los nudos, su lugar relativo lleva a pensar que el Quipu no era solamente un sistema de notación matemática, por ejemplo ver (Ascher & Ascher, 1997); (Radicati Di Primeglio, 1979), es posible, dice Urton (2005) que el Quipu haya tenido alguna funcionalidad escritural, distinta a la matemática, es decir, que pudiera registrar el lenguaje hablado.

Desde este punto de vista, los íconos representados por nudos en el Quipu Inca y los pictogramas diseñados en los códices Mayas ganan el estatus de escritura. Pero, tal y como señala Gardies (2004), la designación escritural del número no garantiza su existencia puesto que es necesario incorporarlo a una estructura lógica matemática, no solo lingüística. Es el caso del cero, que aún gozando de una designación oral y escritural en los Incas, no era considerado un número. En el Quipu se le representaba por la ausencia de nudos en una determinada posición a lo largo de la cuerda o bien por una cuerda sin nudos. Es decir, antes de haber podido establecer la plena legitimidad, la posibilidad de existencia de su objeto, ya se operaba con él. Pero la imposibilidad iba más allá de lo estructural, era una cuestión filosófica sobre los números. Estos eran caracterizados por su capacidad de "posesión", pero el cero o nada, no puede poseer algo, por definición el cero no puede ser un número para los Incas (Urton, 1997). Este tipo de acciones de la libre invención del matemático es lo que se conoce como la teoría leibniziana de los *pensamientos ciegos*[36]. Por tanto, se puede considerar a los naturales como una invención desde el punto de vista de su representación *n*. Pero en cuanto se expone siglos más adelante las leyes de la estructura de $\mathbb{N}$, éste se impone con la axiomática de Dedekind-Peano, la cual permite descubrir la realidad profunda de $\mathbb{N}$ y comunicarla a los matemáticos del mundo, convirtiéndose entonces en un descubrimiento, es decir algo externo a nosotros -que habita en la tradición cultural (White, 1982)- frente a lo cual se dispone de mínimas posibilidades de escogencia.

[36] Es posible reconocer al matemático el derecho, en ciertas condiciones al menos, de crear signos y operar sobre ellos sin tener necesariamente asegurada la existencia del objeto, o de al menos sin haber identificado inicialmente la naturaleza del objeto. Este es el sentido de la teoría leibniziana de los *pensamientos ciegos*, signos sobre los cuales se puede operar así no se conozca el objeto. El caso de los complejos es efectivamente un ejemplo elemental, donde no es difícil reconocer la libertad del matemático para inventar signos y operar con ellos combinando números reales e imaginarios, en los procedimientos operatorios empleados sin ningún prejuicio por Euler en álgebra y cálculo infinitesimal, o en los trabajos de Argand, Gauss y Cauchy sobre la representación geométrica de las entidades $x + iy$. Esta libertad se limita a medida que los matemáticos, se habitúan a tratar las entidades $x + iy$ como pares ordenados de números reales (x, y) , y se reconocen en la tradición de Hamilton de formalizar las operaciones de adición y multiplicación entre los elementos del nuevo dominio, en términos de propiedades estrictamente lógicas de la estructura de un cuerpo algebraico C. (Arboleda, 2007)

2.4 Las operaciones y la base

Como se ha presentado en los parágrafos anteriores, la construcción del número parece contenerlo todo al mismo tiempo: orden y operaciones. En la construcción del número como ordinal se deja entrever la idea de orden inducido por la operación de conteo alterno y posteriormente el principio de recurrencia que permite ir agregando un elemento a la vez a la serie numérica, siendo ésta la primera y más simple operación que se define en los naturales.

> La aritmética elemental surge de la construcción de los números ordinales y cardinales; el paso sucesivo de un término de la serie de los números enteros absolutos al inmediatamente siguiente es la primera y más sencilla operación de la aritmética; sobre ella se fundan todas las demás. Si se reúnen varias realizaciones de esa operación elemental en único acto, se alcanza el concepto de adición. Partiendo de éste se construye de forma similar el de multiplicación y a partir de éste el de potenciación. (Dedekind, 1998, pág. 51)

Posteriormente, en el parágrafo 2.2, se presenta la habilidad del hombre para construir una pre-aritmética que hacía uso de las operaciones adición, sustracción y multiplicación, movilizada por medio de palabras de la lengua local con la que se designaban los números y se componían para formar numerales de números mayores, como lo ilustra la tabla 2-3. Pero este es un estado avanzado de dichas operaciones que de alguna manera respondían a una estructura, es decir a unas propiedades lingüísticas y pre-aritméticas, todo esto apoyado por la operación lógica de conteo alterno. Y de alguna manera esta pre-aritmética respondía a la definición de Gardies sobre el cálculo.

> Calcular es sustituir un razonamiento directo sobre las cosas por una operación sobre los signos. Que esos signos sean simples fichas o piedras o que ellos sean ya de naturaleza propiamente escritural (Gardies, 2004, pág. 75) Traducción libre.

Panza (2007) presenta una explicación de cómo pudo haber sido este proceso lógico de la creación de las operaciones, con el uso de la operación conteo alterno: supóngase que se tienen dos colecciones de trazos verticales C_α y C_β, cuyos cardinales son α y β

respectivamente, como se definió en 2.1. Se definen las operaciones[37] entre números cardinales de la siguiente manera:

Se llama ‘*adición*’ a la operación que asocia a las colecciones de trazos verticales α y β con la colección de trazos verticales contenidos en esas colecciones. Puesto que α y β son números, su adición se denota por ‘α + β’, y se llama *suma de α y β* al resultado de la realización de la adición de α +β.

Lo anterior se ilustra así:

Sea α = {|,|} y β = {|,|,|}, α + β = {|,|,|,|,|} ó {|,|}; {|,|,|}

↓↓ ↓↓↓

{|,|, |,|,|}

La multiplicación se define de manera similar. Se llama ‘multiplicación’ la operación que asocia las colecciones de trazos verticales α y β con la colección de trazos verticales contenidos en las colecciones de trazos verticales que pertenecen a la colección de colecciones de trazos verticales, todos iguales a α (es decir, las repeticiones de la colección α), y que está en biyección con β. Si α y β son números, su multiplicación se denota por ‘α * β’ y se llama *producto de α y β* al resultado de la multiplicación de α * β.

Lo anterior se ilustra así: Sea α = {|,|} y β = {|,|,|};

α * β = {|,|} * { |, |, | }

↓ ↓ ↓

{|,|} + {|,|} + {|,|}

↓↓ ↓↓ ↓↓

{ |,| |,| |,| }

O bien,

{|,|}*{|,|,|}= { |,|, |,|, |,| }

[37] Dedekind (1998) define las operaciones básicas de suma, multiplicación y potenciación para los números ordinales en las definiciones 135, 147 y 155.

La aplicación de estas operaciones se refleja en la definición de la base para los sistemas de numeración. Como se presenta en el capítulo 1, la base del sistema de numeración Yoruba era 20, de los Mayas era 20, y de los Incas 10. Para Keller este fue un avance notable en el camino hacia la constitución del sistema de numeración como objeto matemático, puesto que se introduce un principio interno y multiplicativo al desarrollo de la serie numérica.

> El nuevo hallazgo, revolucionario; fue considerar una multiplicidad como una nueva unidad, e introducir así un principio interno y multiplicativo de desarrollo de la colección modelo… Esa es la esencia del cálculo, y la posibilidad teórica de una definición puramente interna del número, que excluye la etapa anterior. (Keller, 2000, págs. 28-29) Traducción libre.

El proceso se explica de la siguiente forma: el hombre inicialmente tenía una serie numérica bastante pequeña, uno, dos, muchos; posteriormente ayudado por la operación lógica *principio de recurrencia*[38] que le permite agregar un elemento a la vez a la serie numérica (en 3.2 se vuelve sobre este punto), y por sus antiguas herramientas de conteo: piedras, palillos, marcas sobre hueso, las partes del cuerpo, etc., las palabras de la lengua local y la operación de conteo alterno, la serie se fue haciendo mucho mayor, pero siempre llegaba al punto en que había que buscar más elementos físicos para continuar el conteo, ya los dedos de las manos y los pies no eran suficientes, las partes del cuerpo se agotaban rápidamente.

El problema que surge es ¿qué hacer para contar cantidades finitas suficientemente grandes para las cuales los recursos físicos sean inmanejables? El hombre resuelve este problema considerando una multiplicidad como una unidad de orden superior**,** donde los

---

[38] Si el sujeto tiene una idea del principio de recurrencia, surgen entonces algunas preguntas:, ¿no cuenta con una cierta conciencia de la propiedad de inducción? ¿no se puede prever que si una colección tiene el orden de los ordinales naturales finitos, se puede disponer del siguiente para cualquier *n*, aunque este siguiente no exista? ¿No será esta conciencia la que mueve al sujeto a buscar un referente físico para ese siguiente? Una posible respuesta a estos interrogantes, que funge como hipótesis de trabajo, es que las comunidades si lograron verificar la propiedad inductiva de dado un n es posible construir $n+1$ para colecciones finitas apoyado en el principio de recurrencia, pero para colecciones infinitas no es posible saberlo, pues no se cuenta con información sobre el infinito en estas comunidades. Esta problemática se amplía más adelante en el parágrafo 3.2

números que conoce se agrupan para formar multiplicidades, que le ayudarán a formar una nueva unidad, y a su vez nuevos números.

El número pasa de la biyección a una nueva etapa donde los dedos de la mano que servían para contar hasta cinco, ahora eran una mano, pero ***una*** en una unidad superior; seis será entonces ***una*** mano y un dedo, ***dos*** manos y ***dos*** pies un hombre. Así mismo, se crean nuevos números apelando al nuevo *principio multiplicativo*, ***tres*** manos para 15, ***cinco*** hombres para 100. Y el cálculo de las multiplicaciones como sumas repetidas, ***tres*** manos = l5, solo es posible a partir de la herramienta de *conteo alterno* en relación con la serie numérica.

$$\underbrace{1, 2, 3, 4, 5}_{\substack{\downarrow \\ 1}} \qquad \underbrace{1, 2, 3, 4, 5}_{\substack{\downarrow \\ 1}} \qquad \underbrace{1, 2, 3, 4, 5}_{\substack{\downarrow \\ 1}} \quad = \quad \text{tres manos}$$

Pero, inicialmente para realizar el cálculo de éstas, se debía hacer lo siguiente:

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 6, & 7, & 8, & 9, & 10, \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 11, & 12, & 13, & 14, & 15 \end{array}$$

La base surge entonces como solución al problema: *la multiplicidad como unidad*, pero la unidad no se veía como multiplicidad, la unidad era indivisible. Finalmente, el problema de las limitaciones físicas del hombre de alguna manera hizo surgir la base. Los Yoruba por ejemplo contaban conchas de la siguiente manera:

> "Primero el saco de 20.000 conchas se vacía en el piso. El contador de conchas se arrodilla o se sienta al lado del montón y organiza rápidamente cuatro grupos de cinco para hacer una pequeña pila de veinte. Cinco veintes se combinan en una pila de cien, y entonces dos centenares se juntan para formar la importante unidad de doscientos" Mann, citado en (Zaslavsky, 1999, pág. 209) Traducción libre.

“Lo importante es que ahora se puede hablar de un conjunto autónomo de números gracias al cálculo, que permitió pasar de la simple extensión aditiva de la serie numérica a verdaderos *sistemas de numeración”* (Keller, 2000, pág. 32).

El capítulo siguiente analiza la emergencia de la noción primigenia de orden, tomando en cuenta fenómenos naturales y sociales de la comunidad Inca.

Capítulo 3. Una referencia empírica del orden

Introducción

En este capítulo se trata el surgimiento de la noción de *orden*, desde un enfoque fenomenológico donde el conocimiento deja de ser visto como un producto externo que debe ser apropiado por los individuos, pasando a ser comprendido como una interpretación que los sujetos hacen del mundo por medio de actos intencionales que apuntan al concepto, en una dialéctica continua con su entorno social, cultural e histórico. Es decir, el conocimiento es producido desde el sujeto en sus interrelaciones con el mundo.

Posteriormente, se muestra el proceso de extrapolación del orden de secuencias ordinales a secuencias de cardinales, y a lo largo del capítulo se observa de manera clara la estructura de orden que subyace a cualquier secuencia ordenada, como un invariante cultural.

Así mismo, se busca indagar en las culturas antes mencionadas, si estuvo a punto de establecerse algún tipo de pensamiento sobre una relación inductiva de dado un n natural, si una propiedad P se cumple para n, entonces se cumple para n+1, o si se estableció, así sea de manera empírica, dicha relación.

3.1 Origen fenomenológico de la noción de orden

Contenido perceptual

En este apartado se presenta una discusión de la *ontogénesis naturalista* de la noción de *orden*, a partir de dos explicaciones antropológicas. La primera tiene sus orígenes en la noción de tiempo (Crump, 1993); la segunda se basa en la idea de un fenómeno que depende del tiempo: la reproducción (Urton, 1997).

De acuerdo a la primera explicación, el orden entre elementos, de naturaleza cualquiera, de un conjunto se presenta siempre que hay un antecesor y un sucesor en una sucesión y "cualquier principio que dependa del tiempo[39] tiene un orden inherente, puesto que, dados dos instantes cualesquiera de tiempo, uno debe preceder al otro". (Crump, 1993, pág. 24). Y esto lo saben muy bien los Yoruba de África, que organizan el tiempo no haciendo uso de los números, sino de eventos, ellos desarrollaron calendarios que podrían llamarse *calendario de fenómenos*. Por ejemplo, el actual número de días de un año es irrelevante, puesto que éste está compuesto de eventos, así un año podría tener 350 días mientras otro año 390 (Zaslavsky, 1999). De aquí surge pues, según Crump, la intuición naturalista de orden: una relación biunívoca entre un evento natural y una posición en una secuencia que se va ordenando de acuerdo al orden impuesto por el tiempo.

La segunda explicación se basa en la posibilidad de crear sucesiones ordenadas, ya sean numéricas o no, apoyándose en la fuerza natural de la reproducción: "...,La fuerza motivadora primaria, es decir, la fuerza que aporta elementos secuenciales en una serie ordinal en el ser y dirige la actividad clasificatoria y lingüística de nombrar los miembros en su orden jerárquico adecuado es la reproducción". (Urton, 1997, pág. 70). Traducción libre.

Urton presenta varios ejemplos donde se puede contemplar el papel que juega la reproducción como fuerza natural que se convierte en catalizador y generador de situaciones que fuerzan al ser humano a generar formas de designación para la posición de un objeto en una sucesión ordenada, en este caso no numérica. Los ejemplos que ilustran este hecho, como es de esperar, están íntimamente relacionados con la naturaleza.

[39] El tiempo en las comunidades tradicionales no goza de la continuidad a la que el hombre moderno está acostumbrado. "La continuidad del tiempo es una abstracción, nada más que una deducción indirecta a partir de la experiencia" (Crump, 1993, pág. 142). El tiempo es entonces para las comunidades tradicionales una sucesión discreta de acontecimientos sucesivos que no se solapan, como lo ejemplifica la sucesión de los días, donde la noche separa cada día del siguiente (Zaslavsky, 1999)

El primero de ellos tiene que ver con la construcción de corrales en la cultura Inca para la descendencia de los animales. Se construye un corral grande donde se lleva todo el ganado, al cual se le llama *mama kancha* o también designado como *uj kaq kancha* o primer corral, posteriormente, después de reproducirse dicho ganado eran separados, para lo cual se construía un segundo corral o *iskay kaq kancha*, para los machos adultos; un tercer corral o *kinsa kaq kancha* para las hembras jóvenes; y un cuarto corral o *tawa kaq kancha* para los machos jóvenes. Así cada uno de los cuatro corrales contiene un miembro, o tipo, de un conjunto reproductivo. Un segundo fenómeno, la reproducción humana, para la cual de manera similar existen palabras para designar la *mama, el primer hijo, el segundo hijo, etc.*

Un tercer fenómeno que motiva al hombre a reconocer secuencias ordenadas no numéricas en su entorno tiene que ver con el maíz, planta que era la base de la alimentación Inca y Maya, además de ser un dios en la mitología de las culturas de Centroamérica. Las mazorcas, como son llamados los frutos de esta planta, brotan en un orden dado por la naturaleza y que el hombre Inca designa con palabras de su lengua local: Aymara o Quechua. Figura 3.1. La primera mazorca que brota es llamada *mama*, la segunda es llamada *apaña*- que en lengua Aymara de Bolivia, significa hermano, hermana quien es nacida inmediatamente después del primer hijo- la tercera: *iskay apaña* y la cuarta: *kinsa apaña*. (Urton, 1997). Esta organización goza de la propiedad de que la primera: *mama* es mayor (cronológicamente) que la segunda: *apaña*, y apaña es mayor (cronológicamente) que *iskay apaña.* En consecuencia *mama* es mayor (cronológicamente) que *iskay apaña.*

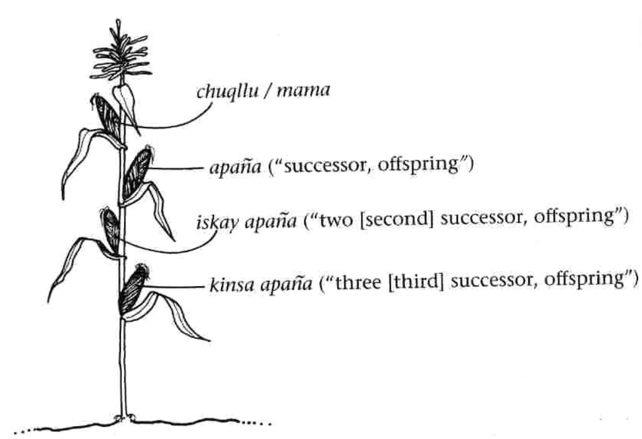

Figura 3.1. El "orden de nacimiento" y el nombramiento de las mazorcas de maíz (Urton, 1997, pág. 86)

De los ejemplos anteriores se puede observar una relación explícita entre el tiempo y los fenómenos que dependen de él: la reproducción de animales, humanos o plantas y la designación de números en la generación de una secuencia ordinal. Es importante enfatizar que hay una clara relación causal entre estas dos series. Esto es, los numerales ordinales no causan la reproducción de animales, humanos o plantas; por el contrario, la fuerza reproductiva de estos es la causa, o la motivación de la generación de secuencias numéricas ordinales. (Urton, 1997)

De lo anterior, surge el interrogante: ¿cómo se define quién es el primero y cómo se puede generar el segundo? Una plausible respuesta a dicha pregunta, de acuerdo al principio de reproducción, es que el *primero* siempre será considerado como *mama* o madre en español, y el *segundo* será generado a partir de éste, al igual que la idea de Euclides de generar los números a partir del uno[40]. Es decir, la madre es el primer elemento que tiene la fuerza y la capacidad para generar no solo el *segundo*, sino también el *tercero* y el *cuarto*…

Las dos explicaciones presentadas anteriormente, la de Crump y la de Urton, se enmarcan en un enfoque determinista, es decir que se basa en la causa-efecto y sostiene que nuestra vida está regida por circunstancias que escapan a nuestro control de modo que nadie es responsable de lo que hace o deja de hacer. Desde el punto de vista humano, el determinismo sostiene que no existe el libre albedrío, de tal manera que se niega la participación del sujeto en la construcción de los números ordinales. Esta posición filosófica de la teoría del conocimiento va en contravía de la postura asumida en el capítulo 2, sobre las matemáticas: "… Estas teorías fueron construcciones hechas por individuos, que respondían a *actos intencionales* en contexto, fines y propósitos que tenían su objetivo en su momento histórico". Obviamente hay una fuente naturalista en la conformación de la secuencia ordinal, como se presentó anteriormente. Pero, el mundo perceptual no le permite al sujeto aprender o capturar de manera completa la estructura lógica de los

[40] En la nota 19 se analizó esta cuestión en detalle.

fenómenos (Husserl, 1969). Es a través de actos intencionales del sujeto frente a las diferentes y diversas vivencias que el sujeto llega a tener conciencia de la noción de la estructura de orden, subyacente a los fenómenos que dependen del tiempo.

Entonces esos actos no pueden ser de los sujetos independientemente de los objetos sobre los cuales se está trabajando, a los que el hombre se refiere por medio de un lenguaje que goza de cierta estructura lingüística, tal como se ilustró en el parágrafo 2.2; y en los ejemplos mencionados arriba, donde el sujeto apoyado por la generación de palabras a partir del lenguaje local se refiere al objeto.

En ese sentido la *intencionalidad* es, según Husserl (1969),

> "la peculiaridad de las vivencias de "ser conciencia de algo". Ante todo nos salió al encuentro esta maravillosa peculiaridad, a la que retrotraen todos los enigmas de la teoría de la razón y de la metafísica, en el cogito explícito: Una percepción es percepción de algo, digamos de una cosa; un juzgar es un juzgar de una relación objetiva; una valoración, de una relación de valor; un desear, de un objeto deseado, etcétera. El obrar se refiere a la obra, el hacer a lo hecho, el amar a lo amado, el regocijarse a lo regocijante, etcétera. En todo cogito actual, una "mirada" que irradia del yo puro se dirige al "objeto" que es el respectivo correlato de la conciencia a la cosa, la relación objetiva, etcétera., y lleva a cabo la muy diversa conciencia de él".

De esta manera, la intencionalidad se presenta en las vivencias, y la principal característica de las vivencias es que son conciencia de algo. Pero para que el sujeto pueda tener conciencia de algo depende mucho de cómo ese sujeto proyecte las cosas, de cómo haya podido organizar toda la información, perceptual, empírica en su conciencia, estructurarla y proyectarla. Ese es el sujeto que tiene un acto intencional sobre el objeto, pero ese es un estadio avanzado, no se podría pensar que en el acto primigenio de la constitución de objeto estuviera presente esa intuición en la mente del hombre. El sujeto que puede proyectar eso como un acto intencional tiene una conciencia que está estructurada complejamente a partir de una serie de pasos, pero no es un conocimiento en su mente sino en la experiencia del razonar que lo coloca en una situación particular en el acto de conocimiento.

Pero, a donde se quiere llegar no es a afirmar que hay actos intencionales en la construcción del objeto en la conciencia del sujeto, sino de explicar cómo es que opera este acto. Por ejemplo: La estructura de las sucesiones de percepciones mentales sobre los naturales tiene como componente central la noción de iteración o sucesión:

$$\left(\left((\mathrm{I})_{S_1}\ \mathrm{I}\right)_{S_2}\ \mathrm{I}\right)_{S_3}\cdots$$

De esta manera, intuir un número natural es reiterar este proceso recorriendo la sucesión hasta *n*. Esta es la idea husserliana de “realización de intenciones” y se explica como procesos de verificación:

a) Verificar para un “objeto” consiste en exhibirlo mediante una sucesión de actos mentales.

b) O en términos de cuantificación, verificar la conciencia de *existencia*. Por ejemplo, verificar la existencia del número 3 es realizar la iteración del proceso hasta exhibir el número 3. (Arboleda, 2008)

Contenido lógico

La atención se centra ahora en analizar las trazas lógicas de la existencia de una propiedad primigenia concebida por las comunidades tradicionales a partir de actos intencionales. Dicha propiedad es reiterativa y por efecto de su reiteración continua en la experiencia, que va dando lugar a una regularidad que es tomada como cierto principio lógico abstracto implícito, que no se formula formalmente en el lenguaje, y que se “funda” en intuiciones del objeto de nivel inferior, en fenómenos naturales y sociales. Estas intuiciones juegan un papel importante en la intuición de los objetos matemáticos. (Arboleda, 2008)

Dicha propiedad lógica, es aquella que en la actualidad, se conoce como propiedad transitiva, es decir: sean a, b y c elementos del conjunto A, entonces se cumple que: si $a\mathrm{R}b$ y $b\mathrm{R}c$ entonces $a\mathrm{R}c$. De lo anterior se deduce la existencia de, al menos, una relación de preorden, que es caracterizada por la propiedad transitiva, que las comunidades tradicionales conocían muy bien en hechos empíricos por medio de actos intencionales, pero no tenían una manera formal de designación de dicha propiedad que se ponía en juego en situaciones organizadoras de la vida: sucesiones no numéricas naturalistas como el crecimiento de las plantas, humanos, animales, entre otras[41].

En consecuencia, es posible formular la hipótesis de que la noción primigenia de preorden, en las comunidades tradicionales no se habría generado por un principio lógico a priori, sino por la percepción de fenómenos de la naturaleza que se traducen en experiencias de los individuos de dichas comunidades. Y que el concepto de ordinal estaría referido a la manera cómo las comunidades son conscientes de una estructura lógica subyacente, y generan palabras, utilizando el lenguaje local, para designar un término para aquello que aparece en un primer orden, en un segundo orden, un tercer orden, etc. Son culturas que estarían referidas muy al objeto, en el sentido que son naturalistas. De esta manera, el pensamiento del orden no puede solamente basarse en un principio lógico *a priori*. Las afirmaciones que establece el sujeto sobre las secuencias de ordinales se basan en la conciencia de que cierta clase de actos perceptuales empíricos son "verdaderos" en un sentido distinto a la verdad lógica. O sea que el pensamiento del número y el orden tiene fuentes empíricas no lógicas y fuentes lógicas, como se expresó en el capítulo anterior.

Ahora que se ha revelado el surgimiento empírico del preorden, caracterizado por la propiedad invariante transitividad, se hace necesario analizar la estructura lógica subyacente a las sucesiones ordenadas no-numéricas. Pero antes es pertinente estudiar un ejemplo artificial, no natural, en el sentido de que es una construcción de la mente humana, que no habiendo sido generado por un fenómeno natural equipado de la propiedad transitiva, fue dotado de ésta. Un caso en el que el hombre abstrae la estructura de preorden en relación a unas tematizaciones previas y la extrapola a sucesiones no naturalistas, pero tampoco numéricas. Esto se advierte en la construcción del Quipu[42], para lo cual se

[41] Más ejemplos de sucesiones no numéricas naturalistas en la comunidad tradicional Inca pueden encontrarse en (Urton, 1997)

[42] La palabra Quipu en la lengua quechua significa nudo, y era utilizado por los Incas para registrar

utilizaban dos elementos: cuerdas de lana de llama u oveja y colores. Estos últimos representaban los objetos registrados según cada Quipucamayo[43], por ejemplo: el amarillo para representar el maíz, el rojo para el fríjol, el negro para los hombres disponibles para la guerra, y así sucesivamente. Las cuerdas se dividían en tres clases: cuerda principal, cuerda pendiente y cuerda subsidiaria; las cuales servían para construir el Quipu. Éste era construido con una cuerda principal, más gruesa que las demás, en el *primer nivel*, las cuerdas pendientes se ataban a la principal, *segundo nivel*, y las cuerdas subsidiarias se ataban a las cuerdas pendientes, *tercer nivel*. Por tanto, el Quipu corresponde notoriamente a una organización jerárquica y al igual que en los ejemplos anteriores, se observa indudablemente que en la estructura organizadora del Quipu se puede especificar que la cuerda principal está en un nivel superior respecto a las cuerdas pendientes, y las cuerdas pendientes están en un nivel superior respecto a las cuerdas subsidiarias. Por tanto, se cumple que la cuerda principal está en un nivel superior a la cuerda subsidiaria. Figura 3.2.

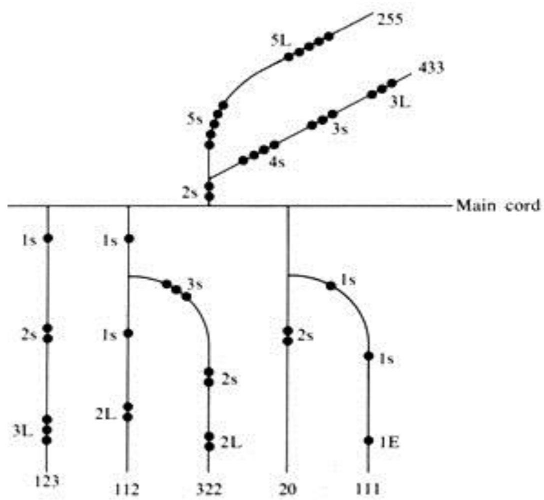

Figura 3.2 Jerarquización de las cuerdas del Quipu (Ascher & Ascher, 1997, pág. 31)

información numérica. Algunos autores expresan la idea de que en el Quipu, además, se registraban narraciones de acontecimientos. Por ejemplo, ver (Ascher & Ascher, 1997), (Urton, 1997), (Radicati Di Primeglio, 1979)

[43] Como era llamada la persona encargada de realizar los Quipus para el imperio Inca.

De esta manera la jerarquía es una herramienta conceptual creada por el hombre por medio de procesos empíricos más no naturalistas[44]. Una extrapolación del preorden subyacente en algunos fenómenos naturales a sucesiones no naturalistas, a la que se llega en un momento de constitución de la estructura secuencial en la conciencia, en la cual el sujeto no percibe, únicamente, el orden en función del tiempo. Parecería que de ello depende la capacidad de extender el orden a objetos que no necesariamente aparecen exhibiéndose en el mundo de la percepción. El mundo temporal de los sucesos vividos no permitiría percibir de manera completa la estructura secuencial, por ejemplo: en un problema básico y cíclico, al igual que la ordenación del día y de la noche, ¿cuál es primero, el día ó la noche? Realmente es un problema sin salida lógica. La solución a este problema cíclico se escapa al principio natural del tiempo, de un orden natural, y pasa a ser solucionado utilizando un criterio empírico que es producto de la conformación de normas sociales –lo cual muestra una alta capacidad de organización social de estas culturas– como lo es el principio de jerarquía, que en las comunidades tradicionales se basa en las creencias, es decir en el valor simbólico ancestral que las culturas otorgan al día o a la noche dentro de su cosmovisión, como sucede en la mitología Azteca: "... cuando vino a salir el sol, apareció muy colorado y como si se contoneara de una parte a otra; nadie lo podía mirar,.., después salió la luna" (Krickeberg, 1985, pág. 29)

De acuerdo a lo anterior, el principio del tiempo y la reproducción son principios naturales, mientras que la jerarquía es un principio social, que se legitima en la organización social y religiosa de la comunidad. En ese sentido la jerarquía adquiere cierto nivel mayor de complejidad, puesto que requiere un esfuerzo superior de abstracción. La jerarquía como principio ordenador de naturaleza social y cultural.

Es en eventos como el de la comunidad Azteca, que se puede apreciar el papel y la importancia de la cosmovisión, expresada en mitos o creencias, en la solución de problemas complejos como el ordenamiento de elementos a partir de un criterio claro.

[44] Entiéndase por proceso naturalista aquellos fenómenos naturales de los cuales el hombre no participa y por procesos empíricos aquellos donde el hombre experimenta con la naturaleza con una intencionalidad.

Finalmente, no es contradictorio decir que los objetos del mundo de los fenómenos organizados de acuerdo con el principio de reproducción o jerarquía dan surgimiento a la propiedad abstracta de preorden de las sucesiones no numéricas, y que esa propiedad abstracta se modela en fenómenos concretos del mundo físico; pero al mismo tiempo para estudiar esas propiedades como abstracción de ellas hay que tratarlas de manera estructural: conjuntos y relaciones entre conjuntos- de otra manera no será comprensible y se estará prisionero en el mundo de los fenómenos naturales. Es gracias a la capacidad del hombre de pensar que, necesariamente, lo lleva a niveles de abstracción que no se limitan al mundo natural.

Entonces al fin de cuentas se llega al punto de que independientemente de las condiciones que dieron origen a la estructura de preorden, lo que interesa ahora son las razones lógicas que la explican, como la propiedad transitiva, y que hace que ella sea transcultural y que esté presente en las comunidades tradicionales, como un invariante, dándole capacidad de organizar los fenómenos, que se organizan de una misma manera, independientemente del fenómeno, sin importar si se trata del crecimiento del maíz, reproducción de los animales, etc., siempre habrían ciertas formas de designación de objetos, un cierto lenguaje para designarlos, una manera de ordenar los que cumplen la propiedad transitiva y eso es en última instancia lo que se va a conocer como una propiedad lógica. Este recurso a la intuición no es necesario hoy en día porque disponemos de la lógica matemática.

3.2 Del orden de sucesiones no numéricas al orden de sucesiones numéricas

La cuestión ahora es explicar la forma en que la noción primigenia de preorden, atada a fenómenos del mundo material sensible referida a la organización de secuencias, se extrapola a los números cardinales por medio de sucesivas tematizaciones, pasando así a un nivel de complejidad mayor.

Debe tenerse en cuenta que los números ordinales tienen que ver, en esencia, con procesos lingüísticos, y es importante aclarar que los ordinales no son sustantivos, sino adjetivos que definen un orden de sucesión entre sustantivos de naturaleza cualquiera. Estos no tienen, por tanto, significado o función fuera del contexto concreto. No es posible hablar simplemente sobre el "decimocuarto" sin querer decir al menos "el decimocuarto algo".

El orden entre cardinales tiene que ver más con procesos aritméticos, como el conteo, aunque apoyado en procesos lingüísticos, empíricos más no naturalistas. Al contrario del ordinal que está muy relacionado con el naturalismo, como se ilustró en el parágrafo anterior, por medio del principio de reproducción. De donde se puede deducir que los ordinales gozan de un primer nivel de existencia lógica, puesto que son predicados de sustancias primeras. En este sentido es posible lanzar la hipótesis de que los ordinales anteceden al surgimiento de los cardinales, ya que estos últimos participan de un segundo nivel de existencia lógica, como se expuso en el capítulo 2.

De otro lado, antes de iniciar la reflexión sobre el paso del orden entre los ordinales al orden entre cardinales, es importante pensar en el énfasis que se ha venido haciendo en que fueron las experiencias de las comunidades viviendo estructuras jerárquicas de organización las que habrían originado una estructura de un preorden. De donde surge la pregunta: ¿Cómo se presenta en la vida y cómo se relaciona la jerarquía con el orden entre números? En la vida corriente una jerarquía organizacional es una manera de establecer criterios de autoridad o de lealtad o de filiación entre objetos de naturaleza cualquiera. Pero en los números, ¿cómo ella interviene en la acción de ordenar? Para esa actividad tan especial y particular como la de ordenar los números en las comunidades, la jerarquía tendría que ser interpretada no desde un punto de vista ético, moral, económico, social, sino de otra manera. Este es un asunto que se explica en un orden distinto al socio cultural.

Desde la visión moderna, el orden entre cardinales se entiende como una relación de conjuntos con conjuntos, entonces una estructura jerárquica no es más que una organización de conjuntos y entre ellos hay funciones de cierto tipo.

No es posible pensar que la misma estructura jerárquica se expresa de la misma manera para todas las actividades que ella está tratando de organizar, sean sustancias primeras o números, puesto que los objetos que organiza no comparten el mismo nivel de existencia lógica. Téngase en cuenta que se intenta construir una explicación en contextos socioculturales, que dé cuenta del proceso de descifrar cómo surge un pensamiento pre-matemático y cómo al intentar explicarlo se cae en la idea de entender de que en ese fenómeno culturalmente diverso hay una estructura que lo organiza, que lo hace independiente de las representaciones orales o escritas, y hasta de la cosmovisión. Lo que se conserva en ambos niveles de existencia es la estructura, en este caso la propiedad transitiva de la que están dotadas las sucesiones ordenadas, ya sean numéricas o no.

En particular, la estructura jerárquica cuando va a relacionarse con una serie numérica se debe estudiar como una relación entre conjuntos de una clase y conjuntos de otra clase. Entonces la madre con su "función reproductora"[45] es vista como parte de un conjunto al cual hay algo que la asocia por la reproducción de hijos. En las sucesiones numéricas es posible hablar de una función sucesor partiendo de 1, es decir una función que establece el orden entre conjuntos, en particular en el mismo conjunto.

Lo que en últimas se pretende es formular como hipótesis que el hombre a través de actos intencionales frente a las diversas vivencias relacionadas con procesos de reproducción, fue capaz de organizar esa información en su mente y en algún momento capturar en su horizonte de referencia algo muy parecido a la función sucesor.

Una explicación de este proceso lógico desarrollado por el hombre se presenta a continuación:

Se inicia, entonces, asumiendo que la figura 3.1 bien podría fungir la tarea de modelo natural de una función ordenadora. Ahora, teniendo ya establecido un modelo aunque sea en el mundo de lo material sensible, la pregunta que surge es: *¿en qué momento en la pre-*

---

[45] Dicha función reproductora de la que se habla, no cumple con las condiciones de las funciones matemáticas. Ésta más bien se puede expresar como una relación R: *ser madre de*, entre un conjunto A:{m} y B:{a, b, c}, por tanto R={(m, a); (m, b); (m, c)}; etc. Y el orden en el conjunto B es inducido por la relación de pre-orden T: *no nació después de*. Así T={(a,b),(b,c),(a,c)}.

aritmética de las cosmovisiones estuvo a punto de establecerse un orden entre cardinales, aunque fuera en el mundo de la cantidad concreta? Y la respuesta parece hallarse a lo largo de las distintas tematizaciones que el hombre construye por medio de la aplicación de la herramienta conceptual conteo alterno que consiste, como se explicó en el capítulo 2, en tomar dos colecciones C_α y C_β de objetos, se toma un objeto de C_α y se elimina, luego, se toma un objeto de C_β y se elimina. Enseguida se descarta otro objeto de C_α y un objeto de C_β. Se continúa de esta forma hasta agotar los objetos de una colección u otra, es posible conocer entre dos conjuntos cuál de ellos tiene el cardinal mayor, menor o igual. Además se podría conocer su sucesor o antecesor. Dicho de otra manera, se intenta dar una posición a cada cardinal en una serie numérica ordenada. En últimas, se dota a una colección de números con la propiedad transitiva.

Admítase la siguiente situación: el hombre primitivo tiene dos colecciones A y B. A está en biyección con la colección C_α y B está en biyección con la colección C_τ. Es decir, el cardinal de A es C_α y el cardinal de B es C_τ, e intenta comparar A y B por medio de la operación de conteo alterno, o lo que es lo mismo, intenta comparar el cardinal C_α con el cardinal C_τ, al hacerlo se da cuenta que la colección C_α se agota primero que la colección C_τ. Figura 3.3.

$$C_\alpha = [\ |\ ,\ |\ ]$$
$$\downarrow \quad \downarrow$$
$$C_\tau = [\ |\ ,\ |\ ,\ |\ ]$$

Figura 3.3 Comparación de las colecciones C_α y C_τ

De aquí el hombre concluye que: primero, C_α y C_τ no están en biyección, sino en inyección. Dicho de otra manera, cada elemento de la colección C_α se elimina con uno y solo un elemento de la colección C_τ. Evento que es garantizado por la operación de conteo alterno. Pero, la colección C_τ no está en inyección sobre C_α, puesto que al menos un elemento de C_τ no se elimina con un elemento de C_α. Segundo, que C_α es menor que C_τ, es decir, *en términos de cantidades*, que la colección A tiene menos elementos que la colección B. En símbolos $C_\alpha < C_\tau$. Modernamente a C_τ se le conoce como el sucesor de C_α, si y solo si al colocar en inyección a C_α sobre C_τ, el único elemento que queda en C_τ es [|]. De esta manera, aperado de este principio lógico, el hombre puede así construir la serie numérica agregando cada vez un elemento a ésta.

> "Para que el arte del cálculo abstracto pueda progresar, la comprensión de los números exige su "clasificación en un sistema de unidades numéricas jerarquizadas que encajan entre sí de manera consecutiva". Esta organización de los conceptos numéricos según un orden de sucesión consiste en esa idea que hace aparecer los números naturales como verdaderas colecciones de unidades abstractas, obtenidas sucesivamente, a partir de "uno", por el añadido suplementario de una unidad" (Ifrah, 1987, pág. 47)

Esta manera de obtener los números sucesivos a partir del uno se le conoce como el principio de recurrencia. El hombre ahora cuenta con una operación lógica nueva, con la cual podrá agregar siempre una nueva unidad a la serie numérica ordenada finita.

Retomando la discusión del pie de página 37, sobre si el hombre provisto del principio de recurrencia pudo ser consciente de la propiedad de inducción, se debe tener en cuenta que para que el sujeto pueda tener conciencia de algo depende mucho de cómo proyecte las cosas, de cómo haya podido organizar toda la información, perceptual, empírica en su conciencia, estructurarla y proyectarla. Un gran obstáculo para esto pudo ser el método constructivo de los números naturales, que se convirtió en una dificultad epistemológica para la emergencia de N como totalidad. Los sujetos estaban aún en el mundo de la verificación por medio de procesos finitos, como se presentó en 3.1 donde la existencia del 3 debía hacerse exhibiéndolo por medio de un principio de iteración, y no estaban en la capacidad de verificar si una propiedad p se cumple para n entonces se cumplirá para $n+1$ en una sucesión numérica infinita. Todo esto tiene que ver con la pregunta de si estas comunidades concebían el infinito, y si lo hacían entonces de qué manera: ¿como un proceso o una totalidad? Con esta información no se cuenta.

Otra postura frente al hecho de si el hombre en algún momento logró proyectar en su horizonte de referencia la propiedad inductiva, es presentada por Tieszen en (Arboleda, 2008):

> "Aún si el sujeto no puede reiterar el proceso para todo *n* natural por limitaciones de tiempo y memoria, esta intuición le permite realizar la intención de cualquier natural por grande que sea. Tieszen considera que esta intuición le permite interpretar la noción de sucesor, y los axiomas de Dedekind-Peano, incluido el Principio de Inducción, si se dejan de lado las "restricciones finitistas"".

En conclusión, queda claro que el hombre apoyado en su operación principio de recurrencia y aperado de un sistema de numeración y denominación podía verificar el principio de inducción para sucesiones numéricas finitas suficientemente grandes, pero para sucesiones numéricas infinitas no es posible dar una respuesta, se hace necesaria una investigación que dé cuenta de este hecho.

Capítulo 4. Conclusiones generales

Introducción

Este último capítulo presenta de manera sucinta el problema de investigación, las dimensiones de análisis y el resultado alcanzado con respecto a cada una de ellas, los alcances y las limitaciones metodológicas del trabajo y los problemas abiertos que esta tesis dejó de lado, y que constituyen un punto de partida para nuevas investigaciones.

4.1 Conclusiones de la investigación

Para terminar, se hace necesario hacer hincapié en la creencia en que la etnomatemática debe investigar los delicados problemas de la lógica interna del pensamiento matemático de las comunidades tradicionales, no simplemente limitarse a afirmar su existencia peculiar con respecto al saber matemático occidental, y el resultado de esta investigación intenta ir en esa dirección.

Resaltado este punto, se presenta el problema de investigación y los resultados alcanzados. La pregunta que suscitó esta pesquisa, como se planteó en el capítulo 1, fue: *¿Cómo se constituye un sistema de numeración en objeto matemático en una comunidad no-occidental?* Es decir, cómo se piensa en esa comunidad un objeto que por sus características y funciones estructurales modela bien lo que hoy se conoce como número natural, y de qué manera la existencia de este objeto tomó cuerpo en una pre-aritmética, es decir, un sistema de numeración dentro de una teoría empírica de esa cultura tradicional.

Este tema se abordó desde tres dimensiones: representacional, sociocultural e histórica-epistemológica y desde cada una de éstas se planteó una pregunta.

En relación con la dimensión histórica-epistemológica, se planteó: *¿Cómo se constituye la pre-aritmética de tales sistemas en tanto teoría empírica?*, es decir, ¿cómo al interior de las comunidades tradicionales, aperadas de explicaciones de fenómenos naturales y sociales, se piensa el número, las relaciones entre ellos y sus operaciones?

Para dar respuesta a esta pregunta, en el capítulo 2 se presentó una interpretación de lo que podría ser un patrón de pensamiento pre-aritmético en las comunidades tradicionales, sustentada en información secundaria de estudios antropológicos, históricos y filosóficos que brindan elementos para analizar los procesos mentales del sujeto y ver los momentos lógicos de razonamiento complejo que lo condujeron a la construcción de la idea de número, exponiendo los niveles de abstracción de la mente humana generados en dicho proceso. Donde se expone el acto constructivo del número, por medio del cual el hombre, al predicar sobre sustancias primeras dichos predicados gozan de una existencia lógica de primer orden, luego apoyado en relaciones de equivalencia o de predicar sobre predicados, construye objetos pertenecientes al segundo nivel de existencia lógica. Con esto se ilustra el nivel de complejidad y abstracción que desarrolló el hombre durante miles de años para construir la idea de número, y que en la actualidad, pareciera que siempre estuvo allí, además de que es tan natural y obvia[46]. Todo lo anterior, explica, la tensión entre el nivel empírico sensible de la noción de número y el nivel lógico abstracto del mismo.

De acuerdo a dicha interpretación, parecería que es posible extrapolar este patrón de pensamiento pre-aritmético a cualquier cultura occidental o no occidental, dicho de otra manera, postular este patrón como un invariante transcultural, puesto que el proceso lógico de la construcción del número no pudo haber sido muy distinto en las sociedades europeas antiguas, como lo muestra (Ifrah, 1981); (Menninger, 1992); entre otros.

Finalmente, los números naturales pueden ser presentados como la objetivación de procedimientos mentales apoyados en la lengua local y en distintas herramientas lógicas como los clasificadores y la operación de conteo alterno, o dicho de otra manera, son la síntesis de una serie de actos de razonamiento complejo del hombre; donde la subsistencia del número es garantizada por la cultura. Dicho patrón de pensamiento ancestral fue siglos

[46] Este proceso constructivo del número es necesario que los maestros de la educación básica y media lo conozcan y reflexionen sobre él y sus implicaciones didácticas.

más adelante validado por medio de un sistema de axiomas y su correspondiente lógica por Dedekind, apoyado en las nociones de función proposicional, conjunto y función ordenadora, llegando así a la constitución del número como objeto matemático, en tanto goza de una estructura matemática.

En relación con la dimensión representacional: *¿qué papel jugaron las distintas representaciones del número en la constitución de los sistemas de numeración?*

Tal y como se expone en los parágrafos 2.1, 2.2 y 2.3, el lenguaje desempeñó un papel decisivo en las distintas representaciones del número natural. Iniciando por el surgimiento de palabras de la lengua local que actuaban como clasificadores de los objetos del mundo material perceptible o abstracto a partir de las propiedades de estos, hacia el reconocimiento del mundo y la construcción de conocimiento[47].

Luego, por medio de las representaciones auditivas y/o visuales se dota de una estructura lingüística a los numerales que representan los números y posteriormente una estructura pre-aritmética, como lo muestran las tablas 2-1 y 2-3. La primera regulada por los morfemas primarios, la sintaxis y la semántica; la segunda regulada por las operaciones básicas suma, resta y multiplicación, todo esto muy relacionado con la base, que es un elemento importante en la constitución de los sistemas de numeración como objeto matemático dotado de la propiedad clausurativa de las operaciones, que permite generar nuevos números apoyado en principios aritméticos internos y en palabras de la lengua local.

Ambas estructuras, lingüística y pre-aritmética, harán parte más adelante de una estructura mayor llamada sistema de numeración: una estructura compuesta por otras estructuras. A este respecto, “Dedekind…se limitó a señalar que todos los conjuntos de números (ya sean en una lengua o en otra, ya los denotemos con cifras árabes o chinas) tienen una misma estructura, y que esta estructura es lo que caracteriza al conjunto de los

[47] Téngase en cuenta que la conciencia de reconocimiento es anterior a la conciencia de conocimiento, que la primera está relacionada con las vivencias del sujeto, muy atado a la intuición perceptual y la segunda está relacionada con la posibilidad de ver en su horizonte de referencia el objeto, desprovisto de cualquier fenómeno, y éste es capturado por la intuición intelectual.

números naturales" (Ferreirós, en Dedekind, 1998, pág. 52)

La última dimensión es la sociocultural, donde se indagó por el *papel que la cosmovisión jugó en la constitución de los sistemas de numeración*. En el capítulo 3, se resalta la existencia de, al menos, dos niveles distintos de complejidad, uno relacionado con los ordinales y el naturalismo; el otro relacionado con los cardinales y la operación de conteo alterno, con la cual el hombre dota de estructura de orden una sucesión de números de una manera lógica, sin salirse del dominio de éstos, es decir libre de los fenómenos naturales y las creencias de la comunidad, pero aunque la estructura remplaza la cosmovisión, no la desplaza totalmente. En la actualidad se pueden encontrar trazas de creencias en el uso de los números[48], inclusive en la cultura occidental. Pero independientemente de si se trata del crecimiento del maíz, de los animales, etc., siempre habrá ciertas formas de designación de objetos, un cierto lenguaje para designarlos, una manera de ordenar fenómenos naturales, sociales o numéricos, que cumplen la propiedad transitiva y eso es en última instancia lo que se va a conocer como una propiedad matemática, y que hace que ella sea transcultural y que ella esté presente en todos los casos de las comunidades tradicionales, como un invariante, dándole capacidad de organizar los fenómenos. Estos se organizan de una misma manera independientemente de la cosmovisión.

Es relación con "esta filosofía de las matemáticas que la existencia de los objetos es relativa a la estructura. Los universales existen previa (e incluso independientemente) de las entidades en que se instancian. La estructura de los números naturales es previa al número 2. 2 no es cosa distinta al lugar que le asigna la "función ordenadora" (relación de sucesor) en la estructura de los naturales. La "esencia" de los naturales son las relaciones que se establecen entre ellos.

Los objetos no tienen una existencia ontológica independiente, pero en todo caso poseen una identidad estructural. Esta identidad es independiente de la modalidad de existencia suya con respecto a cualquier sistema que ejemplifique la estructura. Por ejemplo, la

---

[48] Ver (Crump, 1993), (Zaslavsky, 1999)

realidad estructural de 2 es invariante con respecto a su representación {{ø}} en el modelo de Zermelo de N y su representación {ø, {ø}} en el modelo Von Neuman de N. De ahí que un estructuralista *ante rem*[49] asuma con gusto como divisa propia la siguiente posición de Poincaré:

> Los matemáticos no estudian objetos sino relaciones entre objetos; en consecuencia les es indiferente reemplazar unos objetos por otros con tal que las relaciones no cambien. La materia no les importa, lo único que les interesa es la forma (Arboleda, 2007)"

De la reflexión anterior surge la tentación de creer que al hablar de la propiedad transitiva como un invariante transcultural se está cayendo en el platonismo. Ese problema se presenta porque si lo que importa es la estructura, el objeto en tanto estructura, entonces el ser es la estructura y ese ser no está en el mundo natural sensible. Todos los entes se organizan por la estructura subyacente a ellos, el ser del objeto es su estructura, por tanto se presenta una situación delicada, de que la ontología del objeto está dada por el ser estructura y eso sería independiente a cualquier consideración relativa a las condiciones mismas de los seres vivos.

Lo que se quiere resaltar es que el hombre a partir de un proceso fenomenológico alcanza en su horizonte[50] de referencia la estructura abstracta de orden. Entonces, es posible pensar que todas las comunidades han podido capturar una estructura de orden, porque han establecido un tipo de relaciones más o menos parecidas con fenómenos naturales, respondiendo a la pulsión de la especie humana de argumentar sobre el mundo y la vida, la pulsión de explicar problemas de la realidad. Tal como se presenta en el capítulo 3, la estructura de orden se presenta en distintos fenómenos naturales, luego el hombre la

[49] El estructuralismo *ante rem* es una postura frente a la naturaleza de las matemáticas. Para un estructuralista *ante rem* los objetos no tienen existencia ontológica independiente; su existencia está determinada por las relaciones dentro de la estructura. Por ejemplo: el número 2 no es otra cosa que la segunda posición en la estructura de los naturales, el 6 es la sexta posición, etc. 2 y 6 no tienen existencia distinta a la de ser posiciones en la estructura. 2 y 6 no son independientes entre sí, por fuera de la estructura. Ésta existe previamente a los lugares que ella asigna. Una discusión amplia se presenta en (Arboleda, 2006)

[50] Este horizonte consiste precisamente en una sucesión más avanzada de actos mentales que pueden verificar la presencia del objeto o de propiedades suyas. Husserl en (Arboleda, 2008)

extrapola a objetos artificiales como el Quipu, y luego a series numéricas. Finalmente, gracias a este proceso de razonamiento complejo del hombre, que se expresa de manera distinta de acuerdo con la cosmovisión de cada comunidad, es que la estructura de orden es transcultural.

4.2 Limitaciones metodológicas

Inicialmente esta investigación se pensó realizarla al interior de alguna comunidad tradicional del país, pero la escasa formación en antropología, la falta de experiencia en trabajo de campo del autor y las condiciones de seguridad del país, condujeron a realizar un estudio teórico, basándose en estudios antropológicos de otras culturas, puesto que la información sobre las comunidades autóctonas colombianas es muy escasa, o al menos en relación con el pensamiento matemático autóctono de éstas. Por ejemplo, en Colombia solo se encontró el trabajo de (Ochoa & Peláez, 1995): La matemática como elemento de reflexión comunitaria. Pueblo Tule[51].

4.3 Problemas abiertos

Queda entonces abierta la posibilidad, para futuras investigaciones, de analizar el pensamiento matemático de comunidades tradicionales colombianas contemporáneas, teniendo en cuenta que éstas no son las comunidades originales, pues han sufrido una serie de hibridaciones culturales por más de 500 años. En consecuencia, las comunidades de hoy no son las del siglo XV, por tanto el pensamiento de éstas ha cambiado, se desconoce cómo. Este es un trabajo de historiadores, antropólogos y por supuesto de etnomatemáticos. Es decir, indagar sobre procesos de enculturación matemática al interior de comunidades tradicionales, para esto es necesaria información arqueológica, antropológica e histórica que aún no se ha levantado.

Así mismo, otras problemáticas pendientes de indagación que deja abierta esta investigación, y que tendrán que aclararse con base en la identificación y estudio de otras

[51] Una reseña de este trabajo se presenta en (Blanco, 2006), así como el estado de la etnomatemática en Colombia desde 1901 hasta el 2005

vertientes de la literatura internacional, una de ellas sería comparar la metodología estructural en historia y etnomatemática empleada en este estudio del pensamiento pre-aritmético de algunas comunidades tradicionales, con enfoques y programas socio culturales de tales comunidades con mayor tradición investigativa como el de la antropología estructural. Así mismo, profundizar el estudio sobre el tipo de ideas que habrían circulado en actividades sobre el número y el contar, el infinito y el principio de inducción, en diferentes culturas tradicionales y occidentales.

Referencias bibliográficas

Anacona, M. (2003). La Historia de las matemáticas en la Educación Matemática . (U. E. Docente, Ed.) *Revista EMA , 8* (1), 1-17.

Arboleda, L. C. (2006). Estructuralismo y Objetividad. Apuntes de lectura: Bourdieu, Shapiro, Desanti, Gardies. *Seminario de Historia de las Matemáticas*. Universidad del Valle. Cali, Colombia: Sin publicar.

Arboleda, L. C. (2007). Modalidades constructivas y objetivación del cuerpo de los Reales. *Revista Brasileira de História da Matemática* (Especial no 1 – Festschrift Ubiratan D'Ambrosio).

Arboleda, L. C. (2008). ¿Fenomenología o Logicismo? Reflexiones Histórico-Pedagógicas sobre Intuición y Formalismo en Matemáticas. *Seminario de Investigación "Fenomenología y Educación"* . Universidad del Valle. Cali, Colombia: Sin publicar.

Armstrong, R. (1963). Yoruba Numerals. *American Anthopologist , 65 (5)* , 1194-1195. (H. Wolff, Recopilador)

Ascher, M., & Ascher, R. (1997). *Mathematics of the Incas: Code of the Quipu.* New York, EE.UU: Dover Publications.

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática: La educación matemática desde una perspectiva cultural.* (G. Sanchez Barberán, Trad.) Barcelona: Ediciones Paidós Ibérica.

Bishop, A. (2005). *Aproximación sociocultural a la Educación Matemática.* (P. Perry, Trad.) Cali, Colombia: Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle.

Blanco-Álvarez, H. (2006). La Etnomatemática en Colombia. Un programa en construcción. (M. Borba, Ed.) *Revista BOLEMA – Boletim de Educação Matemática , 19* (26), 49-75.

Blanco-Álvarez,, H. (2008a). Entrevista al profesor Ubiratan D'Ambrosio. (H. Blanco, Ed.) *Revista Latinoamericana de Etnomatemática , 1* (1), 21-25.

Blanco-Álvarez, H. (2008b). La Educación Matemática desde un punto de vista sociocultural y la formación de Licenciados en Matemáticas y Etnoeducadores con énfasis en matemáticas. *Boletin ASOCOLME , 1* (1), 4-6.

Blanco-Álvarez, H. (2008c). El papel de la Red Latinoamericana de Etnomatemática en la conformación de una comunidad académica. (H. Blanco, Ed.) *Revista Latinoamericana de Etnomatemática , 1* (2), 137-147.

Blanco-Álvarez, H. (2008d). La integración de la etnomatemática a la etnoeducación. En E. García, & J. L. Grosso (Edits.), *Ciencia, Diversidad y cultura.* Cali: Universidad del Valle. En prensa.

Boone, E. H. (1994). Introduction: Writing and Recording of knowledge. En E. H. Bonne, & W. Mignolo (Edits.), *Writing Without Words: Alternative Literacies in Mesoamerica and the Andes* (págs. 3-23). Duke University Press. On Line: http://books.google.fr/books?id=JP-BXBD54uwC&printsec=frontcover&source=gbs_summary_r&cad=0.

Cauty, A. (2000). Les numérations parlées: mémoires de la quête des nombres. En É. Barbin, & J.-P. Le Goff (Edits.), *Si le nombre m'était conté* (págs. 41-65). Paris, Francia: Ellipses Édition.

Crump, T. (1993). *La antropología de los números.* (P. Gómez Crespo, Trad.) Madrid, España: Alianza Editorial.

D'Ambrosio, U. (1997). Ethnomathematics and its Place in the History and Pedagogy of Mathematics. En A. Powell, & M. Frankenstein (Edits.), *Ethnomathematics: Challenging Eurocentrism in Mathematics Education* (págs. 13-24). Albany, EE.UU: State University of New York.

Dedekind, R. (1998). *¿Qué son y para qué sirven los números?* (J. Ferreirós, Ed., & J. Ferreirós, Trad.) Madrid, España: Alianza Editorial.

Ferreira, E. S. (1997). *Etnomatemática. Uma proposta metodológica.* Rio de Janeiro, Brasil: Universidade Santa Úrsula.

Frege, G. (1996). *Los Fundamentos de la Aritmética* . (J. Mosterín, Trad.) Barcelona: Crítica.

Gardies, J.-L. (2004). *Du mode d'existence des objets de la mathématique.* (J.-F. Courtine, Ed.) Paris, France: Vrin.

Gerdes, P. (1996). Ethnomathematics and Mathematics Education. En A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Edits.), *International Handbook of*

Mathematics Education (Vol. 2, págs. 909-943). Netherlands, USA: Kluwer Academic Publishers.

Gordon, P. (2004). Numerical Cognition Without Words: Evidence from Amazonia. *Science , 306* (5695), 496-499.

Gutierrez, A. (2002). Jerarquía, reciprocidad y cosmovisión: el caso de los centros ceremoniales tukipa en la comunidad huichola de Tateikie. *Alteridades , 12* (24), 75-97.

Hilbert, D., & Bernays, P. (1934). *Foundations of Mathematics* (Vol. 1). (S. R. ¸ Ed., & I. Mueller, Trad.) S.E. http://www.phil.cmu.edu/projects/bernays/Pdf/bernays12-1_2003-06-25.pdf

Hurford, J. (1975). *The Linguistic Theory of Numerals.* Cambridge University Press.

Husserl, E. (1969). *Ideas. General Introduction to Pure Phenomenology* (Quinta edicción ed.). (W. R. Boyce Gibson, Trad.) Norwich, Gran Bretaña: Jarrold and Son Ltd.

Ifrah, G. (1981). *Histoire universelle des chiffres.* París, Francia: Éditions Seghers.

Ifrah, G. (1987). *Las cifras: historia de una gran invención.* Madrid: Alianza Editorial.

Keller, O. (2000). Préhistoire de l'arithmétique: la découverte du nombre et du calcul. En É. Barbin, & J.-P. Le Goff (Edits.), *Si le nombre m'était conté* (págs. 15-39). Paris, Francia: Ellipses Édition.

Krickeberg, W. (1985). *Mitos y leyendas de los Aztecas, Incas, Mayas y Muiscas.* México: Fondo de cultura económica.

Lévi-Strauss, C. (1984). *Antropología Estructural.* (E. Verón, Trad.) Buenos Aires, Argentina: Editorial Universitaria de Buenos Aires.

Martínez, L., & Martínez, H. (1997). *Diccionario de filosofía* (3a ed. ed.). Bogotá, Colombia: Editorial Panamericana.

Menninger, K. (1992). *Number Words and Number Symbols: A Cultural History of Numbers.* (P. Broneer, Trad.) New York, EE.UU: Dover Publications.

Monk, R. (1998). *Bertrand Russell. Matemática: sueños y pesadillas.* Bogotá, Colombia: Éditorial Norma.

Obando, G. (2008). *Sobre la noción de objetividad en Frege. Una reflexión ontológica y epistemológica.* IEP. Universidad del Valle, Doctorado Interisntitucional en Educación. Cali: Sin publicar.

Ochoa, R., & Peláez, J. A. (1995). *La matemática como elemento de reflexión comunitaria Pueblo Tule: Matemática Tule y Occidental.* Medellín, Colombia: Asociación de cabildos indídenas de Antioquia.

Panza, M. (2007). *Nombres: éléments de mathématiques pour philosophes.* Paris, Francia: ENS Editions.

Radicati Di Primeglio, C. (1979). *El sistema contable de los Incas: yupana y quipu.* Lima, Perú: Editorial Universo.

Recamán, B. (2002). *Los números: una historia para contar.* Bogotá, Colombia: Taurus.

Russell, B. (1994). Definición de número. En J. R. Newman (Ed.), *Sigma: el mundo de las matemáticas* (Vol. 4, págs. 129-135). Barcelona, España: Grijalbo.

Salazar, E. (2005). *Análisis comparativo de los conceptos matemáticos Maya y Kaxlan. El caso de las comunidades Santa Isabel y la Unión, Municipio de Chisec, Departamento de Alta Verapaz.* Trabajo de grado, Universidad de San Carlos de Guatemala, Escuela de Historia, Guatemala. Tomado de http://www.etnomatematica.org/trabgrado/ErwinSalazar.pdf.

Salzmann, Z. (1950). A Method for Analizing Numerical Systems. *Word , 6* (1), 78-83.

Sampson, G. (1990). *Writing Systems: A Linguistic Introduction.* USA: Stanford University Press. On Line: http://books.google.fr/books?id=tVcdNRvwoDkC&printsec=frontcover&source=gbs_summary_r&cad=0.

Schérer, R. (1969). *La fenomenología de las "investigaciones lógicas" de Husserl.* (J. Díaz, Trad.) Madrid, España: Editorial Gredos, S. A.

Urton, G. (1997). *The Social Life of Numbres. A Quechua Ontology of Numbers and Philosophy of Arithmetic.* Austin, EE.UU: University of Texas Press.

Urton, G. (2005). *Signs of the Inka Khipu: Binary Coding in the Andean Knotted-String Records* (Segunda Edición ed.). Austin, USA: University of Texas Press.

White, L. (1982). El locus de la realidad matemática. En L. White, *La ciencia de la cultura: un estudio sobre el hombre y la civilización* (G. Steenks, Trad., 1 ed., pág. 411). Barcelona, España: Ediciones Paidós Ibérica.

Yojcom Rocché, D. (2006). *Análisis del uso actual del sistema de numeración vigesimal en cinco comunidades Q'eqchi' de Guatemala.* Trabajo de investigación de maestría, Pontificia Universidad Católica de São Paulo, Maestría en Educación, São Paulo. Tomado de http://etnomatematica.org/articulos/INVESTIGACION%202006.zip

Zaslavsky, C. (1970). Mathematics of the Yoruba People and of Their Neighbors in Southern Nigeria. *The Two-Year College Mathematics Journal , 1* (2), 76-99.

Zaslavsky, C. (1999). *Africa Counts: Numbers and pattern in Africa Cultures* (3 ed.). Chicago, EE.UU: Lawrence Hill Books.

Anexos

1. La etnomatemática en Colombia. Un programa en construcción[i]
2. Entrevista al profesor Ubiratan D'Ambrosio[ii]
3. La Educación Matemática desde un punto de vista sociocultural y la formación de licenciados en matemáticas y etnoeducadores con énfasis en matemáticas[iii]
4. El papel de la Red Latinoamericana de Etnomatemática en la conformación de una comunidad académica[iv]

[i] Publicado en la Revista *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática.* Año 19, No. 26, Noviembre 2006. Brasil. ISSN: 0103-636X

[ii] Publicado en la *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*. Vol. 1, No. 1, Febrero 2008. Colombia. ISSN: 2011-5474

[iii] Publicado en el *Boletín de la Asociación Colombiana de Matemática Educativa. ASOCOLME*. Vol.1, No. 1, Febrero 2008. Colombia. Las imágenes que ilustran este artículo fueron tomadas de **Monsalve, V.** (2006). Proceso de apropiación conceptual a través de las investigaciones matemáticas en el aula. Trabajo de Grado. Universidad Industrial de Santander.

[iv] Publicado en la *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*. Vol. 1, No. 2, Julio 2008. Colombia. ISSN: 2011-5474